

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра "Системы управления"

681.5(07)
П124

О.О. Павловская, Н.В. Плотникова

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Часть 1

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2004

УДК 681.511.2 (075.8)

Павловская О.О., Плотникова Н.В. Теория автоматического управления. – Ч.1. Линейные системы. Учебное пособие. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2004. – 76 с.

В пособии изложены основные принципы теории линейных систем управления: понятия и определения, типы и виды динамических звеньев, их характеристики, правила преобразования структурных схем, понятия и виды передаточных функций. Значительное внимание уделяется методам анализа устойчивости и качества линейных систем управления. В последних главах излагаются методы синтеза систем управления с заданными характеристиками качества. Отдельная глава посвящена методу пространства состояний.

Пособие предназначено для студентов специальностей "Автоматизированные системы обработки информации и управления", "Управление в технических системах", "Системы управления летательными аппаратами" и образовательных направлений "Системный анализ и управление", "Автоматизация и управление" дневного и заочного отделений, а также может быть полезно студентам других специальностей, изучающим курс теории автоматического управления, систем управления технологическими процессами в различных отраслях промышленности.

Ил. 34, табл. 34, список лит. – 4 назв.

Одобрено учебно-методической комиссией приборостроительного факультета.

Рецензенты: Б.Л. Маринин, В.С. Жабреев.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Управление – это процесс воздействия на технический объект с целью обеспечения требуемого течения процессов в объекте или требуемого его состояния.

Все технические устройства делятся на 2 группы:

- 1) полуавтоматические – устройства, в которых функция управления принадлежит человеку;
- 2) автоматические – устройства, в которых функция управления выполняется автоматическими управляющими устройствами.

Причины автоматизации управления:

1. Рост мощности и сложности технических объектов.
2. Повышение требований к быстродействию объектов.
3. Повышение требований к точности выполнения операций.
4. Возникновение процессов, протекающих в экстремальных условиях.

Объект управления (ОУ) – это техническое устройство, в котором протекает управляемый процесс.

Состояние ОУ, результат его действия определяются некоторыми показателями, называемыми **выходными величинами ОУ**. Чем сложнее объект, тем большее количество показателей характеризует его действие и тем труднее следить за всей их совокупностью. Поэтому одни выходные величины ОУ непрерывно измеряются в процессе работы и называются **контролируемыми**. Другие, оказывая влияние на режим работы объекта, не измеряются и называются **неконтролируемыми**. Контролируемую выходную величину, характеризующую управляемый процесс в основном, называют **управляемой (регулируемой) величиной (УВ)**.

Требуемое значение регулируемой величины называют **задающим воздействием** и обозначают X_3 .

На ОУ действует внешняя среда (рис. 1.1). Факторы внешней среды, наиболее сильно влияющие на объект управления, называют **входными воздействиями**. Последние делятся на 2 группы:

- 1) управляющие (z) – обеспечивают желаемое изменение поведения объекта;
- 2) возмущающие или помехи (f) – мешают достижению цели управления и изменить их, как правило, невозможно.

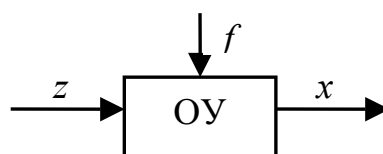


Рис. 1.1

Пример: гидравлический резервуар (рис. 1.2)

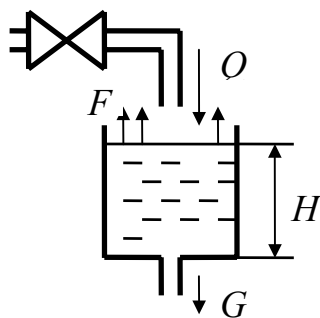


Рис. 1.2

В резервуаре необходимо поддерживать определенный уровень жидкости H . Это достигается путем добавления жидкости со скоростью Q и откачкой – со скоростью G . Поддержанию постоянного уровня жидкости в резервуаре препятствует испарение со скоростью F . Значит здесь H – управляемая величина, Q и G – это управляющие воздействия, F – помеха.

Сущность управления заключается в формировании такого закона изменения управляющей величины z , при котором обеспечивается желаемое поведение ОУ ($X=X_3$), независимо от влияния помех f .

В реальных системах процесс управления не может быть идеальным, то есть величина задающего воздействия X_3 не может точно определять управляющую величину X . Вследствие этого возникает **ошибка** или **рассогласование**:

$$\varepsilon = \Delta X = X_3 - X.$$

Причины возникновения ошибки:

1. Влияние возмущений.
2. Влияние изменения параметров ОУ и других элементов системы (вследствие старения).
3. Изменение задающего воздействия.

Основная задача управления – сведение ошибки (рассогласования) к нулю, то есть $\Delta X \rightarrow 0$.

Свести ошибку к нулю можно путем введения в систему регулятора. **Регулятор** – это устройство, преобразующее сигнал задания в управляющую величину с учетом статических и динамических характеристик ОУ. Он автоматически поддерживает заданный режим работы ОУ.

Система автоматического управления (САУ) – это автоматически действующее устройство, предназначенное для поддержания заданной величины на заданном уровне. САУ – это совокупность ОУ и регулятора.

Частная задача управления – **задача регулирования**. Она заключается в поддержании выходной величины ОУ равной или пропорциональной некоторым эталонным функциям времени (задающим воздействиям).

1.2. Принципы управления

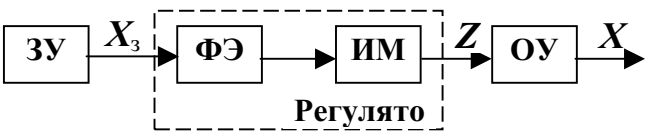
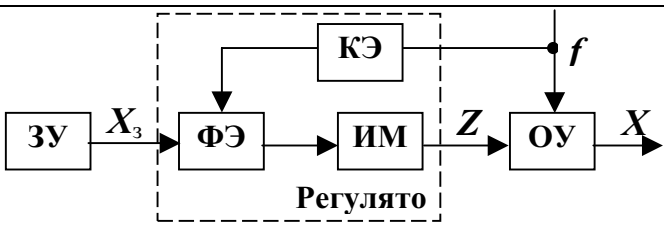
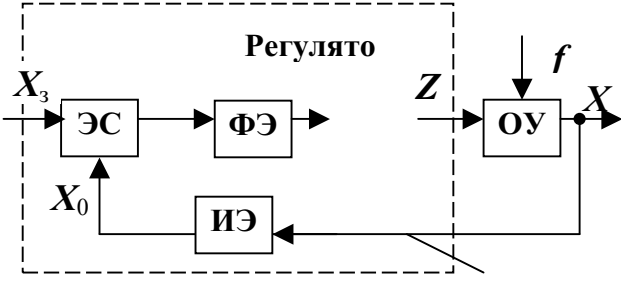
В основе построения любой системы автоматического управления лежат некоторые общие принципы управления.

В настоящее время в технике известны и широко используются три фундаментальных принципа (табл. 1):

- 1) принцип управления по задающему воздействию (если отклонение X от X_3 вызвано изменением X_3);
- 2) принцип управления по возмущению (если отклонение X от X_3 вызвано влиянием возмущений f);
- 3) принцип обратной связи.

Описание отличительных особенностей принципов управления приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Принцип	Функциональная схема системы	Примечание
1	 <p>ЗУ – задающее устройство ФЭ – усилительно-преобразовательный элемент ИМ – исполнительный механизм</p>	<p>Из-за инерционности ОУ при изменении X_3 возникает ошибка ΔX. Для устранения или уменьшения ΔX регулятор формирует управляющий сигнал Z с учетом статических и динамических характеристик ОУ. Под влиянием Z величина X изменяется в соответствии с изменением X_3</p>
2	 <p>КЭ – компенсирующий элемент</p>	<p>По результатам измерения возмущения вводятся такие коррективы в алгоритм управления, которые компенсируют вызываемые возмущениями отклонение ΔX</p>
3	 <p>ИЭ – измерительный элемент</p> <p style="text-align: right;">Обратная связь</p>	<p>В систему водится дополнительная связь (обратная связь). Сигнал X_0, пропорциональный X, сравнивается с X_3. Если $\Delta X \neq 0$, то формируется такой сигнал Z, чтобы $X \rightarrow X_3$</p>

Системы, реализующие принцип 1 и 2 являются разомкнутыми, так как в них X не влияет на действие регулятора. Системы, реализующие принцип 3 – замкнутые.

1.3. Обобщенная функциональная схема системы управления

Обобщенная функциональная схема системы автоматического управления приведена на рис. 1.3. Названия и функциональное назначение каждого из элементов приведено в табл. 1.2.

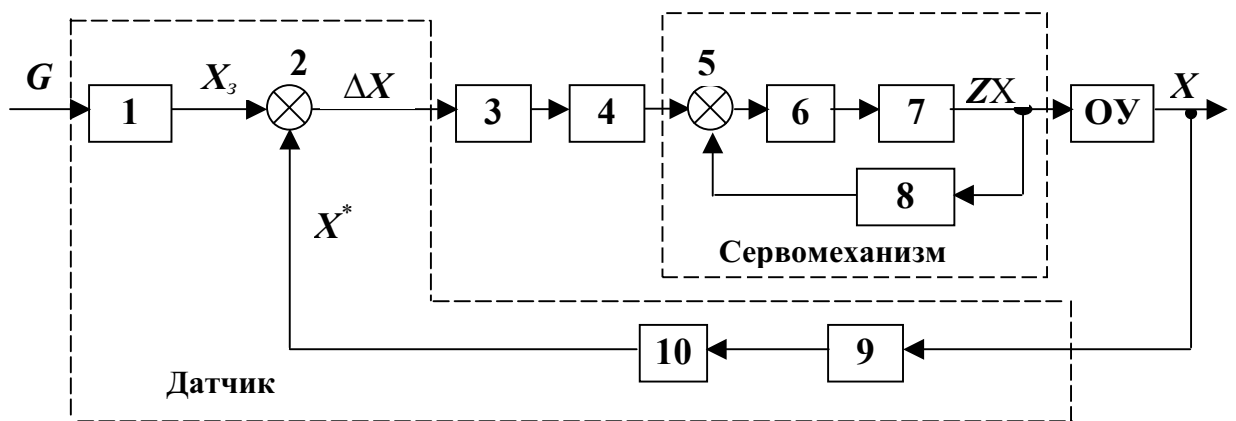


Рис. 1.3

Таблица 1.2

№ п/п	Название	Функциональное назначение
1	Задающее устройство	Преобразует управляющее воздействие G в сигнал, пропорциональный заданному значению управляемой величины и удобный для сравнения с величиной X^*
2	Элемент сравнения	Выявление отклонений величины X^* от величины X_3
3	Преобразующее устройство	Преобразует одну физическую величину в другую, более удобную для использования в процессе управления (без измерения, усиления или коррекции)
4, 8	Корректирующее устройство	Повышает устойчивость, улучшает динамические свойства системы
5	Вспомогательный элемент сравнения	Сопоставляет сигнал в промежуточной точке прямой цепи с сигналом местной обратной связи
6	Усилительное устройство	Предназначено для усиления мощности сигналов в регуляторе

№ п/п	Название	Функциональное назначение
7	Исполнительное устройство	Вырабатывает управляющее воздействие Z , непосредственно прикладываемое к объекту управления
9	Чувствительный или измерительный элемент	Преобразует управляемую величину в сигнал управления, удобный для дальнейшего использования в процессе регулирования (в электрический или механический сигнал)
10	Элемент главной обратной связи	Вырабатывает сигнал, находящийся в определенной функциональной зависимости от управляемой величины

С помощью элемента 8 создается *местная* обратная связь, а с помощью элементов 9, 10 создается *главная* обратная связь.

1.4. Виды и законы регулирования

Виды управления приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Вид управления	Сущность	
Стабилизация	$X_3 = \text{const}$	
	Прямое регулирование	Энергия, необходимая для изменения положения регулирующего органа, поступает непосредственно от чувствительного элемента
	Непрямое регулирование	Для перемещения регулирующего органа используются вспомогательные средства, которые работают от дополнительного источника энергии
Программное управление	$X_3 = X_3(t)$ – известная функция времени	
	С временной программой	Датчик программы вырабатывает непосредственно задающее воздействие
	С пространственной программой	1. Движение по одной из координатных пространственных осей задается произвольно, а остальные движения увязываются с первым. 2. Строится решающее устройство, задающее движение по отдельным осям, в соответствии с параметрическим уравнением

Вид управления	Сущность
Слежение	$X_3=X_3(t)$ – неизвестная функция времени
Экстремальное управление	Обеспечивается поддержание в точке максимума показателя эффективности процесса, который в каждый момент времени может быть выражен функцией текущих координат системы
Оптимальное управление	Показатель эффективности зависит не только от текущих значений координат, но и от характера изменения в прошлом, настоящем и будущем и выражается некоторым функционалом от координат, их производны, и, возможно, времени
Адаптивное управление	Происходит автоматическое изменение значений параметров системы или структуры при непредвиденных изменениях внешних условий на основании анализа состояния или поведения системы, так чтобы сохранялось заданное качество ее работы

Закон регулирования – закон формирования управляющего воздействия Z на основе информации о величине ошибки системы $\Delta X=\varepsilon$ (см. Рис. 1.3).

Наиболее распространенные законы регулирования, реализуемые линейными регуляторами по отклонению приведены в табл.1.4.

Таблица 1.4

Название закона	Математическое описание	Примечание
Пропорциональный	$Z(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t),$ K_1 – коэффициент передачи регулятора	Характерен для статических систем
Интегральный	$Z(t) = K_2 \cdot \int_0^t \varepsilon(t)dt,$ K_2 – коэффициент передачи регулятора	Характерен для астатических систем
Пропорционально–интегральный (изодромный)	$Z(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_2 \cdot \int_0^t \varepsilon(t)dt$ $K_1 \gg K_2$	
Пропорционально–интегрально–дифференциальный	$Z(t) = K_1 \cdot \varepsilon(t) + K_2 \cdot \int_0^t \varepsilon(t)dt +$ $+ K_3 \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$	

Примечание: пропорциональная составляющая закона регулирования обеспечивает быструю реакцию на возникновение ошибки, интегральная составляющая обеспечивает точность регулирования, дифференциальная составляющая вводится для повышения качества регулирования (для уменьшения колебательности возбужденной системы).

1.5. Классификация систем управления

Классификация систем управления приведена в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Признак классификации	Виды систем	Пояснения
Математическое описание	Линейные	Все элементы системы описываются линейными уравнениями
	Нелинейные	Хотя бы один элемент системы обладает существенно нелинейной характеристикой
Свойства в установившемся режиме	Статическая система (астатическая система нулевого порядка)	$\varepsilon=0$ в установившемся режиме при $X_3=\text{const}$, $X_3=At$, $X_3=At^2$ и т.д.
	Астатическая система (n -го порядка, $n \geq 1$)	В установившемся режиме $\varepsilon=0$ при $X_3=At^{n-1}$
Количество регулируемых величин	Одномерные	В системе имеется одна регулируемая величина
	Многомерные	В системе регулируемых величин больше одной
Характер параметров	Стационарные	Параметры элементов системы не изменяются с течением времени
	Нестационарные	Параметры изменяются во времени, и этими изменениями нельзя пренебречь
Количество контуров	Одноконтурные	Системы только одну главную обратную связь и не имеют местных обратных связей
	Многоконтурные	Системы помимо одного контура главной обратной связи имеют еще главные обратные связи или местные обратные связи

Признак классификации	Виды систем	Пояснения
Характер сигналов в регуляторе	Непрерывные	В процессе регулирования структура всех связей в системе остается неизменной; между входными и выходными величинами всех элементов системы существует непрерывная связь
	С гармонически модулированным сигналом	Системы включают элементы, у которых входной и выходной величиной является переменное напряжение (ток) некоторой частоты ω_0 , называемой несущей частотой
Характер сигналов в регуляторе	Дискретные	Выходная величина какого-либо элемента системы имеет дискретный характер (является прерывистой функцией времени). К дискретным относятся релейные, импульсные и цифровые системы
Характер внешних воздействий	Детерминированные	Все внешние воздействия и параметры модели являются постоянными или определенными функциями времени и переменных состояния
	Стохастические	Хотя бы одно внешнее воздействие есть случайная функция времени. Для исследования таких систем используются статистические методы
Наличие связей между регуляторами в многомерных системах	Системы связанного регулирования	Регуляторы различных величин имеют друг с другом взаимные связи, которые осуществляют взаимодействие между ними вне объекта регулирования
	Системы несвязанного регулирования	Регуляторы, предназначенные для регулирования различных величин, не связаны друг с другом и могут взаимодействовать через общий объект регулирования

Кроме того, по видам регулирования выделяют системы стабилизации, системы программного управления, следящие системы (см. табл.1.3). По принципу управления различают системы разомкнутые, замкнутые, комбинированные (см. табл.1.1).

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

2.1. Уравнения динамики и статики. Линеаризация

Для анализа системы надо иметь ее математическое описание, то есть получить уравнение, описывающее ее поведение. Для этого надо сделать следующее:

1. Разбить систему на отдельные элементы.
2. Для каждого элемента выбрать обобщенные координаты, то есть те координаты, которые однозначно характеризуют поведение данного элемента.
3. Выявить закон (физический, химический или другой), которому подчиняется изменение этих координат, и записать его математически.

Совокупность всех уравнений элементов системы дает уравнения системы управления.

Пример. Получить математическое описание системы – электрической цепи (рис. 2.1).

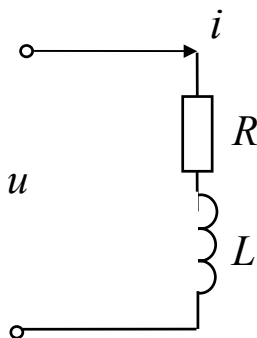


Рис. 2.1

Чтобы получить математическое описание системы применим описанную последовательность действий:

- 1) система простейшая, разбивать на элементы ее не нужно;
- 2) входная величина – напряжение u , выходная величина – ток i ;
- 3) уравнение, связывающее входную и выходную величины:

$$U(t) = i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Уравнения называют **уравнениями динамики**, если они описывают изменения входящих в них переменных во времени.

Из уравнений динамики можно получить **уравнения статики**, если положить все входящие в них производные и воздействия равными нулю или некоторым постоянным величинам. Уравнения статики описывают поведение системы в установившемся режиме.

Многие элементы систем управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (ДУ) и даже отыскание его приближенного

числового решения может оказаться трудоемким. Поэтому при инженерных расчетах широко используют линейризацию.

Линеаризация – это замена нелинейных ДУ линейными ДУ, для которых существует общий метод интегрирования.

Известны несколько методов линеаризации: метод осреднения, метод малых отклонений, метод касательной, метод секущей, метод геометрической линеаризации.

Рассмотрим первые два метода.

1. Метод осреднения

Пусть элемент с входной величиной X и выходной – описывается статической характеристикой (рис. 2.2).

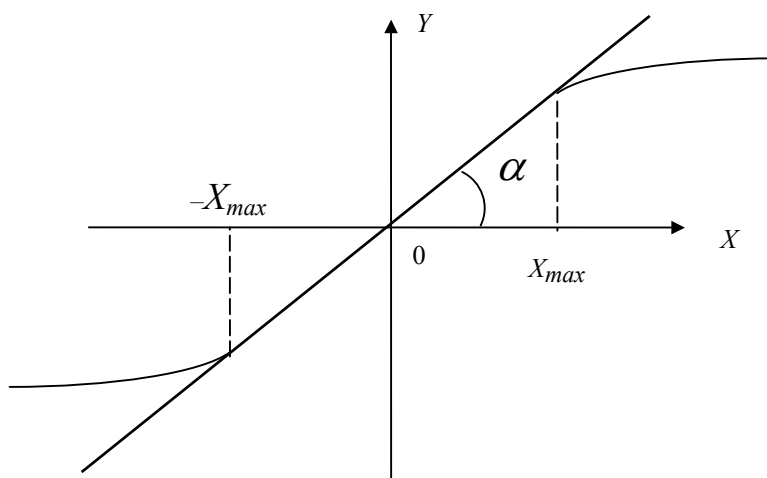


Рис. 2.2

На участке $-X_{\max} \leq X \leq X_{\max}$ нелинейная статическая характеристика с достаточной точностью может быть аппроксимирована прямой линией

$$y = kx, \text{ где } k = \operatorname{tg} \alpha .$$

Такую простую линеаризацию используют, когда на рабочем участке характеристика достаточно гладкая.

2. Метод малых отклонений

Этот метод применим к уравнениям произвольного порядка. Рассмотрим метод на примере уравнения 2-го порядка.

Пусть имеется система (рис. 2.3).

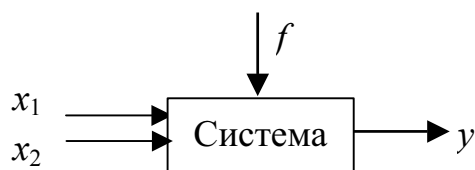


Рис. 2.3

Пусть эта система описывается уравнением вида:

$$\varphi(x_1, x_2, \dot{x}_1, y, \dot{y}, \ddot{y}) = \xi(f, \dot{f}). \quad (2.1)$$

Разложим функцию φ в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранной точки. При линеаризации уравнения эта точка должна соответствовать установившемуся режиму. В этом режиме $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, $y = y_0$, то есть постоянные величины, а $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\varphi(x_{10}, x_{20}, 0, y_0, 0, 0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \cdot \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0 \cdot \Delta y + \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\right)^0 \cdot \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \cdot \Delta \ddot{y} + \Delta = \xi(f, \dot{f}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_{10}$, $\Delta x_2 = x_2 - x_{20}$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1$, $\Delta \dot{y} = \dot{y}$, $\Delta \ddot{y} = \ddot{y}$ – отклонения переменных от установившихся значений;

$()^0$ – значение выражения в точке разложения;

Δ – бесконечно малые разложения, ими пренебрегаем.

Уравнение равновесного состояния системы

$$\varphi(x_{10}, x_{20}, 0, y_0, 0, 0) = \xi(f_0, \dot{f}_0), \quad (2.3)$$

Вычитая из уравнения (2.2) уравнение (2.3) получим искомое линеаризованное уравнение

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^0 \cdot \Delta x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^0 \cdot \Delta x_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \cdot \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0 \cdot \Delta y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\right)^0 \cdot \Delta \dot{y} + \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \cdot \Delta \ddot{y} = \psi(f, \dot{f}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – линейное с постоянными коэффициентами, но в отличие от исходного уравнения (2.1) приближенное, так как отброшена величина Δ и уравнение содержит не переменные $x_1, x_2, \dot{x}_1, y, \dot{y}, \ddot{y}$, а их отклонения от установившегося режима.

При нулевых начальных условиях уравнение (2.4) запишется в виде:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^0 \cdot x_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \cdot \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0 \cdot y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\right)^0 \cdot \dot{y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \cdot \ddot{y} = \psi(f, \dot{f}). \quad (2.5)$$

Метод малых отклонений неприменим, если функция φ имеет разрывы или неоднозначность по одной из переменных.

2.2. Свойства преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

где интеграл в правой части – это интеграл Лапласа, $f(t)$ – оригинал, $F(s)$ – изображение оригинала.

Свойства преобразования Лапласа.

1. Линейность:

$$Af_1(t) + Bf_2(t) = AF_1(s) + BF_2(s),$$

где A и B – постоянные величины; $F_1(s)$, $F_2(s)$ – изображения функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ соответственно.

2. Смещение:

$$f(t)e^{at} = F(s-a),$$

где a – постоянное число.

3. Теорема о начальном и конечном значении функции

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

4. Дифференцирование

$$f'(t) = sF(s) - f(0)$$

5. Интегрирование

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s} - \frac{f(0)}{s}.$$

6. Теорема свертки оригиналов

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^x f_1(t)f_2(x-t)dt = \int_0^x f_2(t)f_1(x-t)dt.$$

В табл. 2.1 приведены оригиналы и их изображения.

Таблица 2.1

Оригинал	Изображение
1	1/s
e^{at}	1/(s - a)
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
t^n	$n!/s^{n+1}$

2.3. Формы записи дифференциальных уравнений. Понятие передаточной функции

Линейное ДУ можно записать во *временной канонической форме*. Для этого слагаемые с выходными переменными и их производными оставляют в левой части уравнения, а слагаемые с входными переменными и их производными переносят в правую часть уравнения, причем коэффициент при выходной величине должен быть равен единице. Если в уравнении выходная величина отсутствует, то делают равным единице коэффициент при ее младшей производной.

Каноническая форма записи уравнения (2.5):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \cdot \ddot{y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\right)^0 \cdot \dot{y} + y = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^0 \cdot x_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^0 \cdot x_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_1}\right)^0 \cdot \dot{x}_1 + \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0} \psi(f, \dot{f})$$

или в упрощенной форме записи

$$a_0 \cdot \ddot{y} + a_1 \cdot \dot{y} + y = -e_0 \cdot x_1 - e_1 \cdot x_2 - e_2 \cdot \dot{x}_1 + e_3 \psi(f, \dot{f}), \quad (2.6)$$

где $y = y(t), \dot{y} = \dot{y}(t), \ddot{y} = \ddot{y}(t), x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dot{x}_1 = \dot{x}_1(t)$

Запись уравнения (2.5) в символической форме и в преобразованиях по Лапласу приведены в табл. 2.2.

Разрешим уравнение системы, записанное в преобразованиях по Лапласу (см. табл.2.2) относительно $y(s)$

$$y(s) = -\frac{(b_0 + b_2 s)}{(a_0 s^2 + a_1 s + 1)} x_1(s) - \frac{b_1}{(a_0 s^2 + a_1 s + 1)} x_2(s) + \frac{b_3}{(a_0 s^2 + a_1 s + 1)} \psi(s) \quad (2.7)$$

Передаточная функция звена $W(s)$ – это отношение выходной величины звена к его входной величине, преобразованных по Лапласу, при нулевых начальных условиях (нну) и при отсутствии прочих возмущений, то есть

$$W(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{\text{нну}},$$

то есть линейное звено, описываемое передаточной функцией $W(s)$, схематично изображается так

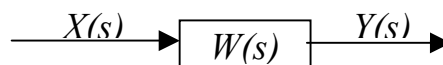


Рис.2.4

Таблица 2.2

Название	Форма записи переменных	Форма записи уравнений	Пояснения
Символическая	$y = y(t)$ $\dot{y} = \dot{y}(t)$ $\ddot{y} = \ddot{y}(t)$ $x_1 = x_1(t)$ $x_2 = x_2(t)$ $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t)$	$a_0 p^2 y + a_1 p y + y =$ $= -b_0 x_1 - b_1 x_2 - b_2 p x_1 + b_3 \psi$ или $y \cdot (a_0 p^2 + a_1 p + 1) =$ $= -x_1 \cdot (b_0 + b_2 p) - b_1 x_2 + b_3 \psi$	$\frac{d}{dt} \equiv p$ $\frac{d^i}{dt^i} \equiv p^i$
В преобразованиях по Лапласу	$y = y(s)$ $\dot{y} = \dot{y}(s)$ $\ddot{y} = \ddot{y}(s)$ $x_1 = x_1(s)$ $x_2 = x_2(s)$ $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(s)$	$a_0 s^2 y + a_1 s y + y =$ $= -b_0 x_1 - b_1 x_2 - b_2 s x_1 + b_3 \psi$ или $y \cdot (a_0 s^2 + a_1 s + 1) =$ $= -x_1 \cdot (b_0 + b_2 s) - b_1 x_2 + b_3 \psi$	$s = c + j\omega$

Тогда в соответствии с (2.7) имеем

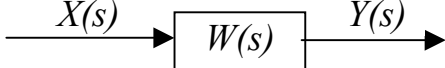
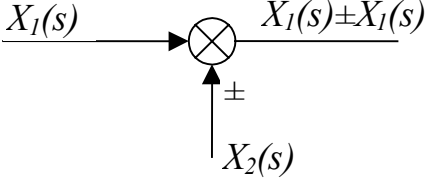
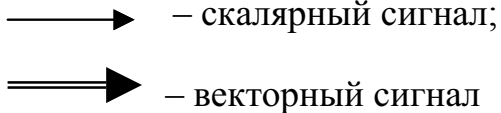
$$W_{x_1}(s) = \frac{Y(s)}{X_1(s)} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ \psi=0}} = \frac{b_0 + b_2 s}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}, \quad (2.8)$$

$$W_{x_2}(s) = \frac{Y(s)}{X_2(s)} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ \psi=0}} = \frac{b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}, \quad (2.9)$$

$$W_{\psi}(s) = \frac{Y(s)}{\psi(s)} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \frac{b_3}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}. \quad (2.10)$$

Структурная схема – графическое изображение математической модели системы автоматического управления в виде соединений элементов.

На структурных схемах приняты обозначения (табл. 2.3).

1	Звено	
2	Сравнивающие и суммирующие устройства	
3	Связи между звеньями	

Уравнения (2.8), (2.9), (2.10) позволяют описать систему следующей структурной схемой:

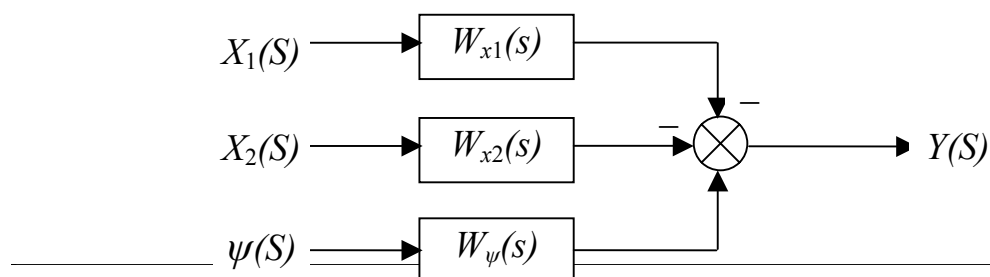


Рис. 2.5

В общем случае $W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ является дробно-рациональной функцией,

где $P(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m$ – полином от s степени m ,
 $Q(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$ – полином от s степени n . Порядок передаточной функции определяется порядком полинома ее знаменателя и равен n .

Корни $P(s)$ называются **нулями** передаточной функции, корни $Q(s)$ – **полюсами** передаточной функции. Степень полинома знаменателя всегда меньше степени полинома числителя – это условие физической реализуемости системы.

2.4. Виды передаточных функций системы управления

Пусть известна структурная схема системы управления (рис. 2.6).

Виды передаточных функций и выражения для них приведены в табл. 2.4.

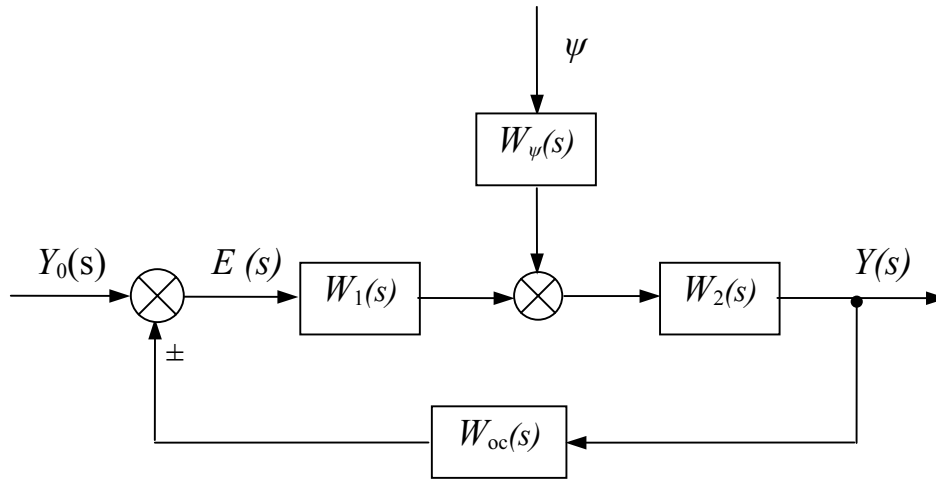


Рис. 2.6

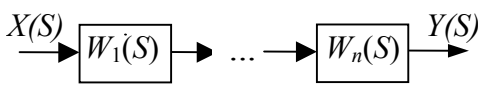
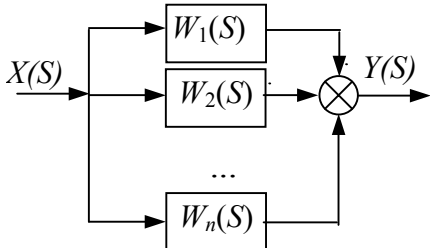
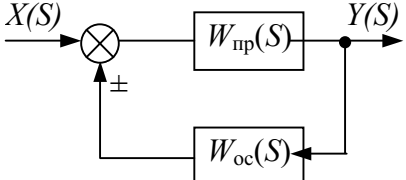
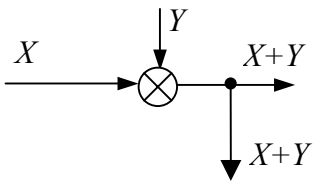
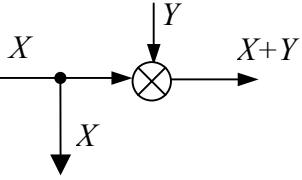
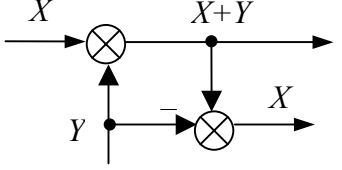
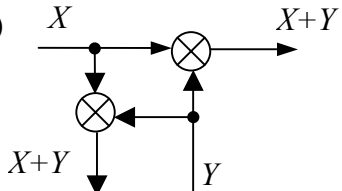
Таблица 2.4

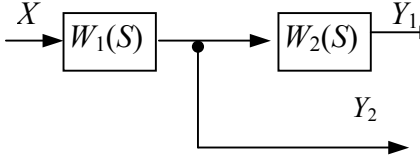
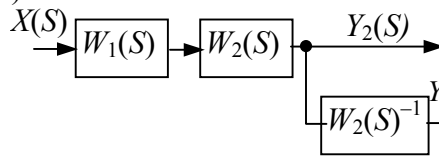
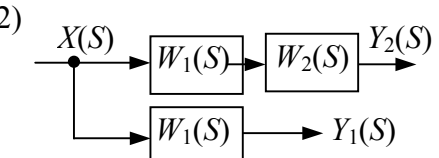
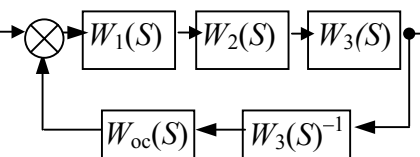
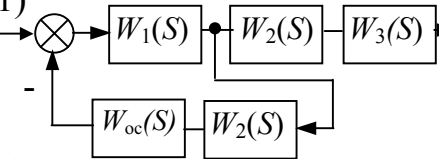
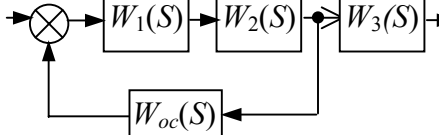
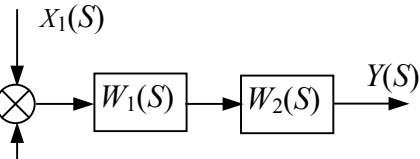
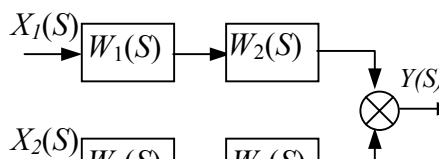
Вид передаточной функции (ПФ)		Выражение передаточной функции (ПФ)	
1. ПФ разомкнутой системы		$W_p(S) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_{oc}(s)$	
2. ПФ замкнутой системы $\Phi(S) = \frac{W_{np}(S)}{1 \mp W_p(S)}$ $W_{np}(S) = W_1(s) \cdot W_2(s)$	По задающему воздействию	$\Phi_{y_0}(S) = \frac{Y(s)}{Y_0(s)} = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s)}{1 \mp W_p(s)}$	
	По возмущению	$\Phi_\psi(S) = \frac{Y(S)}{\psi(S)} = \frac{W_\psi(s) \cdot W_2(s)}{1 \mp W_p(s)}$	
3. ПФ замкнутой системы $\Phi(S) = \frac{W_{np}(S)}{1 \mp W_p(S)}$ $W_{np}(S) = W_1(s) \cdot W_2(s)$	По ошибке	относитель но Y_0	$\Phi_{Y_0}(S) = \frac{E_{Y_0}(s)}{Y_0(s)} = \frac{1}{1 \mp W_p(S)}$
		относитель но ψ	$\Phi_\psi(S) = \frac{E_\psi(s)}{\psi(s)} = \frac{W_\psi(s) \cdot W_1(s)}{1 \mp W_p(S)}$

2.5. Основные правила преобразования структурных схем

Основные правила преобразования приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вид преобразования	Исходная схема (вид)	Преобразованная схема $X(S) \rightarrow W_{\text{экв}}(S) \rightarrow Y(S)$
1. Последовательное соединение звеньев		$W_{\text{экв}}(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \prod_{i=1}^n W_i(S)$
2. Параллельное соединение звеньев		$W_{\text{экв}}(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \sum_{i=1}^n W_i(S)$
3. Соединение с обратной связью		$W_{\text{экв}}(S) = \frac{W_{\text{np}}(S)}{1 \mp W_{\text{oc}}(S)W_{\text{np}}(S)}$
4. Перенос сумматора через узел разветвления	<p>1)</p>  <p>2)</p> 	<p>1)</p>  <p>2)</p> 

Вид преобразования	Исходная схема вид	ПРЕОБРАЗОВАННАЯ СХЕМА
5. Перенос узла		<p>1)</p>  <p>2)</p> 
6. Перенос места включения звена ОС		<p>1)</p>  <p>2)</p> 
7. Правило разделения общих цепей прохождения сигнала		

Для линейных систем справедлив принцип *коммутативности*: можно менять местами последовательно соединенные звенья.

2.6. Типовые динамические звенья и их характеристики

Динамические звенья по основным свойствам делятся на четыре группы: позиционные, дифференцирующие, интегрирующие.

1) **позиционные** – кроме консервативного, характеризуются тем, что при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной величины;

2) **дифференцирующие** – реагируют лишь на изменение входной величины;

3) *интегрирующие* – характеризуются тем, что при постоянном входном воздействии выходная величина неограниченно возрастает;

4) *особые*.

Поведение звеньев описывается временными и частотными характеристиками. К временным характеристикам относятся: *весовая* и *переходная* характеристики.

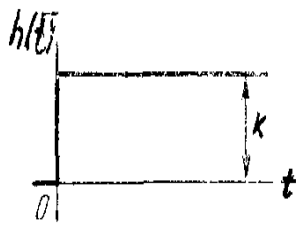
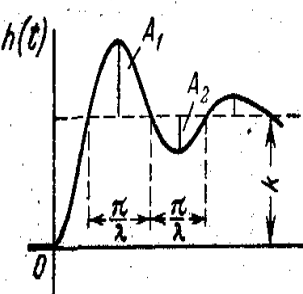
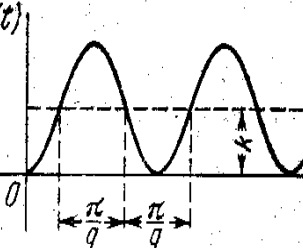
Переходной характеристикой $h(t)$ называется реакция звена на единичное ступенчатое воздействие.

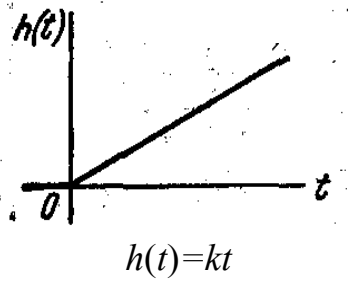
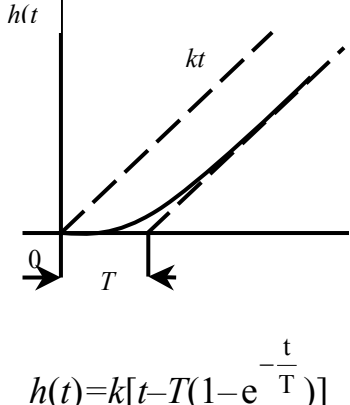
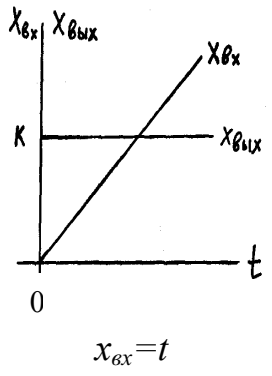
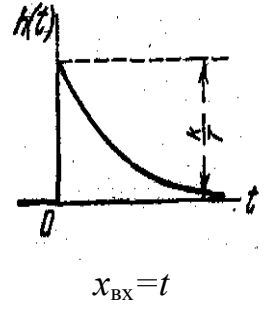
Весовая функция может быть получена дифференцированием по времени переходной функции, то есть $\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}$.

Типы звеньев, а также передаточные и переходные функции приведены в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Звено		Передаточная функция $W(S)$	Переходная функция $h(t)$
Тип	Название		
1	2	3	4
П О З И Ц И О Н Н Ы Е	Апериодическое 1-го порядка	$W(S) = \frac{k}{TS + 1}$ <p>T – постоянная времени k – коэффициент усиления</p>	 $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$
	Апериодическое 2-го порядка	$W(S) = \frac{k}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1}$ $= \frac{k}{(1 + T_3 S)(1 + T_4 S)}$ $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ <p>$(T_1 > 2T_2; T_3 > T_4)$</p>	 $h(t) = k \left[1 - \frac{1}{T_3 - T_4} \cdot (T_3 e^{-\frac{t}{T_3}} - T_4 e^{-\frac{t}{T_4}}) \right]$

1	2	3	4
	Идеальное усилительное	$W(S) = k$	 <p style="text-align: center;">$h = k$</p>
П О З И Ц И О Н Н Ы Е	Колебательное устойчивое	$W(S) = \frac{k}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1} =$ $= \frac{k}{1 + \frac{2\xi}{q} S + \frac{S^2}{q^2}}$ $q = \frac{1}{T};$ $0 \leq \xi < 1$ <p style="text-align: center;">ξ – коэффициент затухания</p>	 $\gamma = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{A_1}{A_2};$ $\gamma = \xi q, \quad \lambda = q \sqrt{1 - \xi^2},$ $h(t) = k \left[1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right]$
	Консервативно е	$W(S) = \frac{k}{1 + T^2 S^2} =$ $= \frac{k}{1 + \frac{S^2}{q^2}}; \quad q = \frac{1}{T}$	 $h(t) = k(1 - \cos qt)$

1	2	3	4
И Н Т Е Г Р И Р У Ю Щ И Е	Интегрирующе е идеальное	$W(S) = \frac{k}{S}$	 <p>$h(t) = kt$</p>
	Интегрирующе е инерционное	$W(S) = \frac{k}{S(1+TS)}$	 <p>$h(t) = k[t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})]$</p>
Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И Р У Ю Щ И Е	Дифференциру ющее идеальное	$W(S) = kS$	 <p>$x_{\text{вых}} = t$</p>
	Дифференциру ющее инерционное	$W(S) = \frac{kS}{TS + 1}$	 <p>$x_{\text{вх}} = t$</p>

1	2	3	4
	Форсирующее 1-го порядка	$W(S)=k(\tau S+1)$	

Все звенья из табл.2.6 обладают следующим свойством: они не имеют корней с положительной вещественной частью как в числителе, так и в знаменателе. Звенья, обладающие таким свойством, называются **минимально-фазовыми**.

Кроме минимально-фазовых звеньев в системах управления встречаются и **особые звенья**. К их числу относятся:

1. **Неминимально-фазовые** звенья, передаточные функции (ПФ) которых дробно-рациональны и имеют нули с положительной вещественной частью, например, звенья с ПФ вида

$$W(S) = \frac{k \cdot (1 - ST_2)}{1 + ST_1}$$

2. **Неустойчивые звенья**, ПФ которых имеют полюсы с положительной вещественной частью, например

а) неустойчивое апериодическое звено 1-го порядка с ПФ вида

$$W(S) = \frac{k}{-1 + ST}$$

б) неустойчивое колебательное звено с ПФ вида $W(S) = \frac{k}{T^2 S^2 - 2\xi TS + 1}$;

в) звено чистого запаздывания $W(S) = k \cdot e^{-\tau S}$ с характеристикой, представленной на рис. 2.7.



Рис. 2.7

2.7. Частотные характеристики типовых динамических звеньев

Частотные характеристики получаются на основе информации о частотной передаточной функции звена $W(j\omega)$. Частотная передаточная функция (ЧПФ) получается из передаточной функции $W(S)$ заменой $S=j\omega$. ЧПФ – комплексная функция частоты, которая может быть представлена в двух формах:

1. Алгебраическая $W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$, где $U(\omega)$ – вещественная часть ЧПФ, $V(\omega)$ – мнимая часть ЧПФ.

2. Показательная $W(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, где $A(\omega)$ – модуль ЧПФ, $\varphi(\omega)$ – аргумент ЧПФ.

Известна следующая взаимосвязь этих двух форм записи ЧПФ:

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}, \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$

График функции $A(\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ – амплитудная ЧХ (АЧХ).

График функции $\varphi(\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$ – фазовая ЧХ (ФЧХ).

Геометрическое место точек комплексной плоскости, изображающее зависимость $U(\omega)$ и $V(\omega)$ при $0 \leq \omega \leq \infty$, называется амплитудно-фазо-частотной ЧХ (АФЧХ).

Для анализа систем на практике чаще используются логарифмические характеристики:

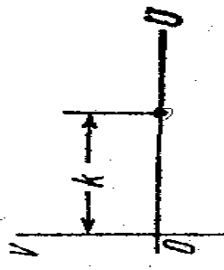
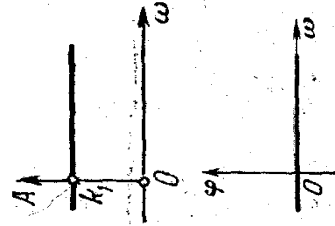
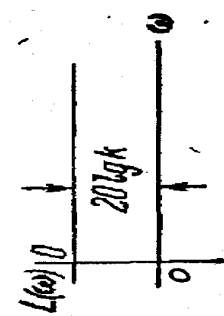
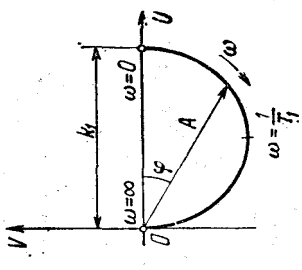
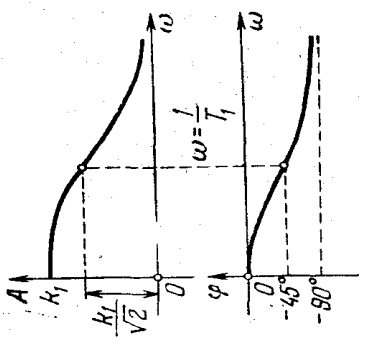
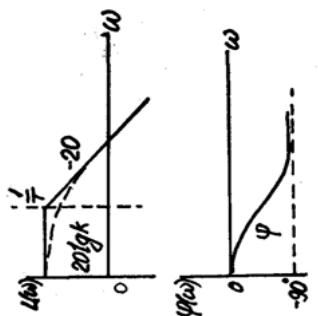
1. $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ – логарифмическая ЧХ;

2. $\varphi(\omega)=\operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ – фазовая ЧХ.

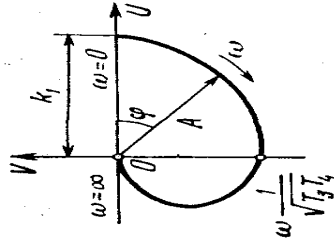
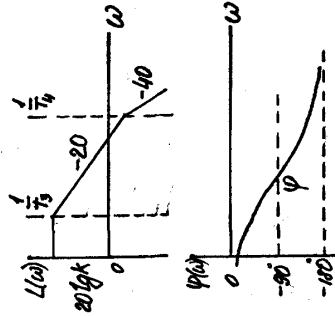
Частотные характеристики типовых звеньев приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

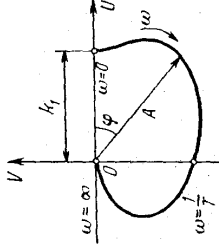
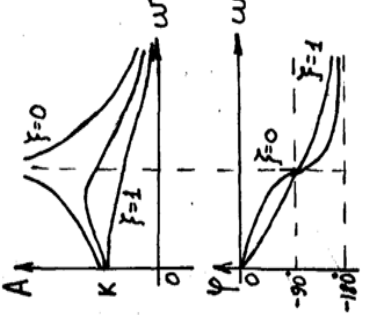
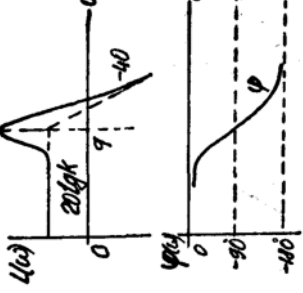
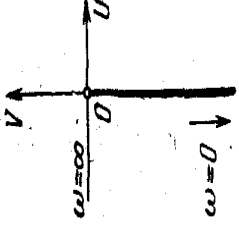
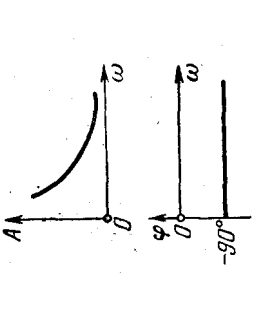
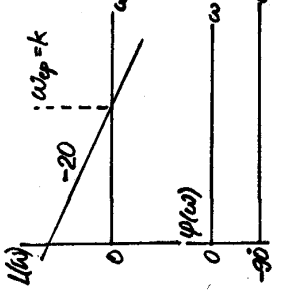
Частотные характеристики звеньев

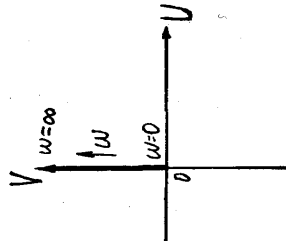
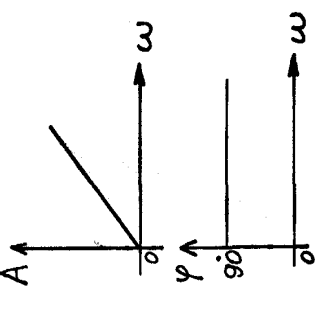
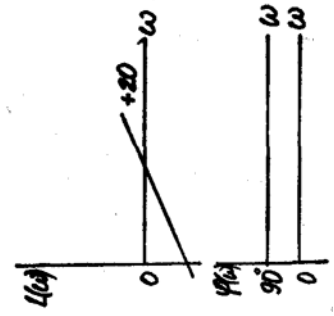
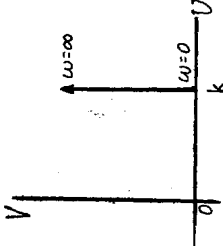
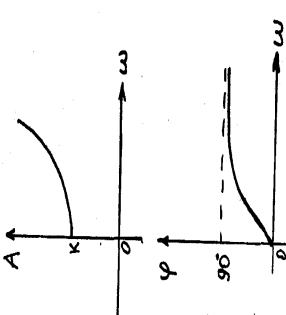
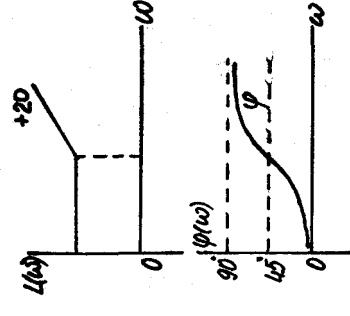
Тип звена и ЧПФ	Амплитудно-фазовая	Амплитудная, фазовая	Логарифмические	Выражения
<p>Идеальное усиительное</p> $W(j\omega) = k$				$U(\omega) = k,$ $V(\omega) = 0,$ $A(\omega) = k,$ $\varphi(\omega) = 0,$ $Lm(\omega) = 20lgk.$
<p>Апериодическое 1-го порядка</p> $W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}$				$U(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$ $V(\omega) = \frac{-k\omega\omega}{1 + \omega^2 T^2},$ $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$ $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T,$ $Lm(\omega) = 20lgk - 20lg\sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$

Продолжение табл. 2.7

Тип звена и ЧПФ	Амплитудно-фазовая	Амплитудная, фазовая	Логарифмические	Выражения
<p>Апериодическое 2-го порядка</p> $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T_1 - T_2^2 \omega^2}$ $= \frac{k}{(1 + jT_3\omega)(1 + jT_4\omega)}$ $T_{3,4} = \frac{T_1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}}{2}$ <p>$(T_1 > 2T_2; T_3 > T_4)$</p>			$U(\omega) = \frac{k(1 - \omega^2 T_2^2)}{1 + \omega^2(T_1^2 - 2T_2^2) + \omega^4 T_2^4}$ $V(\omega) = \frac{-k\omega_1}{1 + \omega^2(T_1^2 - 2T_2^2) + \omega^4 T_2^4}$ $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \cdot \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}$ $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega(T_3 + T_4)}{1 - \omega^2 T_3 T_4}$ $Lm(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}$	

Продолжение табл. 2.7

Тип звена и ЧПФ	Амплитудно-фазовая	Амплитудная, фазовая	Логарифмические	Выражения
<p>Колебательное устойчивое</p> $W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2 + j2\omega\zeta T}$ $= \frac{k_1}{1 - \frac{\omega^2}{q^2} + j\frac{2\zeta}{q}\omega}$ $q = \frac{1}{T}$				$U(\omega) = \frac{k(1 - \omega^2 T^2)}{1 + \omega^2 2T^2(2\zeta^2 - 1) + \omega^4 T^4},$ $V(\omega) = \frac{-2kT\zeta T}{1 + \omega^2 2T^2(2\zeta^2 - 1) + \omega^4 T^4},$ $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 2T^2(2\zeta^2 - 1) + \omega^4 T^4}},$ $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - \omega^2 T^2},$ $Lm(\omega) = 20\lg k -$ $-20\lg \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}.$
<p>Идеальное интегрирующее</p> $W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j\frac{k}{\omega}$				$U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -\frac{k}{\omega},$ $A(\omega) = \frac{k}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ,$ $Lm(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega.$

Тип звена и ЧПФ	Амплитудно-фазовая	Амплитудная, фазовая	Логарифмические	Выражения
<p>Идеальное дифференцирующее</p> $W(j\omega) = j\omega k$				$U(\omega) = 0,$ $V(\omega) = \omega k,$ $A(\omega) = \omega k,$ $\varphi(\omega) = +90^\circ,$ $Lm(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$
<p>Форсирующее 1-го порядка</p> $W(j\omega) = k(1 + j\omega\tau)$				$U(\omega) = k,$ $V(\omega) = \omega k \tau,$ $A(\omega) = k \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2},$ $\varphi(\omega) = \arctg \omega \tau,$ $Lm(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}.$

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Понятие устойчивости

Основы строгой теории устойчивости динамических систем разработаны академиком А. М. Ляпуновым в работе «Общая задача об устойчивости движения» (1882 г.).

Состояние равновесия линейной системы может быть устойчивым или неустойчивым.

Если после некоторого изменения задающего воздействия система в результате затухающего переходного процесса возвращается в прежнее состояние равновесия, то это состояние равновесия называют устойчивым, а систему – *устойчивой* (см. рис. 3.1, а).

Если после незначительного изменения задающего воздействия система не стремится в прежнее состояние равновесия, а в ней возникают незатухающие колебания управляемой величины, то положение равновесия называют неустойчивым, а систему – *неустойчивой* (см. рис. 3.1, б).



Рис. 3.1. Системы «поверхность – шар»: а – устойчивая; б – неустойчивая.

Устойчивость – свойство системы возвращаться в прежнее состояние равновесия после вывода её из этого состояния и прекращения изменения задающего и возмущающего воздействий.

Типовые воздействия, используемые для исследования устойчивости систем приведены в табл.3.1.

Таблица 3.1

Название	Сигнал	Реакция системы
	Математическое описание	
1. Единичный ступенчатый сигнал	$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	Переходная характеристика $h(t)$
2. Единичный импульсный сигнал	$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$	Весовая функция $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$
3. Периодический сигнал	$X = X_0 \sin \omega t$	Частотные характеристики

3.2. Анализ устойчивости системы по корням характеристического уравнения

Пусть передаточная функция замкнутой системы n -го порядка имеет вид:

$$\Phi(S) = \frac{X_{\text{вых}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n. \quad (3.1)$$

Характеристическое уравнение системы формально получается из знаменателя ПФ замкнутой системы путем приравнивания его к нулю при одновременной замене $S = \gamma$.

Для системы с ПФ вида (3.1.) характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \gamma^n + a_1 \gamma^{n-1} + \dots + a_{n-1} \gamma + a_n = 0. \quad (3.2)$$

Решив (3.2) получим n корней характеристического уравнения. Значения корней характеристического уравнения не зависят ни от вида задающего воздействия, ни от начальных условий, а определяются только соотношением коэффициентов a_0, \dots, a_n уравнения (3.2), то есть параметрами самой системы.

На рис. 3.2 показаны виды корней характеристического уравнения.

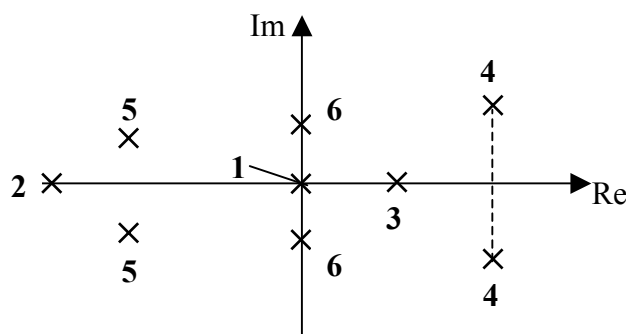
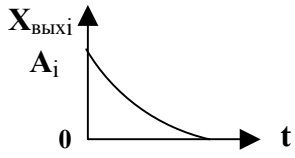
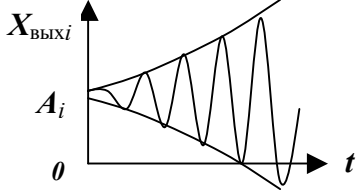
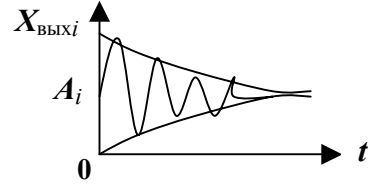
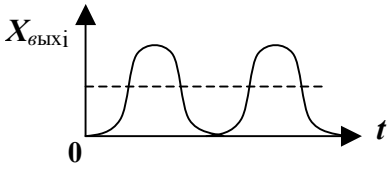


Рис. 3.2. Комплексная плоскость корней характеристического уравнения

Характер переходного процесса определяется видом корней характеристического уравнения системы (см. табл. 3.2).

Таблица 3.2

№ п/п	Вид корня ХУ	$X_{\text{вых}_i}$	График $X_{\text{вых}_i}$
1	$\gamma_i = 0$	$X_{\text{вых}_i} = A_i$	
2	$\gamma_i = \alpha,$ $\alpha > 0$	$X_{\text{вых}_i} = A_i e^{\gamma_i t} = A_i e^{\alpha t}$	

№ п/п	Вид корня ХУ		$X_{вых_i}$	График $X_{вых_i}$
3	вещественные	$\gamma_i = \alpha,$ $\alpha < 0$	$X_{вых_i} = A_i e^{\gamma_i t} = A_i e^{-\alpha t}$	
4		$\gamma_i = \alpha \pm j\beta,$ $\alpha > 0$	$X_{вых_i} = A_i e^{\alpha \cdot t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t)$	
5		$\gamma_i = -\alpha \pm j\beta,$ $\alpha > 0$	$X_{вых_i} = A_i e^{-\alpha \cdot t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t)$	
6		$\gamma_i = \pm j\beta$	$X_{вых_i} = A_i (\cos \beta t \pm j \sin \beta t)$	

Правило суждения об устойчивости по корням характеристического уравнения приведено в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Корни характеристического уравнения		Устойчивость
Характер корней	Номер	
Вещественные части всех корней характеристического уравнения системы отрицательны	2, 5	Система устойчива
Вещественная часть хотя бы одного корня характеристического уравнения положительна	3, 4	Система неустойчива
Хотя бы один корень характеристического уравнения вещественный нулевой или комплексный с нулевой вещественной частью, а вещественные части всех остальных корней характеристического уравнения отрицательны	1	Система на границе апериодической устойчивости.
	6	Система на границе колебательной устойчивости.

3.3. Критерии устойчивости

Исследование устойчивости решением характеристического уравнения называют прямым методом. Однако не всегда легко найти корни характеристического уравнения, поэтому для анализа устойчивости системы часто используют критерии устойчивости.

Критерий устойчивости – это правило, позволяющее оценить устойчивость системы, не решая её характеристическое уравнение.

Выделяют две группы критериев устойчивости:

- 1) алгебраические (критерий Гурвица, критерий Рауса);
- 2) частотные (критерий Михайлова, критерий Найквиста).

Алгебраические критерии устойчивости состоят из двух условий устойчивости: необходимого и достаточного (табл.3.4).

Частотные критерии устойчивости основаны на анализе частотных характеристик (ЧХ) систем. Это их преимущество перед алгебраическими критериями, поскольку ЧХ системы можно получить экспериментально.

1. Критерий устойчивости Михайлова

Критерий предполагает построение годографа Михайлова.

Годограф Михайлова – это кривая, которую описывает конец вектора $D(j\omega)$ на комплексной плоскости при $0 < \omega < \infty$. Вектор $D(j\omega)$ получается из характеристического полинома замкнутой системы при подстановке $s = j\omega$.

Для системы n -го порядка, характеристический полином которой имеет вид

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n,$$

функция Михайлова запишется в виде

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + jY(\omega). \quad (3.3)$$

Для построения годографа Михайлова на основании (3.3) заполняется табл.3.5, где каждой частоте соответствуют определенные значения вещественной и мнимой частей функции Михайлова.

Таблица 3.5

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
0	X_0	Y_0
ω_1	0	Y_1
ω_2	X_2	0
∞	X_∞	Y_∞

Точки из таблицы отмечаются на комплексной плоскости и соединяются в порядке возрастания частоты кривой, называемой годографом Михайлова.

Направление увеличения частоты показывается на годографе стрелкой (см. рис.3.3).

Таблица 3.4

Критерий	Необходимое условие устойчивости	Достаточное условие устойчивости системы	Правило составления определителей	Применимость
Гурвица	Система устойчива только в том случае, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны	Для устойчивости достаточно, чтобы все n определителей Гурвица были положительны	<p>Главный определитель Гурвица:</p> $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix},$ <p>Определители Гурвица низших порядков получаются из главного определителя, как его диагональные миноры</p>	Для систем не выше 4-го порядка
Рауса	Система устойчива только в том случае, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны	Для устойчивости системы достаточно, чтобы были положительны все элементы 1-ого столбца матрицы Рауса	$b_6 = a_1 a_7, \quad b_5 = a_2 a_6, \quad b_4 = a_3 a_5, \quad b_3 = a_4 a_6, \quad b_2 = a_1 a_3, \quad b_1 = a_0 a_2, \quad b_0 = a_1 a_5 - a_0 a_4,$ <p>Нижняя строка матрицы заполняется коэффициентами характеристического уравнения с четными индексами, начиная с элемента a_0. Предпоследняя строка заполняется коэффициентами характеристического уравнения с нечетными индексами, остальные коэффициенты – расчетные</p>	Для систем высоких порядков

Формулировка критерия Михайлова: для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова начинался на вещественной положительной полуоси и при увеличении частоты от 0 до ∞ обходил в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в нуль (рис. 3.3).

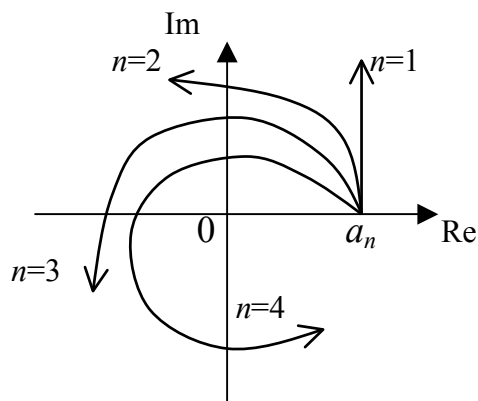


Рис. 3.3. Годографы Михайлова устойчивых систем

Угол поворота годографа Михайлова определяется выражением

$$\Psi = \pi n/2 - l\pi,$$

где n – порядок системы; l – число полюсов с положительной вещественной частью.

Если система находится на границе устойчивости, то годограф Михайлова проходит через начало координат таким образом, что после его небольшой деформации критерий выполняется (рис. 3.4).

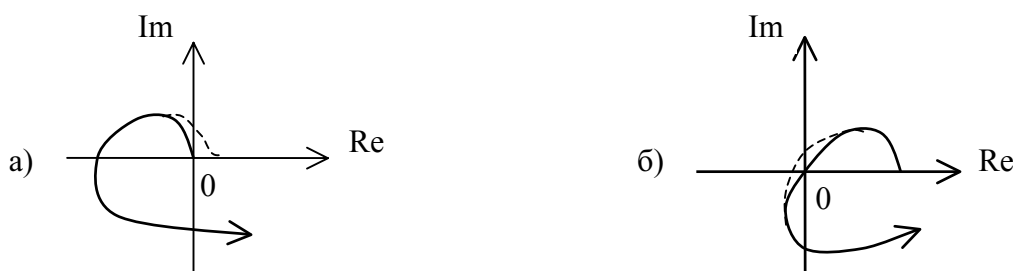


Рис. 3.4. Годографы Михайлова систем 4-го порядка, находящихся на границе устойчивости: а – аperiodической; б – колебательной

2 Критерий устойчивости Найквиста

Этот критерий дает возможность оценить устойчивость замкнутой системы по АФЧХ ее разомкнутой цепи (табл. 3.6, рис. 3.5, рис. 3.6). Предварительно необходимо оценить устойчивость разомкнутой системы, если она неустойчивая – выяснить число правых корней ее характеристического уравнения.

Состояние разомкнутой системы	Формулировки критерия Найквиста
Разомкнутая система устойчива	Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы (годограф Найквиста) при $0 < \omega < \infty$ не охватывала особую точку с координатами $(-1; j0)$
Разомкнутая система на границе устойчивости	Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста, дополненный на участке разрыва дугой бесконечно большого радиуса, не охватывал особую точку $(-1; j0)$
Разомкнутая система не устойчива (в характеристическом уравнении $-l$ корней с положительной вещественной частью)	Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при $0 < \omega < \infty$ годограф Найквиста охватывал особую точку с координатами $(-1; j0)$ $l/2$ раз в положительном направлении (против часовой стрелки)

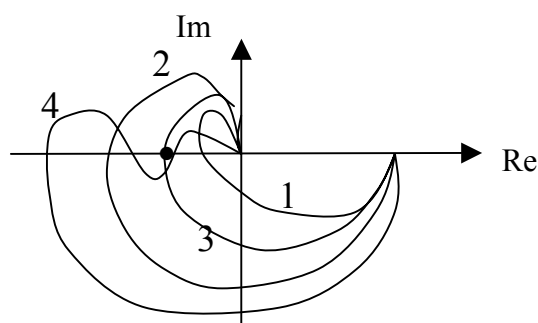


Рис. 3.5. Годографы Найквиста:

1 – устойчивая замкнутая система; 2 – не устойчивая система;
3 – система на границе устойчивости; 4 – условно устойчивая система

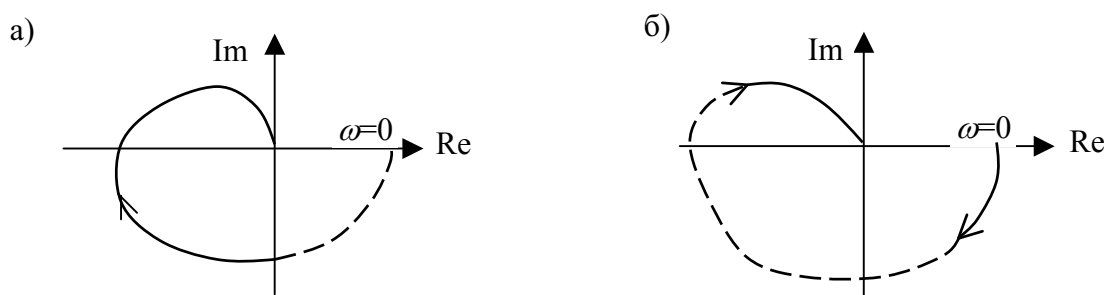


Рис. 3.6. Годографы Найквиста систем, находящихся:

а) на аperiodической границе устойчивости;
б) на колебательной границе устойчивости.

При сложной форме годографа Найквиста удобнее применять другую формулировку критерия, которая использует *правило переходов*. Переход – это пересечение годографом Найквиста вещественной оси на участке $(-\infty; -1)$, причем пересечение оси сверху вниз считают положительным, а снизу вверх –

отрицательным переходом (рис. 3.7). Годограф Найквиста может начинаться на указанном отрезке при $\omega = 0$ или заканчиваться при $\omega = \infty$. Тогда считается, что он совершает пол-перехода.

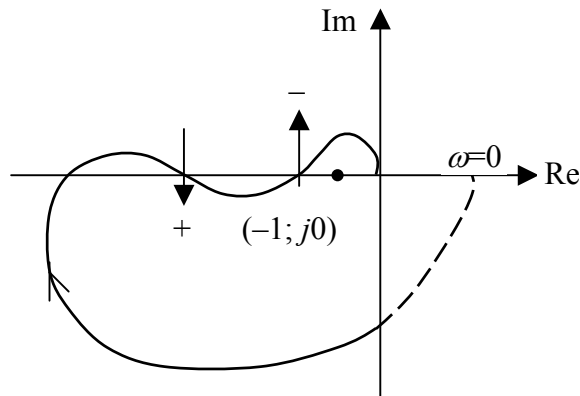


Рис. 3.7. Переходы АФЧХ через отрезок вещественной оси от -1 до $-\infty$

Формулировка правила переходов: для того, чтобы система устойчивая в разомкнутом состоянии была устойчива и после замыкания обратной связи, необходимо и достаточно, чтобы число положительных и отрицательных переходов было одинаково. Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы разность между числом положительных и отрицательных переходов должна быть равна $l/2$, где l – число правых полюсов разомкнутой системы.

Правило переходов можно сформулировать применительно и к логарифмическим частотным характеристикам: переход в логарифмических координатах – это точка пересечения фазовой характеристикой уровня $-\pi$ в диапазоне частот, где $L(\omega) > 0$ (см. рис. 3.8). Правило суждения об устойчивости системы остаётся прежним.

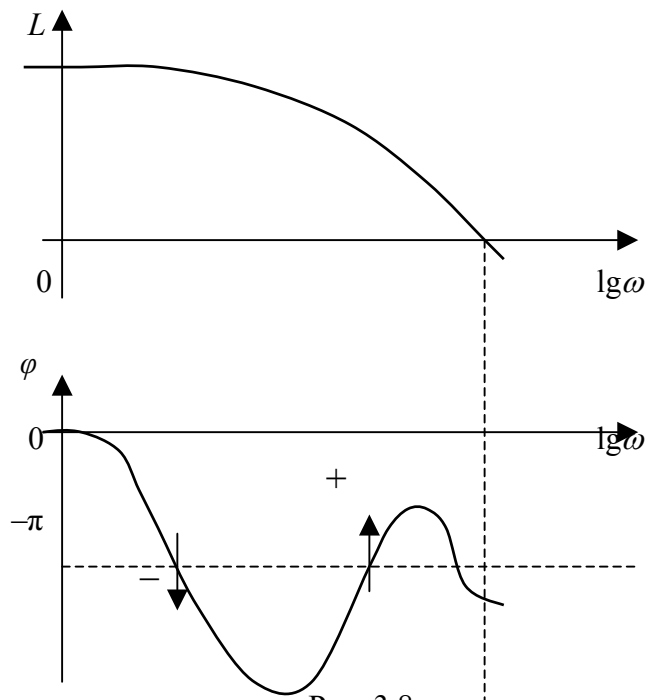


Рис. 3.8.

3.4 Запасы устойчивости системы

Для нормального функционирования любая система должна быть не только устойчивой ($\omega_{cp} > \omega_{кр}$), но и иметь достаточный запас устойчивости. Это связано с тем, что:

- 1) параметры элементов системы определяют с некоторой погрешностью;
- 2) параметры однотипных элементов имеют технологический разброс;
- 3) в процессе эксплуатации системы параметры элементов могут изменяться в связи с их старением и износом.

По этим причинам устойчивая по расчёту система в действительности может оказаться неустойчивой.

Для количественной оценки запасов устойчивости по частотным характеристикам используют два показателя (см. рис. 3.9):

- 1) запас устойчивости по амплитуде $L_{зап} = -L(\omega_{кр})$;
- 2) запас устойчивости по фазе $\varphi_{зап} = 180^\circ + \varphi(\omega_{cp})$.

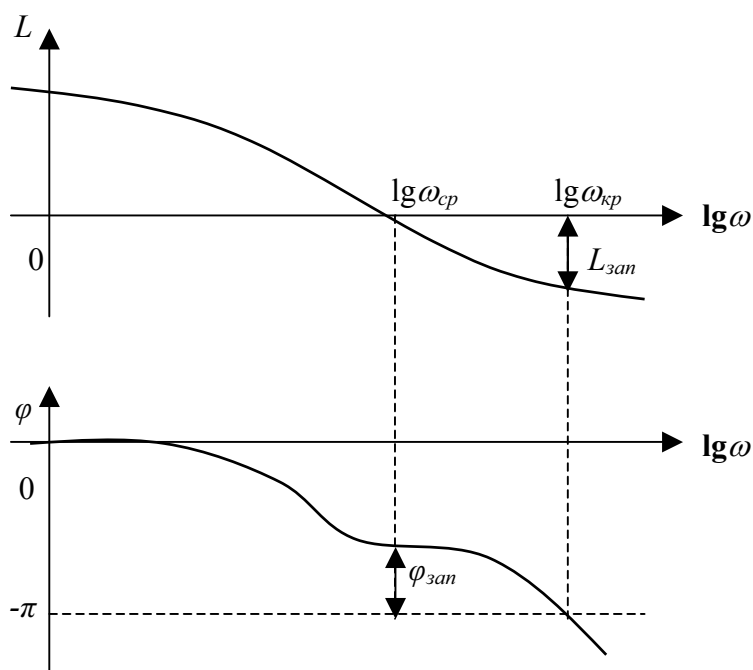


Рис. 3.9. Определение запасов устойчивости системы по ЛЧХ системы

Работоспособная система характеризуется $L_{зап} = (6 \dots 20)$ дБ, $\varphi_{зап} = (30 \dots 60)^\circ$.

Запасы устойчивости можно определить и по АФЧХ разомкнутой системы (см. рис. 3.10), причем известна следующая взаимосвязь $L_{зап}$ и $h_{зап}$:

$$L_{зап} = 20 \lg \frac{1}{h_{зап}}.$$

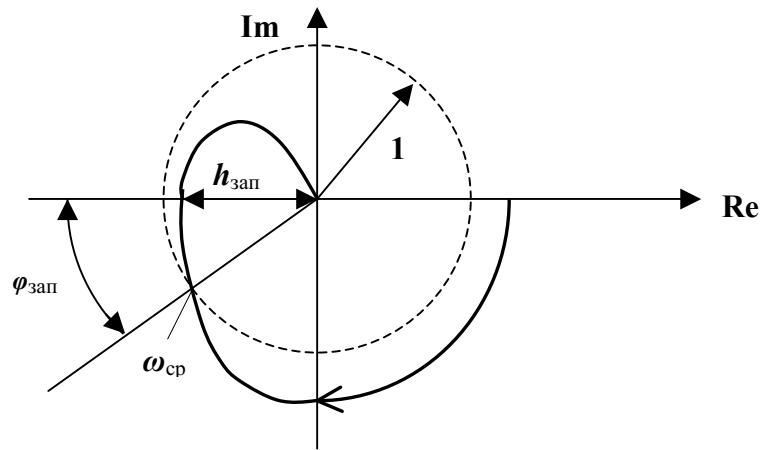


Рис. 3.10. Определение запасов устойчивости системы по АФЧХ системы

3.5 Структурная неустойчивость

Систему называют *структурно неустойчивой*, если её нельзя сделать устойчивой только изменением параметров, а необходимо изменение структуры системы, т. е. введение в систему новых звеньев или связей, или изменение уже имеющихся связей.

Случаи структурной неустойчивости:

- 1) система содержит два и более неустойчивых апериодических звена;
- 2) система содержит неустойчивые колебательные звенья или консервативные звенья в количестве r штук, при условии, что порядок системы $n \leq 4r$ и т.д.

Одноконтурная система структурно неустойчива, если нарушается неравенство вида $m \geq l + v - 1$, где l – число правых корней характеристического уравнения, v – число нулевых корней характеристического уравнения, а также одно из неравенств, представленных в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Неравенства для проверки структурной неустойчивости

F	$m=0$	$m>0$, чётно	$m>0$, нечётно
Чётно	$n+m>4r$	$n+m>4r-1$	$n+m>4r-2$
Нечётно	$n+m>4r$	$n+m>4r$	$n+m>4r+1$

В таблице f – число комплексных корней характеристического уравнения с нулевой или положительной вещественной частью; m – порядок числителя передаточной функции системы; n – порядок знаменателя передаточной функции системы; r – целая часть дроби $f/2$.

3.6 Область устойчивости системы

Область устойчивости – это геометрическое место точек в пространстве параметров системы, для которых система сохраняет устойчивость (рис. 3.11).

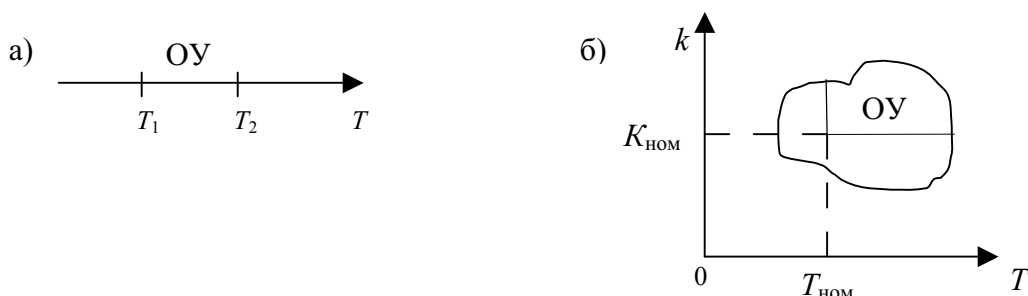


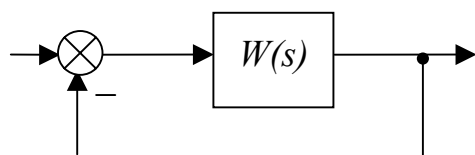
Рис. 3.11. Области устойчивости системы:

- а) – в плоскости одного параметра;
- б) – плоскости двух параметров.

1. Построение области устойчивости по критерию Гурвица

Построение области устойчивости с использованием критерия Гурвица использует следующее условие нахождения системы на границе устойчивости: $\Delta_n(T_1, \xi_1, k_1, \dots) = 0$. В последнем условии те параметры, в плоскости которых строим область устойчивости, оставляют как переменные, а остальные заменяют на их числовые значения.

Пример: построить область устойчивости системы в плоскости параметров k и T_1 .



$$W(S) = \frac{k}{S(1 + ST_1)(1 + ST_2)}$$

$T_1 = 0,1c ; T_2 = 0,02c ; k = 10$

Решение: передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(S) = \frac{W(S)}{1 + W(S)} = \frac{\frac{k}{S(1 + ST_1)(1 + ST_2)}}{1 + \frac{k}{S(1 + ST_1)(1 + ST_2)}} = \frac{k}{S(1 + ST_1)(1 + ST_2) + k}$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы $S(1 + ST_1)(1 + ST_2) + k = 0$ или $S^3T_1T_2 + S^2(T_1 + T_2) + S + k = 0$.

По критерию Гурвица условие устойчивости системы запишется так:

$(T_1 + T_2) > kT_1T_2$, после подстановки значений параметров получим $T_1 + 0,02 > 0,02 kT_1$. Следовательно, $k < 50 + \frac{1}{T_1}$. Тогда уравнение границы области устойчивости системы имеет вид $k = 50 + \frac{1}{T_1}$. Область устойчивости системы в плоскости параметров k и T_1 представлена на рис. 3.12.

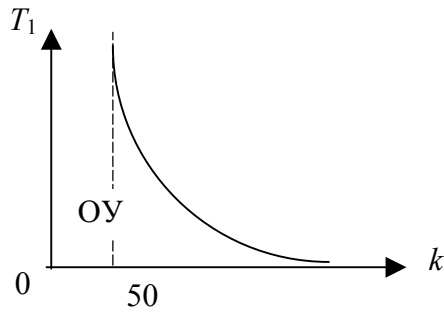


Рис. 3.12

2. Метод D-разбиений

Суть метода заключается в разделении n – мерного пространства параметров системы на ряд областей, каждой из которых соответствует определенное число правых корней характеристического уравнения системы. Область, которой соответствует нуль правых корней – это область устойчивости системы.

1. Метод D-разбиений в плоскости одного параметра

Пусть необходимо выяснить, в каких пределах можно изменять параметр μ , не нарушая устойчивости системы. Пусть μ входит в характеристическое уравнение системы линейно

$$\mu P(S) + Q(S) = 0, \quad (3.4)$$

где $P(S)$ и $Q(S)$ – полиномы.

Из (3.4) следует, что $\mu = \frac{Q(S)}{P(S)}$. После подстановки $S=j\omega$ получим $\mu = U(\omega) + jV(\omega)$. Затем следует построить кривую $\mu(\omega)$ (см. рис. 3.13) для $0 < \omega < \infty$ и отобразить ее зеркально относительно оси U . Это кривая D-разбиения. Кривая D-разбиения штрихуется слева при движении изображающей точки по кривой в направлении увеличения частоты. Кривая D-разбиения разбивает плоскость параметра $\mu(\omega)$ на области с разной интенсивностью штриховки (см. рис. 3.13).

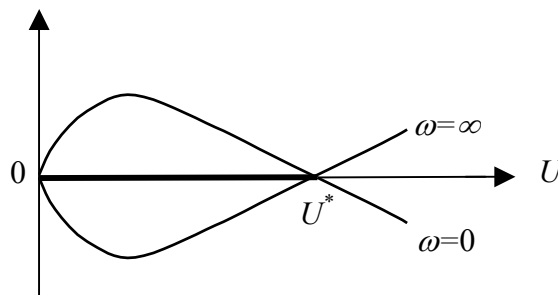


Рис. 3.13. Кривая D-разбиения в плоскости параметра μ

Отрезок оси U , принадлежащий области с меньшей интенсивностью штриховки – это претендент на область устойчивости. Для проверки, является ли область-претендент действительной областью устойчивости системы, необходимо взять любую точку этого отрезка, координату данной точки присвоить параметру μ . Затем, применяя любой критерий устойчивости, оценить

устойчивость системы с таким значением μ . Если система устойчива для одного значения μ из области-претендента, то область-претендент является действительной областью устойчивости системы.

2. Метод D-разбиений в плоскости двух параметров

Пусть необходимо выявить влияние двух параметров μ , η на устойчивость системы. Ограничение на использование метода: параметры μ и η должны входить в характеристическое уравнение системы линейно

$$\mu P(s) + \eta Q(s) + R(s) = 0. \quad (3.5)$$

Заменой $s=j\omega$ перейдем от уравнения (3.5) к системе уравнений

$$\begin{cases} \mu P_1(\omega) + \eta Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0, \\ \mu P_2(\omega) + \eta Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mu P_1(\omega) + \eta Q_1(\omega) = -R_1(\omega), \\ \mu P_2(\omega) + \eta Q_2(\omega) = -R_2(\omega). \end{cases} \quad (3.6)$$

Решим (3.6) методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}; \quad \Delta_\mu = \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}; \quad \Delta_\eta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \mu(\omega) = \Delta_\mu(\omega) / \Delta(\omega); \quad \eta(\omega) = \Delta_\eta(\omega) / \Delta(\omega). \quad (3.7)$$

Задаваясь значениями ω из диапазона $0 \dots \infty$ по выражениям (3.7) можно построить кривую D-разбиения в плоскости параметров μ, η . Кривая D-разбиения при возрастании ω от 0 до ∞ штрихуется слева, если $\Delta > 0$ и справа, если $\Delta < 0$. Так как μ и η – четные функции частоты, то кривая D-разбиения для $-\infty < \omega < 0$ совпадает с кривой D-разбиения для $0 < \omega < +\infty$, т.е. кривая D-разбиения обходится дважды. Причем при $\omega = 0$ меняется знак определителя Δ , поэтому кривую оба раза штрихуют с одной стороны.

Кроме кривой D-разбиения необходимо построить особые прямые по уравнениям $a_0 = 0$, $a_n = 0$, где a_i – коэффициенты характеристического уравнения системы.

Правила штриховки особых прямых:

1. Если особая прямая и кривая D-разбиения сближаются асимптотически, то штриховка особой прямой однократная, направленная к заштрихованной стороне кривой D-разбиения (рис. 3.14 а).

2. Если особая прямая имеет общую точку с кривой D-разбиения, но не пересекает ее, то штриховка особой прямой однократная и около общей точки направлена к заштрихованной стороне кривой D-разбиения. В других точках пересечения с кривой D-разбиения штриховку особой прямой не изменяют, т.к. знак Δ в этих точках не меняется (рис. 3.14 б).

3. Если особая прямая пересекает кривую D-разбиения в двух точках, то штриховка особой прямой двойная и направлена к штриховке кривой D-разбиения около той точки пересечения, где определитель Δ меняет знак. Во второй точке,

где определитель не меняет своего знака, штриховку особой прямой не изменяют (рис. 3.14 в).

4. Если особая прямая пересекает кривую D-разбиения, но в точке пересечения определитель Δ не меняет знак, то особую прямую не штрихуют, т.е. она не участвует в D-разбиении.

Когда построены кривая D-разбиения и особые прямые, нанесена штриховка, необходимо указать область с наименьшей интенсивностью штриховки – это область-претендент на область устойчивости.

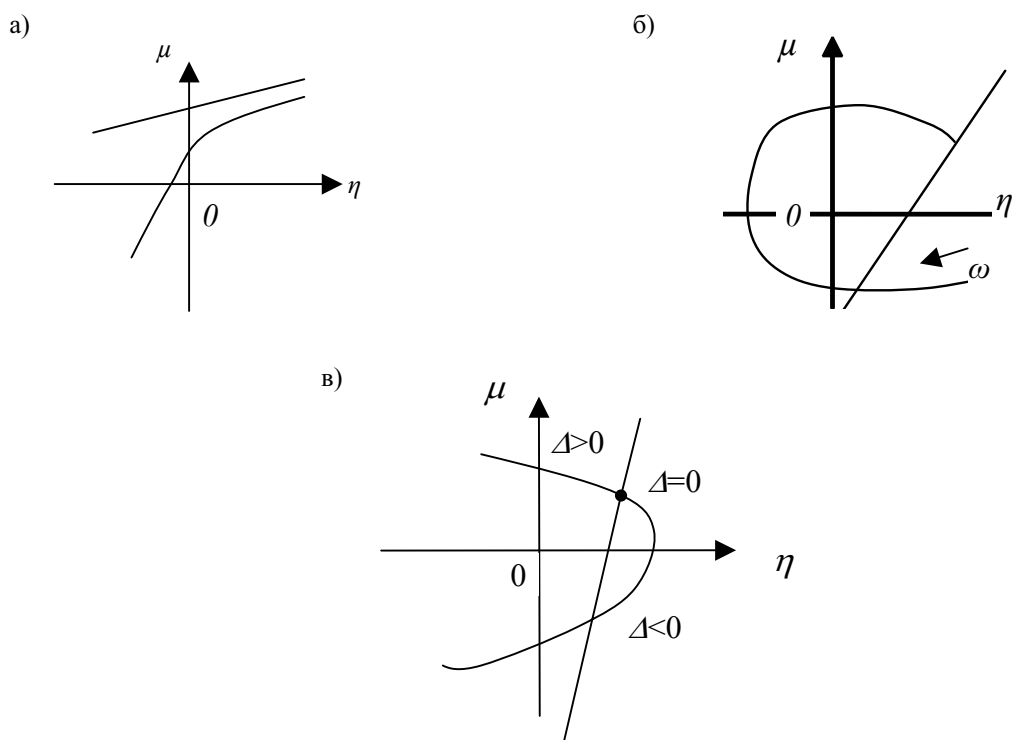


Рис. 3.14

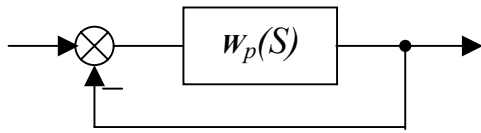
Чтобы выяснить, является ли область-претендент действительной областью устойчивости системы, необходимо взять любую точку области-претендента, значения координат этой точки μ и η подставить в характеристическое уравнение системы и оценить устойчивость системы по любому критерию устойчивости. Если для одной точки области-претендента система устойчива, то претендент – действительная область устойчивости системы.

3.7 Предельный коэффициент усиления системы

Коэффициент разомкнутой системы k_p входит в характеристическое уравнение замкнутой системы, и поэтому влияет на её устойчивость. Значение k_p , при котором система находится на границе устойчивости называется предельным коэффициентом усиления разомкнутой системы.

Предельный коэффициент усиления можно найти, используя критерий Гурвица. Для этого необходимо приравнять определитель n-ого порядка к нулю и, зная значения остальных параметров системы, найти из этого условия значение $k_{пр}$.

Рассмотрим методику расчёта предельного коэффициента усиления на **примере**:



$$W_p(s) = \frac{k}{S(1+ST_1)(1+ST_2)},$$

$$k=100; T_1=0,1; T_2=0,2.$$

$$\Phi(S) = \frac{k}{S(1+T_1S)(1+T_2S)+k} = \frac{k}{T_1T_2S^4 + (T_1+T_2)S^2 + S + k}.$$

Характеристическое уравнение системы $T_1T_2S^3 + (T_1+T_2)S^2 + S + k = 0$.

Условие устойчивости по критерию Гурвица: $a_1a_2 > a_0a_3$, т.е. $T_1+T_2 > kT_1T_2$, после подстановки значений параметров получаем: $0,3 > 2$ – неверно. Следовательно, рассматриваемая система неустойчива.

Условие нахождения системы на границе устойчивости $T_1+T_2 = kT_1T_2$. Отсюда $k_{пр} = (T_1+T_2)/T_1T_2 = 15$, т.е. при $k < 15$ система будет устойчива.

4. КАЧЕСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Система управления должна быть не только устойчивой, но и обладать определенным качеством.

Дифференциальное уравнение линейной системы управления в операторной форме имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) g(t), \quad (4.1)$$

где $y(t)$ – регулируемая величина;

$g(t)$ – входное (задающее) воздействие;

$a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ – постоянные коэффициенты.

Решение уравнения (4.1) при произвольном входном воздействии $g(t)$ в общем случае имеет вид:

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{вын}(t).$$

Информация о величинах $y_{св}(t)$ и $y_{вын}(t)$ сведена в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Название	Свободная составляющая, $y_{св}(t)$	Вынужденная составляющая, $y_{вын}(t)$
Определяется	Лево́й частью дифференциального уравнения $a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$	Право́й частью дифференциального уравнения $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-i} y}{dt^{n-i}} = g(t)$
Режим с течением времени	Переходный процесс	Установившийся режим
Показатели качества	Прямые (σ, t_p), косвенные (M)	Точность: статическая ошибка $\varepsilon_{уст}$
Метод определения показателей	По переходной характеристике	По ПФ замкнутой системы по ошибке

Поведение системы рассматривают при следующих типовых воздействиях:

- 1) единичная функция $1(t)$ (рис. 4.1 а);
- 2) единичная ступенчатая функция $\delta(t)$ (рис. 4.1 б);
- 3) гармоническое воздействие $A \sin(\omega t + \varphi)$ с единичной амплитудой ($A=1$) (рис. 4.1 в).

Реакция системы на воздействие типа $1(t)$ называется переходной функцией $h(t)$, а реакция системы на воздействие типа $\delta(t)$ называется весовой функцией $\omega(t)$.

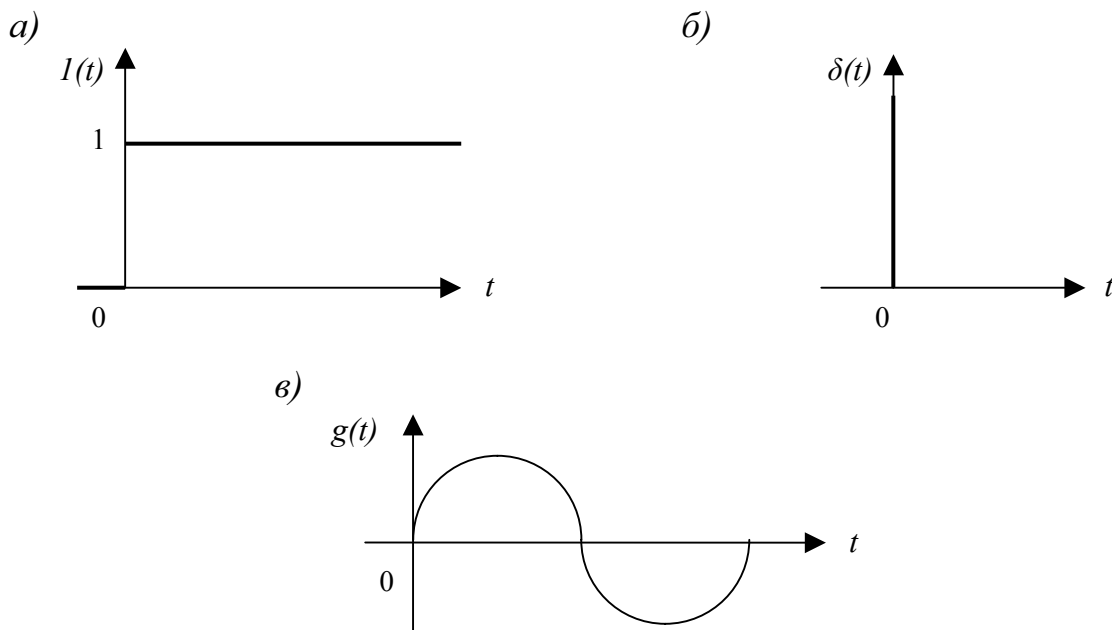


Рис. 4.1

4.1. Прямые показатели качества

Прямые показатели качества определяются непосредственно по переходной характеристике (рис. 4.2). Виды и способы определения прямых показателей качества приведены в табл. 4.2.

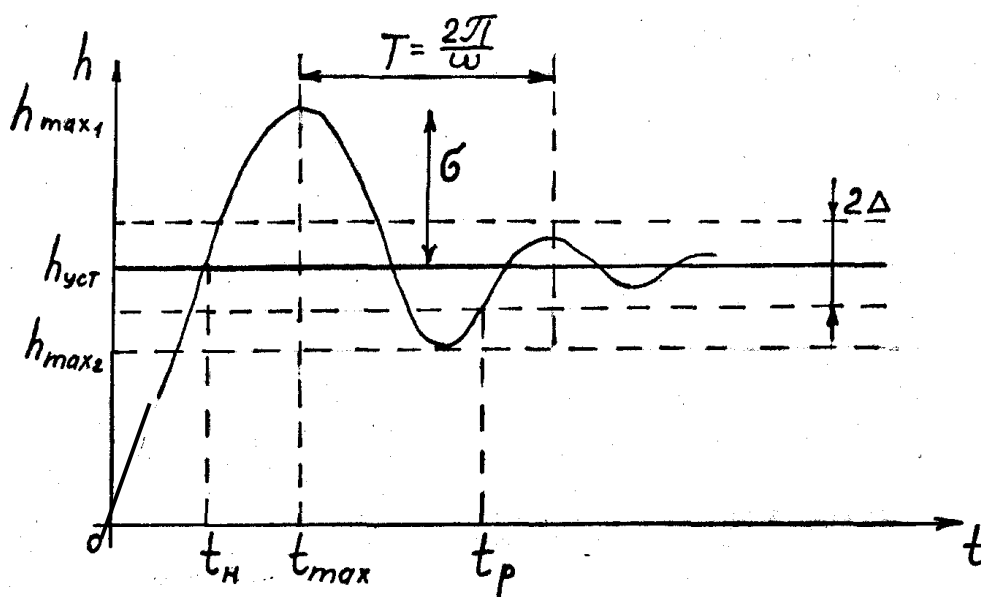


Рис. 4.2

Вид	Способ определения
1. t_p – время регулирования	Минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью
2. σ – перерегулирование	Максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения, выраженное в процентном отношении, к установившемуся значению, то есть $\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%.$ (10...30)% – допустимый диапазон σ
3. n – число колебаний	Число максимумов переходной характеристики за время регулирования Чаще всего допускается 1–2 колебания, иногда допустимы 3–4 колебания. В ряде случаев колебания в системе недопустимы
4. ω – частота колебаний	$\omega = \frac{2\pi}{T}, T – \text{период колебаний.}$ Определяется для колебательных процессов
5. t_{\max} – время достижения первого максимума	Абсцисса максимального значения $h_{\max 1}$
6. t_n – время нарастания ПП	Это абсцисса первой точки пересечения кривой ПП с уровнем установившегося значения
7. χ – декремент затухания	$\chi = \frac{ h_{\max 1} - h_{\text{уст}} }{ h_{\max 2} - h_{\text{уст}} }$

- По величине σ выделяют следующие типы переходных процессов (рис. 4.3):
- 1 – колебательный процесс;
 - 2 – монотонный переходный процесс ($dh/dt \geq 0$);
 - 3 – монотонный переходный процесс (dh/dt меняет знак).

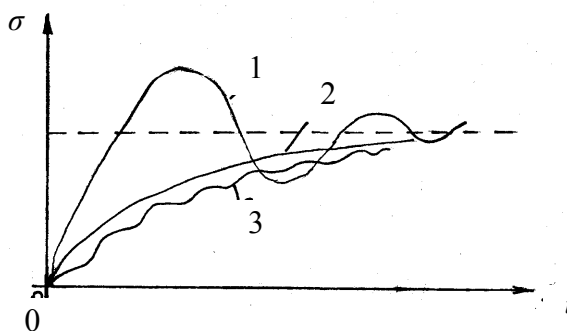


Рис. 4.3

4.2. Косвенные показатели качества

Косвенные показатели позволяют судить о качестве переходного процесса косвенным образом (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Название косвенного показателя	Способ определения
Частотные	<p>Оценки величин σ и t_p по частотным характеристикам, в частности по вещественной частотной характеристике (ВЧХ) замкнутой системы $P(\omega) = \text{Re}[\Phi(j\omega)]$.</p> <p>Это возможно в силу наличия следующей взаимосвязи переходной характеристики и ВЧХ замкнутой системы</p> $h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} dt$
Интегральные	Такие оценки, которые позволяют одним числом оценить величины σ и t_p
Корневые	Оценки σ и t_p , которые основываются на анализе расположения нулей и полюсов ПФ замкнутой системы

Способы определения частотных косвенных показателей качества приведены в табл. 4.4.

Способы определения интегральных косвенных показателей качества приведены в табл. 4.5.

Способы определения корневых косвенных показателей качества приведены в табл. 4.6.

Влияние расположения нулей и полюсов ПФ на переходную характеристику:

1) близко расположенные полюс и ноль взаимно компенсируются, их расположение считается близким при выполнении неравенства:

$$|\lambda_j - \gamma_i| \leq 0,1 |\lambda_j| \approx 0,1 |\gamma_i|, \quad \lambda_j - \text{полюс ПФ}, \quad \gamma_i - \text{ноль ПФ};$$

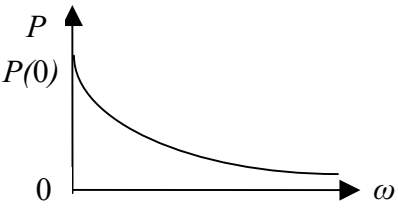
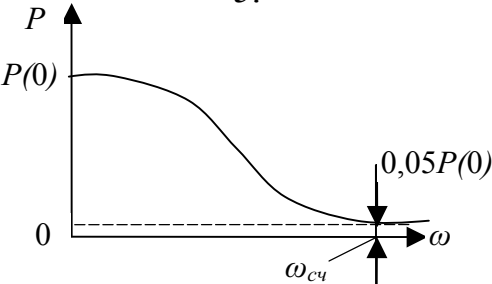
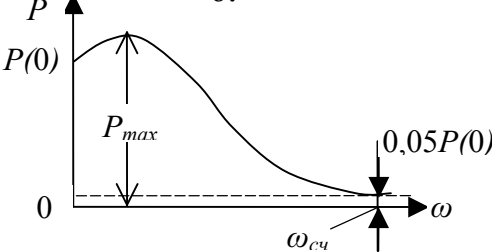
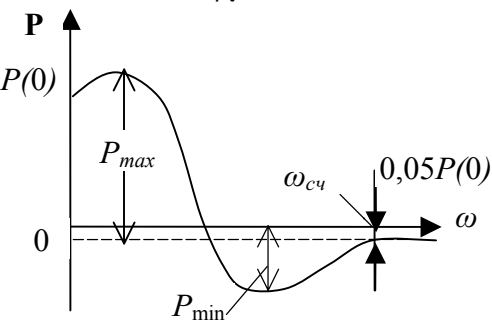
2) чем больше модуль вещественного полюса, тем быстрее уменьшается амплитуда колебаний составляющей и быстрее происходит приближение к апериодической составляющей, создаваемой полюсами;

3) время регулирования ПП зависит в основном от абсолютного значения вещественной части доминирующих полюсов или полюса, если ближайшими является комплексно-сопряженный или вещественный корень на плоскости корней;

4) перерегулирование зависит от отношения мнимой части доминирующих комплексных полюсов к их вещественной части;

5) близкие к началу координат нули, если они не компенсируются полюсами и удаленные от начала координат, но не доминирующие полюса, увеличивают время регулирования и перерегулирования.

Таблица 4.4

Частотные оценки качества	Способ определения
1. $h_{уст}$ – установившееся значение переходной функции	$h_{уст} = h(\infty) = P$
2. h_0 – начальное значение переходной характеристики	$h_0 = h(0) = P(\infty)$
3. $\omega=0$ – аperiodическая граница устойчивости; $\omega=\omega^*$ – колебательная граница устойчивости	Если вещественная частотная характеристика терпит разрыв, то система находится на границе устойчивости
4. 	Если $P(\omega)$ – непрерывная положительная и имеет вид вогнутой кривой, т.е. $dP/d\omega < 0$ и при этом монотонно убывает по абсолютному значению, то ПП будет монотонным
5. 	Если $P(\omega)$ – положительная невозрастающая функция, то $\sigma \leq 18\%$
6. 	$\sigma < \frac{1.18P_{max} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%,$ если $P(\omega)$ положительная функция и имеет максимум
7. 	$\sigma < \frac{1.18P_{max} + 0.277P_{min} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%,$ если $P(\omega)$ имеет положительный максимум и отрицательный минимум

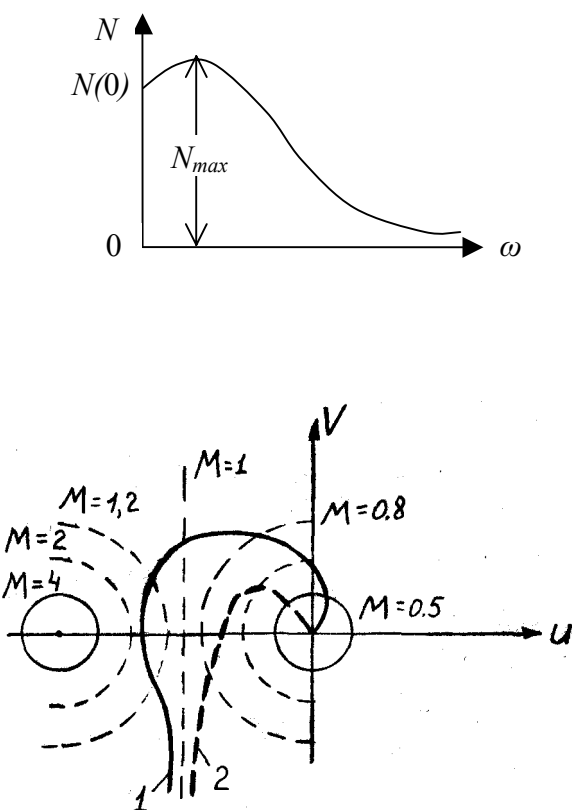
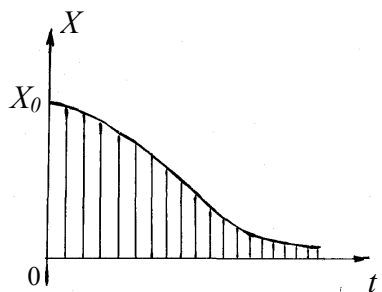
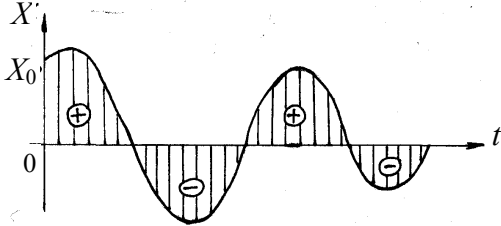
Частотные оценки качества	Способ определения
<p>8. Длительность ПП приближенно оценивается по величине интервала существенных частот</p>	$\frac{\pi}{\omega_{сч}} < t_{пп} < \frac{4\pi}{\omega_{сч}}, \quad t_{пп} \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_{ср}}$
<p>9. Показатель колебательности M – максимальное значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы.</p> 	$M = \frac{N_{max}}{N(0)},$ <p>где N – модуль частотной ПФ замкнутой системы. Если $1.5 \leq M \leq 1.7$ – система имеет допустимый запас устойчивости; если $1.1 \leq M \leq 1.3$ – система имеет хороший запас устойчивости</p> <p>M можно определить по виду ЧХ разомкнутой системы с использованием следующих формул:</p> $M = \left \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right = \left \frac{U+jV}{1+U+jV} \right = \sqrt{\frac{U^2+V^2}{(1+U)^2+V^2}},$ $C = \frac{M^2}{M^2-1}; \quad R = \frac{M}{M^2-1},$ <p>где C – центр окружностей; R – радиус окружностей</p>

Таблица 4.5

Интегральные оценки качества	Способ определения
<p>1. I_1 – площадь под кривой ПП (для монотонного ПП)</p>	 $I_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt$

Интегральные оценки качества	Способ определения
<p>2. I_2 – квадратичная интегральная оценка (для колебательного ПП)</p>	 $I_2 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt$

4.3. Расчет точности системы по передаточным функциям

1. Расчет точности системы при линейном внешнем воздействии

Среди простейших линейных воздействий выделяют следующие:

а) *постоянное воздействие* $g = g_0 = const$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(S) = \frac{KN(S)}{L(S)},$$

где K – общий коэффициент усиления;

$N(S)$, $L(S)$ – полиномы, свободные члены которых равны единицам.

Тогда передаточная функция замкнутой системы по ошибке запишется в виде

$$\Phi_\varepsilon(S) = \frac{E(S)}{G(S)} = \frac{1}{1 + W_p(S)} = \frac{L(S)}{L(S) + KN(S)} \quad (4.2)$$

где $G(S)$ – входной сигнал;

$E(S)$ – изображение по Лапласу сигнала ошибки системы.

По теореме о конечном значении функции с использованием выражения (4.2) получится следующее значение установившейся ошибки системы:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{S \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(S) G(S) S = \frac{g_0}{1 + K},$$

где $G(S) = \frac{g_0}{S}$.

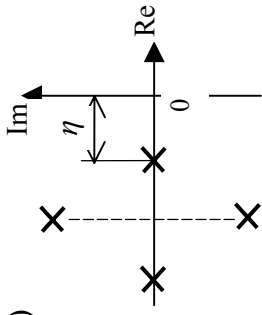
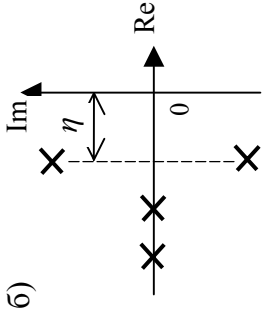
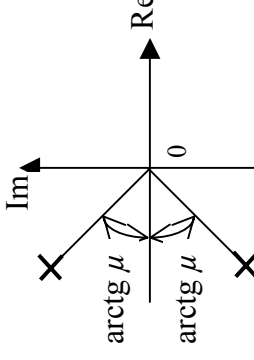
Итак, $\varepsilon_{уст} = \frac{g_0}{1 + K}$ – значение установившейся ошибки при постоянном

входном воздействии или статическая ошибка системы.

б) воздействие в виде сигнала с постоянной скоростью $g(t) = g_0 + g_1(t)$

Установившаяся (статическая) ошибка системы, как частное решение дифференциального уравнения, будет изменяться с постоянной скоростью. При достаточно длительном воздействии такое увеличение ошибки не допустимо.

Таблица 4.6

Корневые оценки качества	Способ определения	Оценка прямых показателей качества
<p>1. Степень устойчивости η – расстояние от мнимой оси до ближайшего корня на плоскости корней ХУ</p>	<p>а) </p> <p>б) </p> <p>а) η – аperiodическая степень устойчивости, ей соответствует аperiodическая составляющая переходного процесса $c_1 e^{-\eta t}$;</p> <p>б) η – колебательная граница устойчивости, ей соответствует колебательная составляющая переходного процесса $c_1 e^{-\eta t} (\sin \beta t + \varphi)$</p>	$t_p \approx \frac{3}{\eta}$
<p>3. Колебательность ПП μ – отношение мнимой части ближайшей пары комплексно-сопряженных корней к их вещественной части</p>	<p>$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \mu = \frac{\beta}{\alpha}$</p>  <p>Эта величина характеризует быстроту затухания колебаний за каждый период. Чем больше μ, тем слабее затухание колебаний в ПП</p>	$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100\%$ $\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$ $T = \frac{2\pi}{\beta}$

Чтобы устранить это явление необходимо изменить структуру системы так, чтобы полином $L(S)$ не имел свободного члена, то есть $L(S) = SL_1(S)$, где $L_1(S)$ – полином, у которого свободный член равен единице. В этом случае передаточная функция разомкнутой системы будет иметь нулевой полюс.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(S) = \frac{KN(S)}{SL_1(S)}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы по ошибке запишется в виде

$$\Phi_\varepsilon(S) = \frac{1}{1 + W_p(S)} = \frac{SL_1(S)}{SL_1(S) + KN(S)}. \quad (4.3)$$

Определим значение $\varepsilon_{уст}$ по теореме о конечном значении функции с использованием выражения (4.3)

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{S \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(S)G(S)S = \frac{g_1}{K},$$

где $G(S) = \frac{g_0}{S} + \frac{g_1}{S^2}$.

Итак, если в передаточной функции разомкнутой системы имеется нулевой полюс, то в такой системе при постоянном задающем воздействии установившаяся ошибка равна нулю. Система, обладающая нулевым полюсом и не имеющая поэтому статической ошибки называется *астатической* системой.

Значение скоростной ошибки в такой системе будет равным $E_{уст} = \frac{g_1}{K}$.

2. Расчет точности системы при гармоническом внешнем воздействии

Установившаяся ошибка системы при гармоническом воздействии определяются частотными характеристиками замкнутой системы.

Если на вход подается гармоническое воздействие $g(t) = g_0 \sin \omega t$, то сигнал ошибки системы определяется выражением вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin(\omega t + \psi_\varepsilon),$$

где $\varepsilon_m(\omega) = g_0 |\Phi_\varepsilon(j\omega)|$, $\Psi_\varepsilon(\omega) = -\arg \Phi_\varepsilon(j\omega)$.

Выходной сигнал системы описывается функцией вида

$$y = A_z(\omega) \sin(\omega t + \Psi_z(\omega)),$$

где $A_z(\omega)$ – амплитуда выходного сигнала (определяется по АЧХ замкнутой системы);

$\Psi_z(\omega)$ – сдвиг по фазе выходного сигнала относительно входного (определяется по ФЧХ замкнутой системы).

Важным показателем точности системы является такой показатель, как *полоса пропускания системы* (диапазон частот $0 \div \omega_n$). Полоса пропускания характеризует ограничение возможностей системы в воспроизведении быстро меняющихся сигналов, т.е. речь идет об инерционности системы.

Параметр ω_n определяется по амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы (см. рис. 4.4).

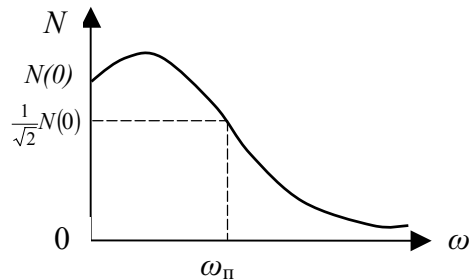


Рис. 4.4

Для астатических систем существуют приближенные формулы вычисления ошибки при гармонических воздействиях на рабочих частотах. Рабочие частоты системы обычно лежат ниже или левее первой сопрягающей частоты, $\omega_p < \omega_1$, тогда $|W(j\omega_p)| \gg 1$.

Для астатической системы с передаточной функцией

$$W(S) = \frac{KN(S)}{S^v L_1(S)},$$

где v – порядок астатизма,

выражение для частотной передаточной функции имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{(j\omega)^v L_1(j\omega)} \approx \frac{K}{(j\omega_p)^v},$$

передаточная функция замкнутой системы по ошибке имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(j\omega) = \frac{1}{1 + W_p(j\omega)} \approx \frac{(j\omega)^v}{K},$$

амплитуда ошибки определяется по следующему выражению:

$$A_\varepsilon = |\Phi_\varepsilon(j\omega)| \approx \frac{\omega_p^v}{K}.$$

Часто требования к системе ставятся по величине максимальной скорости и максимального ускорения входного воздействия, которые должны воспроизводиться следящей системой. В этом случае при подаче на вход

синусоидального воздействия $g=g_0\sin\omega t$ скорость и ускорение также изменяются по гармоническому закону, то есть

$$g' = g_0\omega\cos\omega t = g'_{\max}\cos\omega t, \quad g'' = -g_0\omega^2\sin\omega t = g''_{\max}\sin\omega t.$$

Частота ω и амплитуда g_0 синусоидального входного воздействия, при которых будут получены требуемые значения максимальной скорости и ускорения имеют следующий вид:

$$\omega = \frac{(g_{\max})''}{(g_{\max})'}; \quad g_0 = \frac{(g_{\max})'^2}{(g_{\max})''}.$$

Эти значения принимаются за расчетные и ошибка на этой частоте и на этой амплитуде определяются по следующей формуле:

$$A_\varepsilon = g_0|\Phi_\varepsilon(j\omega)| = \left| \frac{g_0}{1+W_p(j\omega)} \right| \approx \frac{g_0}{W_p(j\omega)}.$$

4.4. Расчет точности системы по методу коэффициентов ошибки

Метод коэффициентов ошибок позволяет определить установившееся значение ошибки при произвольном входном воздействии $g(t)$ и использует для этого передаточную функцию замкнутой системы по ошибке вида

$$\Phi_\varepsilon(S) = \frac{E(S)}{g(S)} = \frac{1}{1+W_p(S)}. \quad (4.4)$$

ПФ (4.4) разлагают в ряд Тейлора по степеням S , получают

$$\Phi_\varepsilon(S) = C_0 + C_1S + \frac{C_2}{2!}S^2 + \frac{C_3}{3!}S^3 + \dots + \frac{C_i}{i!}S^i + \dots, \quad (4.5)$$

где C_i ($i=0, 1, 2, \dots$) – коэффициенты ошибки.

Из (4.4) следует, что $E(S) = G(S)\Phi_\varepsilon(S)$, тогда с учетом (4.5) имеем

$$\varepsilon_{ycm} = C_0g(t) + C_1g'(t) + \frac{C_2}{2!}g''(t) + \dots + \frac{C_i}{i!}g^{(i)}(t) + \dots \quad (4.6)$$

Коэффициенты ошибки C_i определяются из следующих соотношений:

$$C_0 = [\Phi_\varepsilon(S)]_{S=0}, \quad C_i = \left[\frac{d^i \Phi_\varepsilon(S)}{dS^i} \right]_{S=0}. \quad (4.7)$$

Другой, более простой способ вычисления коэффициентов ошибок: разделить числитель ПФ $\Phi_\varepsilon(S)$ на его знаменатель по известному алгебраическому правилу. При этом коэффициенты числителя и знаменателя записываются, начиная со свободного члена в порядке возрастания степени, то есть в виде

$$\Phi_{\varepsilon}(S) = \frac{a_n + a_{n-1}S + \dots + a_0S^n}{b_n + b_{n-1}S + \dots + b_0S^n}.$$

Общие формулы для расчета коэффициентов ошибок приведены в табл. 4.7.

4.5. Методы повышения точности системы

Ошибка в САУ в установившихся режимах складывается из следующих составляющих:

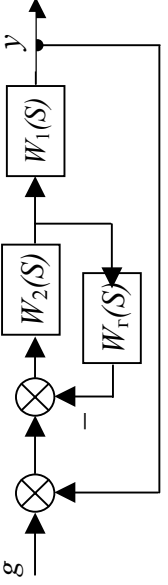
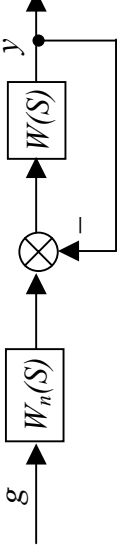
- 1) ошибка, создаваемая несовершенством отдельных элементов регулятора;
- 2) ошибка воспроизведения задающего воздействия;
- 3) ошибка, создаваемая возмущением.


Уменьшение первой составляющей достигается использованием более современных элементов и обычно сопровождается увеличением стоимости и сложности регулятора. Уменьшение двух других составляющих возможно способами, указанными в табл. 4.8.

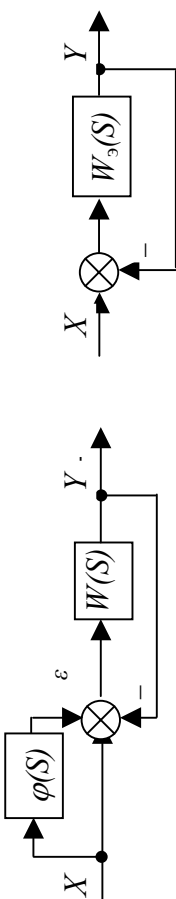
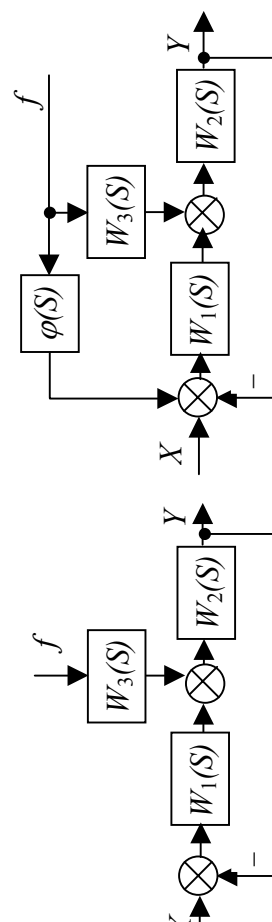
Таблица 4.7

№ п/п	Передаточная функция разомкнутой системы W	Коэффициенты ошибок		
		C ₀	C ₁	C ₂
1	$\frac{k(\beta_0 S^m + \beta_1 S^{m-1} + \dots + \beta_{n-1} S + 1)}{b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \dots + b_{n-1} S + 1}$	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{b_{n-1} - (b_{n-1} + k\beta_{n-1})C_0}{1+k}$	$\frac{b_{n-2} - (b_{n-2} + k\beta_{n-2})C_0 - (b_{n-1} + k\beta_{n-1})C_1}{1+k}$
2	$\frac{k(\beta_0 S^n + \beta_1 S^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} S + 1)}{S(b_0 S^{n-1} + b_1 S^{n-2} + \dots + b_{n-2} S + 1)}$	0	$\frac{1}{k}$	$\frac{b_{n-2} - (1 + k\beta_{n-1})C_1}{k}$
3	$\frac{k(\beta_0 S^n + \beta_1 S^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} S + 1)}{S^2(b_0 S^{n-2} + b_1 S^{n-3} + \dots + b_{n-3} S + 1)}$	0	0	$\frac{b_{n-3} - k\beta_{n-1}C_2}{k}$
№ п/п	Передаточная функция замкнутой системы по ошибке Ф _ε (S)	Коэффициенты ошибок		
		C ₀	C ₁	C ₂
1	$\frac{k(b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + 1)}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + 1}$	k	$\kappa(b_{n-2} - a_{n-1})$	$k[b_{n-2} - b_{n-1}a_{n-1} - (a_{m-2} - a_{n-1}^2)]$
2	$\frac{kS(b_0 S^{m-1} + \dots + b_{n-2} S + 1)}{a_0 S^m + a_1 S^{m-1} + \dots + a_{n-1} S + 1}$	0	k	$k[b_{n-3} - b_{n-2}a_{n-1} - (a_{m-2} - a_{n-1}^2)]$
3	$\frac{kS^2(b_0 S^n + \dots + b_{n-3} S + 1)}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + 1}$	0	0	$k(b_{n-2} - a_{n-1})$

Таблица 4.8

Метод	Причина использования	Способ реализации	Недостатки способа
<p>1. Увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы</p>	<p>Все коэффициенты ошибок обратно пропорциональны коэффициенту передачи разомкнутой системы</p>	<p>1. Введение дополнительного усилителя. 2. Введение гибкой отрицательной обратной связи.</p>  $W_T(S) = \frac{K_2 Q(S)}{R(S)}$	<p>1. Уменьшение запаса устойчивости системы. 2. Ухудшение показателей качества системы. 3. Неучтенные малые параметры могут заметно изменить свойства системы</p>
<p>2. Повышение порядка астазма</p>	<p>Обнуление коэффициентов ошибок</p>	<p>1. Включение интегрирующих звеньев в прямую цепь системы. 2. Включение в прямую цепь изодромного устройства с передаточной функцией</p> $W_n(S) = \frac{K_n (\tau_n S + 1)}{S}$	<p>Ухудшение устойчивости системы</p>
<p>3. Коррекция задающего воздействия или масштабирование</p>	<p>Обнуление коэффициентов ошибок</p>	<p>1. Для статической разомкнутой системы</p> $\Phi_\varepsilon = \frac{S(C_0 S^{n-1} + \dots + C_{n-1})}{C_0 S^n + \dots + C_{n-1} S + 1 + K}$ 	<p>Отклонение параметров от реальных значений приводит к появлению статических ошибок</p>

Метод	Причина использования	Способ реализации	Недостатки способа
		<p>2. Для астатической разомкнутой системы</p> $\Phi_\varepsilon = \frac{S^2(C_0 S^{n-2} + \dots + C_{n-2})}{C_0 S^n + \dots + C_{n-2} S^2 + S + K}$	
<p>4. Введение единичной обратной связи</p>	<p>Обеспечение астатизма системы</p>	 $W_1 = \frac{K_1(b_0 S^m + \dots + b_{m-1} S + 1)}{a_0 S^n + \dots + a_{n-1} S + 1}, \quad K_0 = 1 - \frac{1}{K_1},$ $W_3 = \frac{K_1(b_0 S^m + \dots + b_{m-1} S + 1)}{a_0 S^n + \dots + (a_{n-2} - b_{m-2}) S^2 + (a_{n-1} - b_{m-1}) S}$	<p>Неточность расчета и нестабильность коэффициента передачи K_1 приводят к появлению статических ошибок</p>

Метод	Причина использования	Способ реализации	Недостатки способа
<p>5. Введение инвариантных связей</p>	<p>Компенсация ошибок от изменений входных воздействий</p>	<p>1. Компенсация ошибки от изменения задающего воздействия</p>  $W_3(S) = \frac{W(S)[1 + \varphi(S)]}{1 - \varphi(S)W(S)}, \varphi(S) = \frac{1}{W(S)} \text{ — условие инвариантности.}$ <p>2. Компенсация ошибки от влияния возмущающего воздействия.</p>  $\Phi_f = \frac{W_2[W_3 - W_1\varphi]}{1 + W_1W_2} \quad \varphi = \frac{W_3}{W_1}$	<p>1. Задающее воздействие не всегда можно подать на вход звена φ.</p> <p>2. Возмущающее воздействие не всегда можно подать на вход звена φ</p>

5. СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ВИДЫ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Синтез системы автоматического регулирования есть выбор ее структуры и параметров такими, чтобы удовлетворялись определенные (заданные) требования к качеству регулирования. При этом известен объект регулирования, т.е. имеются его характеристики (математическое описание), а иногда уже выбраны основные функциональные элементы регулятора.

Требования, предъявляемые к поведению системы регулирования, делятся на несколько категорий:

1) требования к точности регулирования в установившихся режимах при различных внешних воздействиях (постоянном, изменяющемся с постоянной скоростью и ускорением, гармоническом);

2) требования к запасу устойчивости и поведению системы в переходных режимах (при единичном ступенчатом воздействии).

Существует большое количество методов синтеза систем автоматического управления. Наиболее известными и хорошо разработанными являются методы синтеза системы в частотной области.

5.1. Метод логарифмических амплитудных характеристик

Свойства системы автоматического регулирования полностью определяются частотными характеристиками ее разомкнутой цепи. Сущность метода заключается в следующем. Сначала строят асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) L_n исходной (подлежащей коррекции) части системы. Затем строят желаемую ЛАЧХ $L_{ж}$ разомкнутой системы. Разность

$$L_{ж} - L_n = L_k$$

есть ЛАЧХ дополнительного (корректирующего) последовательного элемента, который нужно ввести в систему, чтобы она имела необходимые свойства. Наибольшую трудность представляет построение желаемой характеристики.

Желаемую ЛАЧХ условно делят на три участка: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный (табл. 5.1.).

1 Построение низкочастотной части желаемой ЛАЧХ

В табл. 5.2 приведены определение параметров желаемой системы, обеспечивающих выполнение соответствующих требований по заданной точности.

Первые три требования позволяют определить передаточный коэффициент желаемой системы, который должен быть не меньше рассчитанного. Остальные требования позволяют построить запретную область, в которую не должна заходить желаемая ЛАЧХ системы. После построения низкочастотного участка желаемой характеристики, его необходимо поднять на три децибела (это разность между асимптотическими и реальными частотными характеристиками).

Таблица 5.1

Часть ЛАЧХ	Низкочастотная	Среднечастотная	Высокочастотная
Что определяет	Статическая точность системы	Устойчивость, запасы устойчивости и, следовательно, качество переходных процессов	Незначительно влияет на динамические свойства системы
Как задаются требования	Порядок астатизма; добротность системы; коэффициенты ошибок	Время регулирования, перерегулирование; показатель колебательности M	
Основные параметры	Ордината $L_{ж}$ при $\omega=1с^{-1}$ определяется значением передаточного коэффициента k разомкнутой системы	Наклон среднечастотной асимптоты (-20 дБ/дек); частота среза ω_c (частота, при которой $L_{ж}$ пересекает ось абсцисс)	Наклоны высокочастотной части желаемой характеристики берутся одинаковыми с наклонами соответствующей части неизменяемой части системы

Таблица 5.2

Требования по заданной точности	Параметры, обеспечивающие эти требования
1. Выбор значения k , обеспечивающего заданное значение коэффициента ошибки C_0 для статической системы	Коэффициент ошибки $C_0=1/(1+k)$, следовательно, он будет иметь заданное значение C_0 , если $k=(1-C_0)/C_0$
2. Выбор значения k , при котором установившаяся ошибка слежения в астатической системе не будет превышать β , если задающее воздействие вида $g(t)=g_0+g_1t$	Коэффициенты $C_0=0$ и $C_1=1/k$, поэтому $\beta \geq C_1 g_1$, следовательно, $\beta \geq g_1/k$, а $k \geq g_1/\beta$
3. Выбор значения k , при котором установившаяся ошибка в статической системе не должна превышать β , если задающее воздействие и возмущение постоянны и равны соответственно g_0 и f_0	В установившемся режиме $x_0=g_0/(1+k)+k_f f_0/(1+k)$, k_f – передаточный коэффициент цепи «возмущение – регулируемая величина». Следовательно, $k=(g_0+k_f f_0)/\beta-1$

Требования по заданной точности	Параметры, обеспечивающие эти требования
<p>4. Определение ограничения на ЛАЧХ разомкнутой астатической системы, при котором коэффициенты ошибки слежения не более C_{10} и C_{20}</p>	<p>1. Передаточная функция разомкнутой системы $W_p \approx [k(\tau_2 S - 1)] / [S(T_1 S - 1)]$, где $T_1 = 1/\omega_1$, $\tau_2 = 1/\omega_2$.</p> <p>Коэффициенты ошибки слежения $C_1 = 1/k$, $C_2 = [b_1 - (1 + k\beta_2)C_1] / k = (T_1 - \tau_2) / k - 1/k^2$.</p> <p>Если $k \gg 1$, вторым слагаемым в выражении C_2 можно пренебречь. Тогда низкочастотная часть ЛАЧХ должна удовлетворять условиям:</p> $\omega_0 \geq 1/C_0; \quad 1/\omega_1 - 1/\omega_2 \geq C_{20}/C_{10}.$ <p>2. Если низкочастотная часть ЛАЧХ имеет форму 20-60-20, 20-40-60-20, 20-60-40-20, то требования к ней выражаются неравенствами</p> $\omega_0 \geq 1/C_0; \quad 1/\omega_1 - 1/\omega_2 \geq C_{20}/2C_{10};$ $\omega_0 \geq 1/C_0; \quad 1/\omega_1 + 1/\omega_2 - 2/\omega_3 \geq C_{20}/C_{10};$ $\omega_0 \geq 1/C_0; \quad 2/\omega_1 - 1/\omega_2 - 1/\omega_3 \geq C_{20}/C_{10}$
<p>5. Определение ограничения на ЛАЧХ разомкнутой системы, при котором установившаяся ошибка слежения от гармонического задающего воздействия $g = g_{\max} \sin \omega_g t$ не превышает β</p>	$x_{\max} = W_x(j\omega_g) g_{\max} = g_{\max} / 1 + W(j\omega_g) \approx g_{\max} / W(j\omega_g) ,$ <p>где $W(j\omega_g)$ и $W_x(j\omega_g)$ – частотные передаточные функции разомкнутой системы для ошибки слежения.</p> <p>Следовательно, $W(j\omega_g) \geq g_{\max}/\beta$ и ЛАЧХ разомкнутой системы должна проходить не ниже контрольной точки с координатами $\omega_k = \omega_g$ и $L_k = 20 \lg g_{\max}/\beta$</p>
<p>6. Определение ограничения на ЛАЧХ разомкнутой системы, при котором установившееся значение ошибки слежения не превышает β, если задающее воздействие изменяется с максимальной скоростью \dot{g}_{\max} и максимальным ускорением \ddot{g}_{\max}</p>	<p>ЛАЧХ разомкнутой системы должна проходить не ниже контрольной точки с координатами</p> $\omega_k = \frac{\ddot{g}_{\max}}{\dot{g}_{\max}}, \quad L_k = 20 \lg \left(\frac{(\dot{g}_{\max})^2}{\ddot{g}_{\max} \beta} \right).$ <p>Передаточный коэффициент к астатической системы первого порядка – $k \geq \frac{\dot{g}_{\max}}{\beta}$, а коэффициент k астатической системы второго порядка – $k \geq \frac{\ddot{g}_{\max}}{\beta}$</p>

2. Построение среднечастотной части желаемой ЛАЧХ

Основная сложность при построении среднечастотного участка – определение частоты среза. В зависимости от способа задания требований к качеству переходных процессов возможны два основных подхода к определению частоты среза.

а) Заданы время регулирования t_p и перерегулирование σ

На основании заданного перерегулирования (рис. 5.1) можно определить P_{\max} (максимальное значение вещественной частотной характеристики) и затем по этому значению – зависимость между временем переходного процесса t_p и частотой ω_{Π} , соответствующей интервалу положительности вещественной характеристики. По заданному значению t_p определяется требуемое значение ω_{Π} .

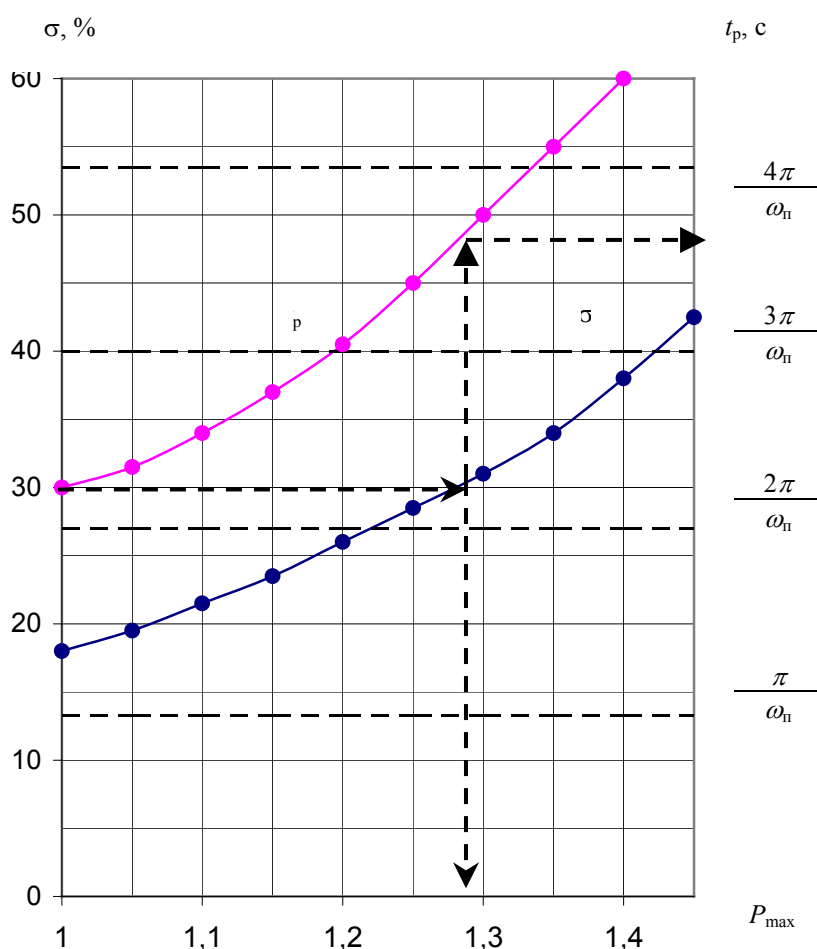


Рис. 5.1

Частота среза выбирается из условия $\omega_{\text{ср}} = (0,6 \div 0,9) \omega_{\Pi}$.

Через частоту среза нужно провести асимптоту с наклоном – 20 дБ/дек. Этот участок проводится влево и вправо до достижения модулей, равных L_1 и L_2 (рис. 5.2.). Затем производится сопряжение низкочастотного участка со среднечастотным асимптотами – 40 дБ/дек или – 60 дБ/дек.

Кривые, построенные на рис. 5.2. позволяют при заданном значении перерегулирования выбирать требуемое значение запаса по модулю $L_1 = |L_2|$ и запаса по фазе μ .

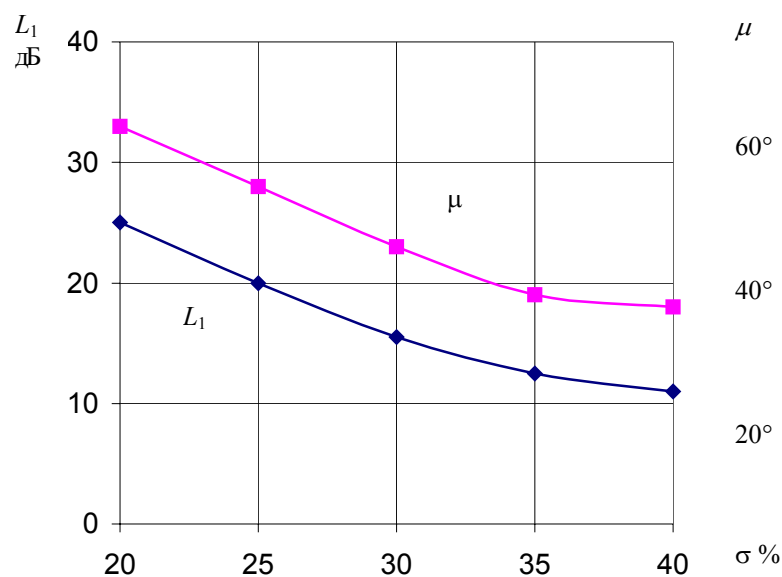


Рис. 5.2

б) Задан показатель колебательности M

На основании взаимосвязей (рис. 5.3, табл. 5.3) между частотными и прямыми показателями качества можно перейти от показателя колебательности к прямым показателям качества переходного процесса.

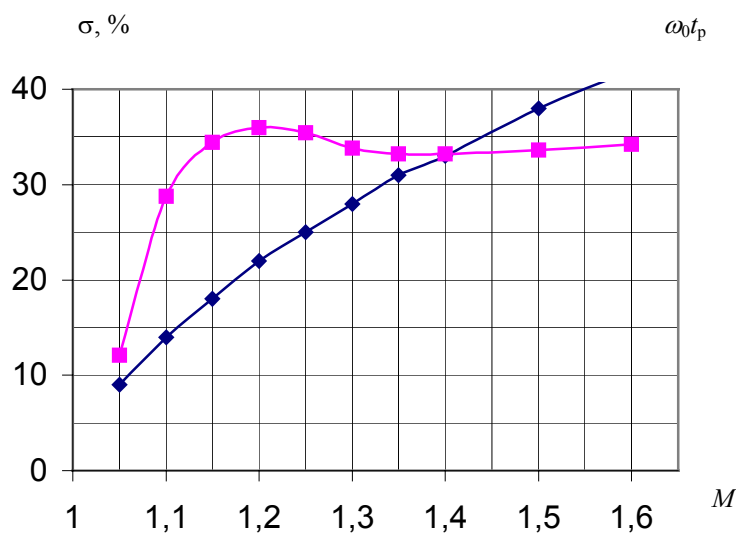


Рис. 5.3

M	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,50	1,60
$\sigma, \%$	9	14	18	22	25	28	31	33	38	42
$\omega_0 t_p$	1,21	2,88	3,44	3,60	3,54	3,38	3,32	3,32	3,36	3,42

При этом частота ω_0 определяется так: асимптота, которая заканчивает низкочастотный участок (это может быть асимптота как с наклоном -20 дБ/дек так и -40 дБ/дек) продлевается до пересечения с осью частот; частота, при которой эта асимптота пересекается с осью частот и будет ω_0 .

При синтезе системы по заданной величине показателя колебательности M сумма всех постоянных времени, сопрягающие частоты для которых лежат в области высоких частот, не должна превышать некоторую величину [3].

При построении желаемой ЛАЧХ нужно стараться, чтобы она как можно меньше отличалась от исходной ЛАЧХ, что необходимо для упрощения корректирующих устройств.

При этом следует учитывать следующее:

- коэффициент усиления может быть только увеличен по сравнению со значением, определяемым требованием к точности, или равен ему;
- частота среза желаемой системы может быть большей величины, чем вычисленная по заданным показателям качества, или равна ей;
- длина отрезка ЛАЧХ с наклоном -20 дБ/дек должна быть не меньше найденной величины.

После формирования всей желаемой ЛАЧХ необходимо проверить выдерживается ли требуемое значение запаса по фазе для модулей, лежащих в пределах

$$L_1 \geq L(\omega) \geq L_2.$$

Если требуемый запас по фазе не выдержан, то необходимо расширить среднечастотный участок и вновь произвести проверку.

ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства определяется как разность исходной и желаемой ЛАЧХ.

Корректирующее устройство должно быть простым: чем меньше порядок, тем проще устройство. При этом порядок знаменателя всегда должен быть не меньше порядка числителя, иначе такое звено физически нереализуемо.

5.2. Виды корректирующих устройств

Корректирующее устройство – это функциональный элемент системы автоматического регулирования по отклонению, обеспечивающий необходимые свойства этой системы, устойчивое и качественно ее действие.

По способам включения выделяют три вида корректирующих устройств (рис. 5.4 а, б, в)

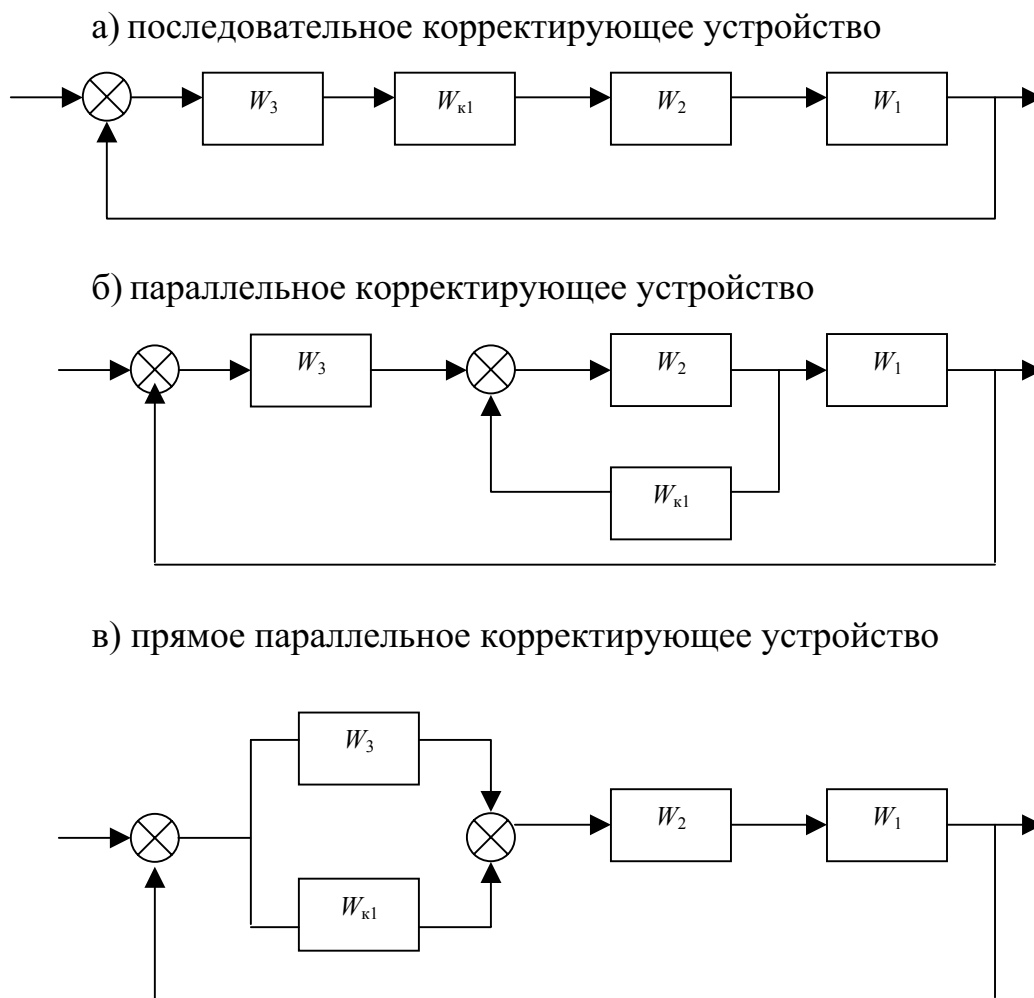


Рис. 5.4

Способы включения различных типов корректирующих устройств, эффект от их включения, а также формулы эквивалентности корректирующих устройств приведены в табл. 5.4.

5.3 Выбор корректирующего устройства

После построения ЛАЧХ неизменяемой части системы L_n и желаемой ЛАЧХ $L_{ж}$ определяется их разность, т.е. ЛАЧХ L_k последовательного корректирующего устройства. Это удобно делать графически: при каждой из сопрягающей частот характеристик L_n и $L_{ж}$ вычислить разность их ординат, полученные точки нанести на график и соединить отрезками прямых.

На основании ЛАЧХ L_k составляют передаточную функцию необходимого последовательного корректирующего устройства.

Каждой сопрягающей частоте ω_i , при которой наклон ЛАЧХ L_k увеличивается на $-v \cdot 20$ дБ/дек, соответствует множитель $(T_i \cdot s + 1)^v$ в знаменателе W_k , $T_i = 1/\omega_i$. Если при сопрягающей частоте ω_j наклон ЛАЧХ L_k

уменьшается на $+\eta \cdot 20$ дБ/дек, то ей соответствует множитель $(T_j \cdot s + 1)^n$ в числителе W_k , $T_j = 1/\omega_j$.

При синтезе корректирующих устройств возникает задача реализации их передаточных функций пассивными или активными четырехполюсниками постоянного тока. Последние содержат пассивные двухполюсники. Пассивные двухполюсники и активные четырехполюсники – это электрические цепи из резисторов (активных сопротивлений), конденсаторов и индуктивностей. Индуктивность практически не используют, т.к. частота в сигналах в САР низкая, и возникает необходимость в больших индуктивностях. Схему четырехполюсника постоянного тока с необходимой передаточной функцией можно подобрать по [1, 3].

.В заключение должно быть проверено удовлетворение требований, на основании которых осуществлялся синтез САР. Для проверки показателей качества необходимо построить переходную характеристику, для проверки частотных показателей качества – амплитудно-частотную характеристику замкнутой системы. При этом если рассчитанные показатели качества значительно отличаются от заданных в техническом задании, то следует подправить желаемую ЛАЧХ системы. Например, если время регулирования получилось значительно меньше заданного, то следует уменьшить частоту среза разомкнутой системы. При избыточных запасах устойчивости рекомендуется уменьшить протяженность среднечастотного участка желаемой ЛАЧХ или увеличить постоянные времени, частоты сопряжения которых лежат в области высоких частот.

Таблица 5.4

Тип корректирующего устройства	Способ включения	Эффект от введения	Формулы эквивалентности
Последовательное	Непосредственно после элемента сравнения или предварительного усилителя	<p>1. Увеличение запасов устойчивости, улучшение качества переходного процесса (при введении производной от рассогласования)</p> <p>2. Обеспечение астатизма с охранением устойчивости и качества переходной характеристики (при введении производной и интеграла от рассогласования)</p>	$W_{к1} = \frac{1}{(1 + W_{к2}W_2)} = 1 + \frac{W_{к3}}{W_3}$
Параллельное	Охватывает обратной связью оконечный каскад усилителя или исполнительный элемент	<p>Устройство выполняют так, чтобы $W_{к2}W_2 \gg 1$, тогда свойства участка цепи и изменение его параметров не влияют на свойства системы</p>	$W_{к2} = \frac{1 - W_{к1}}{W_{к1}W_2} = -\frac{W_{к3}}{W_2(W_{к3} + W_3)}$
Прямое параллельное	Включается параллельно одному из участков прямой цепи	Иногда такое устройство при меньшей сложности создает необходимое преобразование сигнала	$W_{к3} = W_3(W_{к1} - 1) = -\frac{W_{к2}W_2W_3}{1 + W_2W_{к2}}$

6. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

При исследовании динамических свойств САУ классическими методами используется передаточная функция замкнутой системы. Однако поведение системы во времени должно характеризоваться не только выходной величиной, но и выходными величинами всех составляющих систему динамических элементов.

Так как число таких динамических элементов равно порядку системы n , то движение системы полностью характеризуется траекторией движения n -мерного вектора в гиперпространстве R^n .

Множество возможных положений указанного вектора состояния порождает векторное пространство, называемое **пространством состояний системы**.

За координаты вектора состояния системы принимаются выходные сигналы динамических элементов, обладающих свойством интегрирования, т.е. физическим свойством «накапливать» кинетическую или потенциальную энергию, вещество, положение и т.п.

Линейные стационарные системы управления описываются в компактной нормальной форме векторно-матричной записи

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ – вектор состояний системы;

$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k]^T$ – вектор выходных величин системы;

$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ – вектор управления;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ – собственная параметрическая матрица системы;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} \text{ – матрица входа;}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix} \text{ – матрица выхода;}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{km} \end{bmatrix} \text{ – определяет возможность попадания на выход входной величины } V, \text{ часто бывает нулевой.}$$

Системе уравнений (6.1) соответствует схема (рис. 6.1).

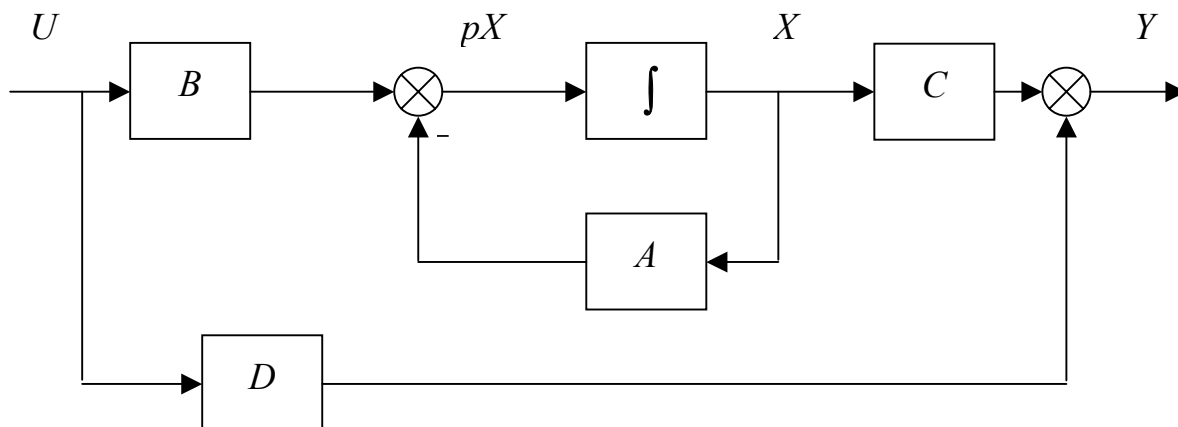


Рис. 6.1

Уравнение

$$P(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \quad (6.2)$$

называется характеристическим. Решение его дает спектр матрицы B, т.е. значения корней $\lambda_i (i = \overline{1, n})$.

Виды записи характеристического уравнения:

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

$$P(\lambda) = a_0 (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) = 0.$$

Примеры идеальных и реальных интеграторов приведены соответственно в табл. 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1

№ п/п	Координаты состояния	Уравнения состояния
1	Угол поворота вала	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, где ω – угловая скорость
2	Ток через индуктивность	$i = \frac{1}{L} \int_0^t e_L(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} e_L$, где e_L – напряжение на идеальной индуктивности
3	Напряжение на конденсаторе	$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} i$, где i – ток через конденсатор

Способ математического описания систем при помощи переменных вход-выход имеет существенные ограничения, которые связаны в основном с понятиями управляемости и наблюдаемости. При получении передаточной функции сложной системы по передаточной функции возможно сокращение полюсов (нулей), оказывающих существенное влияние на динамику системы.

Таблица 6.2

№ п/п	Координаты состояния	Уравнения состояния
1	Электрическая цепь с индуктивностью L и омическим сопротивлением R	$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u$ i – ток, u – напряжение
2	Механическая цепь с массой m и механическим сопротивлением b	$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v + \frac{1}{m}f$ v – скорость движения, f – сила
3	Электродвигатель постоянного тока	$\begin{bmatrix} \frac{di_\lambda}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_\lambda}{L_\lambda} & -\frac{k_E}{L_\lambda} \\ \frac{k_M}{I} & -\frac{1}{T_M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\lambda \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_\lambda} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$

Управлять состоянием системы $x(t)$ можно изменением вектора входа $u(t)$, а наблюдать ее состояние можно, измеряя вектор выхода $y(t)$. В связи с этим возникает два вопроса, имеющих кардинальное значение для теории управления:

1. Можно ли выбрав соответствующим образом входы $u(t)$, перевести объект управления из некоторого произвольного состояния $x(t_0)$ в другое произвольное состояние $x(t_1)$?

2. Можно ли, наблюдая вектор выхода $y(t)$ в течение достаточно долгого промежутка времени, определить начальное состояние объекта $x(t_0)$?

Ответ на первый вопрос связан с понятием управляемости, а ответ на второй вопрос – с понятием наблюдаемости.

Определения понятий управляемости и наблюдаемости и условия их определения приведены в табл. 6.3.

Пример: рассмотрим объект, описываемый уравнениями состояния (рис. 6.2).

$$\begin{aligned} Sx_1 - x_1 &= x_1(S - 1) = 0, \\ Sx_2 + x_2 &= x_2(S + 1) = -u, \\ Sx_3 + 2x_3 &= x_3(S + 2) = u, \\ Sx_4 + 3x_4 &= x_4(S + 3) = -2u, \\ y &= x_1 + x_3 + 0.5x_4. \end{aligned}$$

Из рис. 6.2 видно, что переменная x_1 не соединена со входом i , поэтому он не может влиять на ее изменение во времени. Такую переменную состояния называют неуправляемой. Переменная x_2 не соединена с выходом y , потому по наблюдению выхода y невозможно определить x_2 .

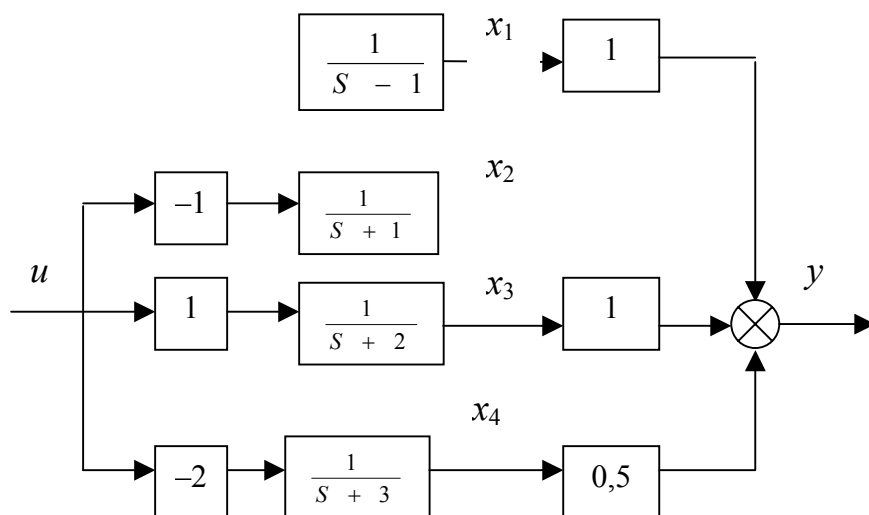


Рис. 6.2

Очевидная аналогия между критериями управляемости и наблюдаемости позволяет сделать вывод об их **дуальности**.

Назовем два объекта S и S^* дуальными, если их можно описать соответственно уравнениями:

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad S^* : \begin{cases} \dot{z} = A^T z + C^T u \\ w = B^T z \end{cases}$$

Если S управляема в t_0 , то S^* наблюдаема в t_0 и наоборот. Таким образом, наблюдаемость одной из систем можно проверить анализом управляемости дуальной ей системы.

Таблица 6.3

Понятие	Управляемость	Наблюдаемость
С чем связано	С возможностью приведения системы в заданное состояние с помощью входных или управляющих воздействий	С возможностью определения переменных состояния по результатам измерения входных переменных
Общее определение	Состояние $[x_0, t_0]$ называют управляемым, если можно найти момент времени t_1 ($t_1 > t_0$) и выход $u(t)$, переводящий систему за интервал времени $[t_0, t_1]$ из состояния $[x_0, t_0]$ в состояние $[x_1, t_1]$. Если любое состояние $x \in X$ является управляемым для t_0 , то объект называют полностью управляемым в момент времени t_0	Систему называют наблюдаемой, если по данным измерения или наблюдения векторов $y(t)$ и $u(t)$ на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$ можно однозначно определить начальное состояние $x(t_0)$. Систему называют полностью наблюдаемой, если наблюдаемы все ее состояния в любые моменты времени
Необходимое и достаточное условия	Матрица $Q = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ должна иметь ранг n , (n – порядок системы)	Матрица $R = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$ должна иметь ранг n
Показатели	Наименьшее значение ν , при котором имеет место равенство $\text{rang } Q_\nu = \text{rang } [B, AB, \dots, A^{\nu-1}B] = n$	Наименьшее μ , при котором имеет место равенство $\text{rang } R_\mu = \text{rang } [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{\mu-1} C^T] = n$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. 3-е изд. – М.: Наука, 1975.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. М. – Л.: Энергия, 1976.
3. Макаров И.М., Менский Б.М. Линейные автоматические системы. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982.
4. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1	Основы теории управления	3
1.1	Основные понятия и определения	3
1.2	Принципы управления	5
1.3	Обобщенная функциональная схема системы управления	6
1.4	Виды и законы регулирования	7
1.5	Классификация систем управления	9
Глава 2	Математическое описание элементов и систем	11
2.1	Уравнения динамики и статики. Линеаризация	11
2.2	Свойства преобразования Лапласа	14
2.3	Формы записи дифференциальных уравнений. Понятие передаточной функции	15
2.4	Виды передаточных функций системы управления	18
2.5	Основные правила преобразования структурных схем	19
2.6	Типовые динамические звенья и их характеристики	20
2.7	Частотные характеристики типовых динамических звеньев	25
Глава 3	Устойчивость систем управления	30
3.1	Понятие устойчивости	30
3.2	Анализ устойчивости системы по корням характеристического уравнения	31
3.3	Критерии устойчивости	33
3.4	Запасы устойчивости системы	38
3.5	Структурная неустойчивость	39
3.6	Области устойчивости системы	40
3.7	Предельный коэффициент усиления системы	43
Глава 4	Качество систем управления	45
4.1	Прямые показатели качества	46
4.2	Косвенные показатели качества	48
4.3	Расчет точности системы по передаточным коэффициентам	51
4.4	Расчет точности системы по методу коэффициентов ошибок	55
Глава 5	Синтез систем автоматического управления и виды корректирующих устройств	61
5.1	Метод логарифмических амплитудных характеристик	61
5.2	Виды корректирующих устройств	66
5.3	Выбор корректирующего устройства	67
Глава 6	Метод пространства состояний	70
	Библиографический список	75