

К.Ю. ПОЛЯКОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Утверждено советом университета
в качестве учебного пособия*

Санкт-Петербург
2006

УДК 681.5.011
ББК 32.965.6
П

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *Е. И. Веремей*;
кандидат технических наук *А. А. Бобцов*

Поляков К.Ю.

П Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие; СПбГМТУ. – СПб.: 2006. 161 с.
ISBN XXXXXXXXXXXXX

Учебное пособие соответствует разделу «Цифровые системы управления» курса «Теория автоматического регулирования».

В пособии, изложены основные положения современной теории цифровых систем автоматического управления непрерывными динамическими объектами. Основное внимание уделяется характерным особенностям систем этого класса, которые содержат непрерывные и дискретные элементы. Рассмотрены основные инженерные методы анализа и синтеза цифровых систем.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 180201, 180202 и др. Оно также может быть полезным также для аспирантов и инженеров.

УДК 681.5.011
ББК 32.965.6

ISBN XXXXXXXXXXXXX

© СПбГМТУ
2006

Предисловие

В настоящем учебном пособии излагаются основы теории цифровых систем автоматического управления. Термином «цифровые системы» обозначаются системы, в которых цифровой регулятор на базе компьютера применяется для управления непрерывным динамическим объектом – судном, подводным аппаратом и т.п. Благодаря значительному удешевлению высокопроизводительной элементной базы (микропроцессоров) и преимуществам цифровых регуляторов в сравнении с аналоговой техникой, системы этого класса составляют основу современных средств судовой автоматики. Поэтому освоение методов анализа и синтеза цифровых систем является необходимым для разработчика автоматизированных комплексов.

Цель этого пособия — дать представление о характерных особенностях цифровых систем. Особое внимание уделяется разбору идей, значительно меньшее — математическим выкладкам. Как ни странно, такой подход во многом мотивирован развитием компьютерных средств расчета систем управления. Многие студенты поддаются соблазну сразу «нажимать на кнопки», не разобравшись в существе вопроса. Поэтому главный акцент сделан именно на объяснение принципиально важных явлений и понятий, характерных для цифровых систем. К их числу относятся квантование и восстановление сигналов, дискретизация, скрытые колебания, устойчивость, стабилизируемость, физическая реализуемость, робастность и т.п. Освоение этого материала дает возможность грамотно выбирать методы проектирования и оценивать достоверность результатов, полученных при компьютерных расчетах.

В пособии кратко представлен основной математический аппарат, необходимый для инженера, разрабатывающего цифровые алгоритмы управления. Новым при изложении материала является совместное использование операторов прямого и обратного сдвига, обозначаемых символами z и ζ соответственно. Это приводит к двум типам дискретных моделей объектов, которые обладают разными свойствами. В ряде случаев целесообразно использовать оператор прямого сдвига, тогда как в других

задачах применение оператора обратного сдвига дает явные преимущества.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих теорию автоматического управления в рамках подготовки по специальностям 180201 «Системы электроэнергетики и автоматизации судов», 180202 «Системотехника объектов морской инфраструктуры» и др. Предполагается, что читатели освоили классические разделы инженерного курса высшей математики (линейную алгебру, дифференциальное исчисление, теорию функций комплексного переменного), а также методы анализа и синтеза линейных непрерывных систем управления.

В первой (вводной) главе излагаются главным образом вопросы, связанные с процессами квантования и восстановления непрерывных сигналов, которые определяют специфику систем цифрового управления непрерывными объектами.

Вторая глава содержит необходимые сведения из теории линейных дискретных систем. Вводятся дискретные преобразования числовых последовательностей (z - и ζ -преобразования) и изучаются их свойства. Рассматриваются способы математического описания дискретных систем, их устойчивость и стабилизируемость.

Третья глава посвящена методам анализа цифровых систем с учетом их поведения в непрерывном времени, а не только в моменты квантования. Рассмотрена дискретизация непрерывных сигналов и систем, устойчивость цифровых систем и различные показатели качества. Особое внимание уделяется применимости (или неприменимости) подходов, сводящих цифровую систему к дискретной модели.

В четвертой главе изложены методы синтеза цифровых регуляторов для управления непрерывными объектами. Рассмотрены два основных подхода, используемые на практике: дискретизация непрерывных регуляторов (переоборудование) и синтез цифровых регуляторов по дискретной модели объекта.

В приложении приводится таблица, позволяющая строить дискретизированные модели непрерывных сигналов и систем с помощью аппарата z -преобразования.

Ограниченный объем учебного пособия позволяет лишь обозначить наиболее важные традиционные и современные подходы к анализу и синтезу цифровых систем управления. Зачастую изложение ограничено объяснением концепции и ссылками на соответствующие монографии. Это оправдано тем, что пособие носит вводный характер и для уверенного овладения материалом необходимо изучение дополнительной литературы, обзор которой дан в заключении.

Автор благодарит д.т.н., профессора Е.Н. Розенвассера и к.т.н., доцента В.О. Рыбинского, которые внимательно прочитали рукопись и высказали много полезных замечаний, все они были учтены при подготовке окончательного варианта пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	10
1.1. Основные понятия	10
Классификация сигналов и систем.....	10
Разомкнутые и замкнутые системы.....	11
Цифровой компьютер	12
Особенности цифровых систем.....	13
Методы исследования цифровых систем.....	14
1.2. Квантование непрерывных сигналов	15
Квантование по времени и уровню.....	15
Теорема Котельникова-Шеннона.....	17
Эффект поглощения частот	18
1.3. Цифровые законы управления	19
Описание работы цифровой части.....	19
Линейные законы управления.....	20
Операторные модели	21
1.4. Восстановление непрерывных сигналов	23
Понятие экстраполятора	23
Импульсная характеристика и передаточная функция ..	24
Фиксатор нулевого порядка.....	25
Фиксатор первого порядка	26
Другие экстраполяторы	27
2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ	29
2.1. Анализ последовательностей.....	29
z-преобразование.....	29
ζ -преобразование.....	30
Вычисление изображений	30
Свойства z-преобразования.....	32
Восстановление оригинала	33
2.2. Линейные дискретные системы.....	35

Основные понятия.....	35
Импульсная характеристика	36
Дискретная передаточная функция.....	37
Нули и полюса	39
Типовые переходные процессы.....	39
Модели в пространстве состояний.....	40
Физическая реализуемость	42
2.3. Устойчивость	44
Устойчивость по А.М. Ляпунову	44
Устойчивость линейных систем.....	45
Алгебраические критерии устойчивости	48
Критерий Михайлова	51
Критерий Найквиста.....	53
2.4. Одноконтурная дискретная система	55
Структурная схема	55
Физическая реализуемость	55
Некорректные системы.....	57
Устойчивость	58
Устойчивость моделей в пространстве состояний	59
Использование переменной ζ	60
2.5. Стабилизируемость	62
Понятие стабилизируемости.....	62
Нестабилизируемые объекты	63
Множество стабилизирующих регуляторов.....	65
Особый случай	67
Грубость стабилизирующих регуляторов	68
3. АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ.....	70
3.1. Дискретизация непрерывных процессов	70
Квантование непрерывных функций	70
Восстановление непрерывных функций.....	71
Модифицированное z-преобразование	72

3.2. Аналоговые модели дискретных сигналов	73
Аналоговая модель экстраполятора	73
Импульсная модель дискретного сигнала	74
3.3. Дискретизация простейшей импульсной системы.....	76
Дискретная модель объекта с экстраполятором	76
Замкнутые формулы	77
Процессы между моментами квантования	79
Дискретизация моделей в пространстве состояний	80
3.4. Передаточные функции цифровых систем	82
Введение.....	82
Разомкнутые системы.....	83
Замкнутые системы	85
Когда система имеет ДПФ?.....	87
Системы, не имеющие ДПФ	88
Параметрическая передаточная функция	90
3.5. Устойчивость цифровых систем.....	92
Понятие устойчивости	92
Устойчивость одноконтурной цифровой системы	93
Стабилизируемость в вырожденных случаях	95
Скрытые колебания	97
3.6. Показатели качества	98
Переходные процессы.....	98
Запасы устойчивости	99
Ошибка в установившемся режиме.....	101
Интегральные показатели	104
Статистические показатели	105
Робастность	107
4. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ	109
4.1. Переоборудование непрерывных регуляторов	109
Задача переоборудования	109
Численное интегрирование	110

Частотная коррекция	113
Устойчивость регулятора	114
Отображение нулей и полюсов.....	115
Фиктивное квантование	117
Аппроксимация частотной характеристики.....	119
Оптимальное переоборудование	120
4.2. Размещение полюсов	121
Эквивалентная дискретная система	121
Регуляторы низкого порядка	122
Задача размещения полюсов	126
Полиномиальные уравнения.....	127
Физическая реализуемость регулятора	128
Пример синтеза регулятора	130
Размещение полюсов в плоскости ζ	131
4.3. Аperiodическое управление	132
Размещение полюсов	132
Процессы минимальной длительности.....	134
4.4. Синтез регулятора по эталонной модели.....	141
Системы с двумя степенями свободы	141
Полиномиальный алгоритм синтеза регулятора.....	142
Пример синтеза регулятора	146
4.5. Синтез с помощью билинейного преобразования.....	149
Билинейное преобразование	149
Алгоритм синтеза регулятора	151
Использование ЛАФЧХ.....	152
Заключение.....	156
Приложение	159
Литература.....	160

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Основные понятия

Классификация сигналов и систем

Система управления представляет собой множество взаимодействующих объектов, среди которых обычно выделяют объект управления, привод, датчики и управляющее устройство (регулятор). Обмен информацией между ними происходит с помощью сигналов. Различают **аналоговые** (англ. *continuous-time*) сигналы (рис. 1а), определенные при любых значениях времени t внутри рассматриваемого интервала, и **дискретные** (англ. *discrete-time*) сигналы, определенные только в дискретные моменты времени t_0, t_1, t_2, \dots (рис. 1б).

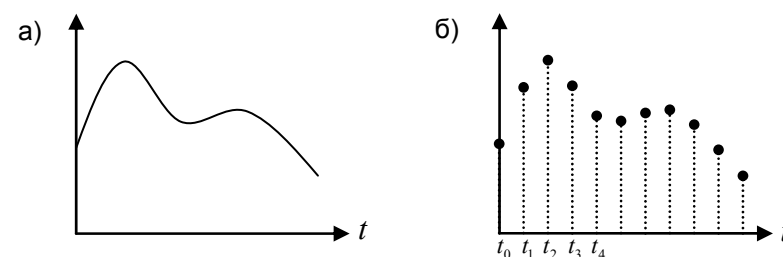


Рис. 1. Аналоговый (а) и дискретный (б) сигналы

Системы, в которых информация передается с помощью аналоговых сигналов, называются **аналоговыми** или **непрерывными** системами. Почти все объекты управления, с которыми сталкивается инженер в практической деятельности (например, суда, подводные лодки, самолеты, электродвигатели и т.п.) являются непрерывными. Для описания их динамики используются **дифференциальные уравнения**.

Передача информации в **дискретных** системах осуществляется с помощью дискретных сигналов, которые можно рассматривать как последовательности чисел. Примером дискретной системы служит цифровой компьютер. Для описания дискретных систем используются **разностные уравнения**, которые определяют законы преобразования числовых последовательностей.

Термином **цифровые системы** (англ. *sampled-data systems*) будем обозначать системы, в которых цифровой регулятор используется для управления непрерывным объектом. Поскольку такие системы включают непрерывные и дискретные элементы, их часто также называют *непрерывно-дискретными* или *аналого-цифровыми*.

Цифровые системы представляют собой особый класс систем управления. Наличие разнородных элементов вызывает значительные сложности при математическом описании процессов. Анализ и синтез цифровых систем с помощью классических методов, разработанных для непрерывных или дискретных систем, дает, как правило, только приближенные решения.

Разомкнутые и замкнутые системы



Рис. 2. Разомкнутая цифровая система

Цифровые системы управления можно разделить на два класса: разомкнутые и замкнутые. Цель управления в обоих случаях — обеспечить требуемые значения управляемых величин (это может быть курс судна, глубина погружения подводного аппарата, скорость вращения турбины и т.п.).

В **разомкнутой системе** компьютер получает только командные сигналы (задающие воздействия), на основе которых вырабатываются сигналы управления, поступающие на объект. Использование такого (программного) управления возможно только в том случае, если модель процесса известна точно, а значения управляемых величин полностью определяются сигналами управления. При этом невозможно учесть влияние внешних возмущений и определить, достигнута ли цель управления.

В **замкнутых системах** используется **обратная связь**, с помощью которой управляющий компьютер получает информацию о состоянии объекта управления. Это позволяет учитывать неизвестные заранее факторы: неточность знаний о модели про-

цесса и влияние внешних возмущений (помех измерений, нагрузки двигателя, сил и моментов, вызванные морским волнением и ветром). Поэтому в большинстве технических систем управления используется обратная связь. В компьютер может также поступать информация об измеряемых возмущениях, что позволяет улучшить качество управления.

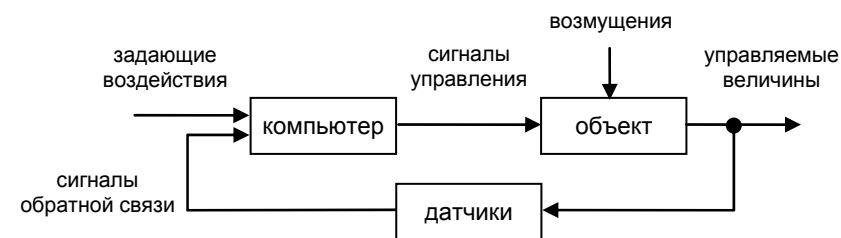


Рис. 3. Замкнутая цифровая система

Цифровой компьютер

Рассмотрим подробно компьютер, входящий в состав замкнутой цифровой системы управления (рис. 4). Здесь и далее аналоговые сигналы обозначаются сплошными линиями, а дискретные (числовые последовательности) — точечными.

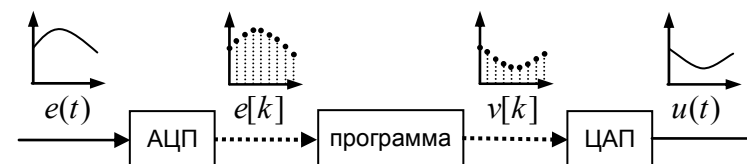


Рис. 4. Блок-схема цифрового компьютера

Аналоговые входные сигналы (задающие воздействия, сигнал ошибки, сигналы обратной связи с датчиков) поступают на **аналого-цифровой преобразователь** (АЦП), где преобразуются в цифровую форму (двоичный код). В большинстве случаев АЦП выполняет это преобразование периодически с некоторым интервалом T , который называется **интервалом квантования** или **периодом квантования**. Таким образом, из непрерывного сигнала выбираются дискретные значения (выборка, англ. *sampling*) $e[k] = e(kT)$ при целых $k = 0, 1, \dots$, образующие последова-

тельность $\{e[k]\}$. Этот процесс называется **квантованием**. Таким образом, сигнал на выходе АЦП можно трактовать как последовательность чисел.

Вычислительная **программа** в соответствии с некоторым алгоритмом преобразует входную числовую последовательность $\{e[k]\}$ в управляющую последовательность $\{v[k]\}$.

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) восстанавливает непрерывный сигнал управления по последовательности $\{v[k]\}$. Чаще всего ЦАП работает с тем же периодом, что и АЦП на входе компьютера. Однако для расчета очередного управляющего сигнала требуется некоторое время, из-за этого возникает так называемое **вычислительное запаздывание**. На практике принято это запаздывание относить к непрерывной части системы и считать, что АЦП и ЦАП работают не только синхронно (с одинаковым периодом), но и синфазно (одновременно).

Особенности цифровых систем

Очевидно, что основные характерные черты цифровых систем управления связаны с наличием компьютера (цифрового устройства) в составе системы. Главные **преимущества** цифровой управляющей техники сводятся к следующему:

- используется стандартная аппаратура;
- нет дрейфа параметров, характерного для аналоговых элементов;
- повышается надежность и отказоустойчивость;
- существует возможность реализации сложных законов управления, в том числе логических и адаптивных;
- гибкость, простота перестройки алгоритма управления.

Как обычно, за достоинства приходится расплачиваться. В результате **квантования по времени** компьютер получает только значения входных сигналов в моменты квантования, игнорируя все остальные. Кроме того, АЦП и ЦАП имеют ограниченное число разрядов, поэтому при измерении входного сигнала и выдаче сигнала управления происходит округление значения к ближай-

шему, которое сможет обработать АЦП (или ЦАП). Это явление называют **квантованием по уровню**.

Таким образом, квантование в цифровых системах приводит к специфическим эффектам, которые можно считать их **недостатками**:

- между моментами квантования система фактически не управляется, это может привести к потере устойчивости;
- при квантовании по времени теряется информация о значениях измеряемых сигналов между моментами квантования;
- квантование по уровню приводит к потере точности, что может вызвать дополнительную ошибку в установившемся режиме и автоколебания.

Методы исследования цифровых систем

В современной теории управления существует три группы методов исследования цифровых систем [1-11]:

1) методы, основанные на приближенном сведении цифровой системы к чисто **непрерывной** системе, при этом игнорируются все процессы, связанные с квантованием и наличием цифровых элементов;

2) методы, которые сводятся к исследованию **дискретной** модели цифровой системы, при этом рассматриваются только значения сигналов в моменты квантования и игнорируются все процессы между этими моментами;

3) **точные** методы исследования, при которых цифровая система рассматривается в непрерывном времени без каких-либо упрощений и аппроксимаций.

При использовании методов первой и второй групп гибридная непрерывно-дискретная система фактически подменяется другой, более простой, что может привести к качественно неверным результатам.

С другой стороны, точные методы проектирования, разработанные в [10,11], используют весьма сложный математический аппарат и поэтому пока не получили широкого распространения в инженерной практике. Их применение особенно важно в сложных

случаях, например, при относительно больших интервалах квантования.

1.2. Квантование непрерывных сигналов

Квантование по времени и уровню

Квантование (англ. *sampling*) состоит в том, что аналоговый сигнал заменяется последовательностью его значений в дискретные моменты времени. В цифровых системах присутствует два типа квантования: квантование по времени и квантование по уровню (рис. 5).

В результате **квантования по времени** из аналогового сигнала выбираются только его значения в моменты квантования, чаще всего периодически через некоторый интервал T , который называется **периодом квантования**. При этом все значения сигнала между моментами квантования игнорируются, т.е., при квантовании происходит потеря информации. Системы с квантованием по времени называют **импульсными**.

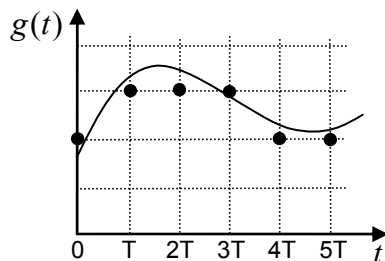


Рис. 5. Квантование по времени и по уровню

Квантование по уровню связано с тем, что АЦП и ЦАП имеют конечное число двоичных разрядов (чаще всего от 8 до 16). Это значит, что на выходе АЦП можно получить только ограниченное число различных кодовых значений (256 для 8-разрядного ЦАП и 65536 для 16-разрядного). Поэтому при квантовании значения входного сигнала искажаются (округляются).

Квантование по уровню представляет собой нелинейную операцию, и при малом количестве разрядов АЦП и ЦАП в замкнутой системе могут возникать автоколебания. Системы с квантованием по уровню относят к классу **релейных** систем.

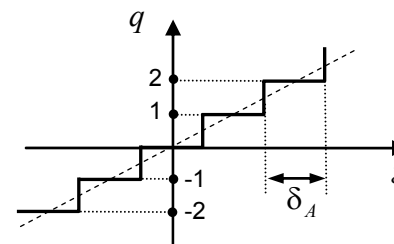


Рис. 6. Нелинейная характеристика АЦП

На рис. 6 изображена нелинейная характеристика АЦП, который преобразует непрерывный сигнал g в код q . Если δ_A — ширина «ступеньки», то максимальная ошибка, вызванная линеаризацией (штриховая линия на рис. 6), составляет $\delta_A/2$.

В инженерных расчетах цифровая система чаще всего линеаризуется и далее рассматривается как линейная импульсная система, а квантование по уровню учитывается как эквивалентная случайная помеха [6]. Если считать, что ошибка округления распределена равномерно в интервале $[-\delta_A/2, \delta_A/2]$, ее можно приближенно заменить дискретным белым шумом с дисперсией $D_A = \delta_A^2/12$ [6]. Аналогично учитывается квантование в ЦАП на выходе компьютера.

Далее мы будем рассматривать только идеальное квантование по времени, т.е., периодическую выборку дискретных отсчетов сигнала без искажения их значений.

Пусть $g(t)$ — аналоговый сигнал, определенный при $t \geq 0$. Через $\{g[k]\}$ обозначим последовательность значений

$$g[0], g[1], g[2], \dots, \quad (1)$$

полученную в результате его квантования с периодом T , т.е., $g[k] = g(kT)$ при целых $k \geq 0$. Если сигнал $g(t)$ терпит разрыв в моменты квантования, будем считать, что

$$g[k] = g(kT + 0), \quad (2)$$

т.е., при квантовании фиксируется предельное значение справа.

Теорема Котельникова-Шеннона

С теоретической точки зрения интересно, когда можно (и можно ли вообще) точно восстановить непрерывный сигнал по дискретным измерениям? Ответ на этот вопрос дает теорема Котельникова-Шеннона¹, согласно которой возможность восстановления определяется частотными свойствами сигнала и **частотой квантования** $\omega_s = 2\pi/T$.

Теорема Котельникова-Шеннона. *Непрерывный сигнал, спектр которого равен нулю вне интервала $(-\omega_{\max}, \omega_{\max})$, однозначно представляется своими значениями в равноотстоящих точках, если $\omega_s > 2\omega_{\max}$. Непрерывный сигнал может быть восстановлен по формуле*

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \frac{\sin \omega_s (t - kT) / 2}{\omega_s (t - kT) / 2}. \quad (3)$$

Доказательство и подробное обсуждение этого результата можно найти, например, в [9].

Таким образом, непрерывный сигнал теоретически может быть восстановлен по дискретным измерениям, если его максимальная частота ω_{\max} меньше **частоты Найквиста** $\omega_N = \omega_s / 2 = \pi / T$. Например, для восстановления синусоидального сигнала надо брать отсчеты чаще, чем два раза за период функции.

Если кроме значений самого сигнала $g(t)$ в моменты квантования известны также и значения его производных, частота квантования может быть уменьшена. Так при известных производных теоретически достаточно использовать квантование с частотой $\omega_s > \omega_{\max}$ [8].

¹ Впервые этот результат получен российским ученым В.А. Котельниковым в 1933 году. Позднее он был доказан К. Шенноном в 1949 году и получил широкую известность.

Эффект поглощения частот

Если частота ω_{\max} , ограничивающая спектр непрерывного сигнала, больше частоты Найквиста, непрерывный сигнал нельзя однозначно восстановить по дискретным измерениям.

Рассмотрим, что происходит при квантовании сигнала $g(t) = -\sin 1,8\pi t$ с периодом $T = 1$. Его угловая частота, равная $\omega_0 = 1,8\pi$, больше частоты Найквиста $\omega_N = \pi$, т.е. условия теоремы Котельникова-Шеннона нарушены.

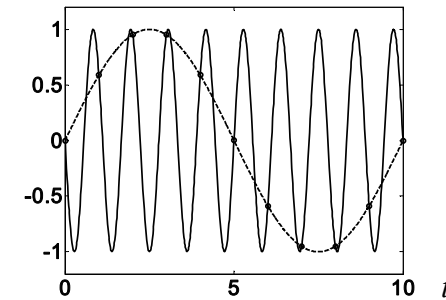


Рис. 7. Эффект поглощения частот при квантовании

График изменения сигнала $g(t)$ во времени показан сплошной линией на рис. 7. Точками отмечены значения сигнала в моменты квантования, которые точно ложатся на синусоиду $g_1(t) = \sin 0,2\pi t$ (штриховая линия). Учитывая периодичность синуса и равенство $2\pi = \omega_s T$, при целых k получаем

$$-\sin \omega_0 kT = \sin(2\pi k - \omega_0 kT) = \sin[(\omega_s - \omega_0)kT].$$

В данном случае $\omega_0 = 1,8\pi$ и $\omega_s - \omega_0 = 0,2\pi$, поэтому мы не сможем отличить сигналы $g(t)$ и $g_1(t)$ по дискретным отсчетам. Говорят, что угловая частота $0,2\pi$ поглощает частоту $1,8\pi$. В общем случае любая частота ω из диапазона $0 \leq \omega < \omega_N$ поглощает частоты

$$\omega_s \pm \omega, 2\omega_s \pm \omega, 3\omega_s \pm \omega, \dots,$$

т.е., эти частоты в спектре входного сигнала после квантования неотличимы от частоты ω . В англоязычной литературе это явление называется *aliasing*.

Как правило, спектры реальных сигналов не равны нулю в области частот выше частоты Найквиста, поэтому в результате эффекта поглощения частот высокочастотные помехи проявляются на низких частотах. Системы управления динамическими объектами обычно строятся так, чтобы реагировать только на низкочастотные и среднечастотные возмущения. Из-за эффекта поглощения частот регулятор будет реагировать на высокочастотные помехи, что крайне нежелательно. Поэтому на входе цифровой части устанавливаются фильтры низкой частоты (англ. *anti-aliasing filters*), которые отфильтровывают высокочастотные помехи перед квантованием.

1.3. Цифровые законы управления

Описание работы цифровой части

Рассмотрим блок-схему компьютера, показанную на рис. 4. Входным сигналом для программы является последовательность значений $\{e[k]\}$, поступающих с выхода АЦП. Программа управления представляет собой некоторое правило (алгоритм), по которому входная последовательность $\{e[k]\}$ преобразуется в управляющую последовательность $\{v[k]\}$.

На момент $t_k = kT$ компьютеру доступны текущее и все предыдущие значения входного сигнала

$$\dots, e[k-2], e[k-1], e[k], \quad (4)$$

а также предыдущие значения управляющего сигнала

$$\dots, v[k-3], v[k-2], v[k-1].$$

Задача программы — построить очередное значение

$$v[k] = \mathfrak{F}(e[k], e[k-1], \dots, v[k-1], v[k-2], \dots), \quad (5)$$

где $\mathfrak{F}(\dots)$ — некоторая функция своих аргументов.

Поскольку в (5) не используются будущие значения входного сигнала, такой закон управления называется **физически реализуемым** (англ. *causal*). Это значит, что его можно реализовать в реальной системе без «предсказания будущего».

Линейные законы управления

Линейным называется закон цифрового управления (5), в который все величины входят линейно, т.е., просто умножаются на коэффициенты и складываются.

Линейный закон, при котором используются только значения входной последовательности:

$$v[k] = a_0 e[k] + a_1 e[k-1] + \dots + a_n e[k-N], \quad (6)$$

где $a_i (i = 0, \dots, N)$ — числовые коэффициенты, называется **скользящим средним** (СС) (англ. *moving average, MA*)².

Линейный закон управления, при котором используются только предыдущие значения выходной последовательности и последнее значение входа:

$$v[k] + b_1 v[k-1] + \dots + b_n v[k-N] = e[k],$$

где $b_i (i = 1, \dots, N)$ — числовые коэффициенты, называется **авторегрессионным процессом** (АР) (англ. *autoregressive, AR*).

Линейный закон управления общего вида, при котором используются предыдущие значения входной и выходной последовательностей:

$$v[k] + b_1 v[k-1] + \dots + b_n v[k-N] = a_0 e[k] + a_1 e[k-1] + \dots + a_n e[k-N] \quad (7)$$

где $a_i (i = 0, \dots, N)$ и $b_i (i = 1, \dots, N)$ — числовые коэффициенты, называется **авторегрессионным процессом со скользящим средним** (АРСС) (англ. *autoregressive — moving average, ARMA*).

² Этот и два следующих термина используются в основном в теории идентификации при составлении дискретных моделей объектов.

Уравнения вида (7), связывающие две числовые последовательности, называются **линейными разностными уравнениями**. Это название связано с тем, что они могут быть записаны в форме [6]

$$\beta_N \nabla^N v[k] + \beta_{N-1} \nabla^{N-1} v[k] + \dots + \beta_0 v[k] = \alpha_N \nabla^N e[k] + \alpha_{N-1} \nabla^{N-1} e[k] + \dots + \alpha_0 e[k],$$

где α_i и β_i ($i = 0, \dots, N$) – коэффициенты, а $\nabla^\ell g[k]$ для любой последовательности $\{g[k]\}$ обозначает обратную разность порядка ℓ :

$$\begin{aligned} \nabla g[k] &= g[k] - g[k-1], \\ \nabla^2 g[k] &= \nabla g[k] - \nabla g[k-1], \\ &\dots \\ \nabla^\ell g[k] &= \nabla^{\ell-1} g[k] - \nabla^{\ell-1} g[k-1] \end{aligned}$$

Операторные модели

Использование операторной записи для описания линейных непрерывных систем управления (см. [12,13]) позволяет свести многие задачи к алгебраическим вычислениям, что значительно упрощает их решение. Это прием применяется и в теории дискретных систем, где вместо оператора дифференцирования $p = d/dt$ используют операторы обратного и прямого сдвига на 1 такт.

Оператор обратного сдвига (он обозначается как ζ или z^{-1}) позволяет получить предыдущий элемент последовательности $\{e[k]\}$:

$$\zeta e[k] = e[k-1].$$

Этот оператор соответствует запаздыванию на 1 такт и является **физически реализуемым** в том смысле, что его применение не дает *будущих* значений сигнала. Для того, чтобы найти остальные предшествующие элементы последовательности, надо применить оператор обратного сдвига несколько раз:

$$\zeta^m e[k] = e[k-m]$$

при целых $m > 0$. Используя оператор ζ , можно записать закон управления (7) в виде

$$(1 + b_1 \zeta + \dots + b_N \zeta^N) v[k] = (a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_N \zeta^N) e[k].$$

Тогда формально связь между дискретными сигналами $\{v[k]\}$ и $\{e[k]\}$ может быть записана в операторной форме

$$v = \tilde{C}(\zeta) e,$$

где функция

$$\tilde{C}(\zeta) = \frac{a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_N \zeta^N}{1 + b_1 \zeta + \dots + b_N \zeta^N} \quad (8)$$

называется **передаточной функцией** линейной программы управления. Полиномы в числителе и знаменателе передаточной функции могут иметь разные степени (в случае нулевых старших коэффициентов), причем степень числителя может быть как меньше, так и больше степени знаменателя.

В литературе часто встречается также **оператор прямого сдвига** (сдвига вперед), обозначаемый символом z (или q):

$$ze[k] = e[k+1], \quad z^m e[k] = e[k+m].$$

Очевидно, что этот оператор физически нереализуем, т.к. позволяет получить будущие значения сигнала, что невозможно в реальной ситуации.

При использовании оператора прямого сдвига закон управления (5) может быть записан в форме

$$(1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}) v[k] = (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) e[k]$$

или, после умножения обеих частей на z^N ,

$$(z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N) v[k] = (a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N) e[k].$$

Тогда соответствующая передаточная функция имеет вид

$$C(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}. \quad (9)$$

Для физически реализуемых законов управления степень числителя передаточной функции (9) должна быть не выше степени знаменателя, поскольку иначе для вычисления $v[k]$ требуется знать *будущие* значения последовательности $\{e[k]\}$.

Действительно, пусть $C(z) = a_1 z + a_0$. Тогда уравнение, связывающее входную и выходную последовательность, имеет вид

$$v[k] = a_1 e[k+1] + a_0 e[k].$$

Такой закон управления нереализуем на практике, поскольку значение $e[k+1]$ неизвестно в момент времени $t_k = kT$.

Как показано выше, закону управления (5) можно сопоставить модели, которые описываются выражениями (8) и (9). Они могут быть легко преобразованы друг в друга. Например, для того, чтобы из (8) получить (9), надо умножить числитель и знаменатель (8) на ζ^{-N} и выполнить замену $\zeta^{-1} = z$.

Оба типа моделей находят применение в теории дискретных систем управления. Первые работы в этой области использовали только оператор прямого сдвига и модели типа (9), на основе которых развиты классические методы анализа и синтеза цифровых регуляторов. В современной литературе чаще используется оператор обратного сдвига и передаточные функции вида (8). Такой подход обладает существенными преимуществами в задачах синтеза цифровых регуляторов (см. главу 4.).

1.4. Восстановление непрерывных сигналов

Понятие экстраполятора

Цифровой компьютер вырабатывает управляющий сигнал в виде последовательности чисел $\{v[k]\}$. В то же время объект управления — это непрерывная система, и на его вход надо по-

дать аналоговый сигнал $u(t)$. Операция преобразования последовательности $\{v[k]\}$ в сигнал $u(t)$ реализуется в ЦАП.

Поскольку для восстановления аналогового сигнала на интервале $kT \leq t < (k+1)T$ можно использовать только предыдущие значения управляющей последовательности (до $v[k]$ включительно), необходимо *прогнозировать* значения сигнала в течение очередного интервала квантования, т.е., выполнить экстраполяцию. Поэтому восстанавливающие устройства называют **экстраполяторами**.

Импульсная характеристика и передаточная функция

Экстраполятор является преобразователем сигналов, поэтому его можно характеризовать реакцией на некоторый тестовый входной сигнал. **Импульсной характеристикой** экстраполятора $h(t)$ называют его реакцию на единичный дискретный импульс в момент $k = 0$:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Импульсная характеристика реального (физически реализуемого) экстраполятора равна нулю при $t < 0$, поскольку отклик не может появиться раньше, чем пришел входной сигнал.



Рис. 8. Импульсная характеристика экстраполятора

Чаще всего экстраполятор использует только последнее измеренное значение сигнала $v[k]$, при этом его импульсная характеристика равна нулю при $t > T$. Такой экстраполятор называется **экстраполятором нулевого порядка**.

В более сложных случаях для восстановления аналогового сигнала на интервале $kT \leq t < (k+1)T$ используются также значения

$$v[k-1], v[k-2], \dots, v[k-\ell].$$

В этом случае говорят об экстраполяторе порядка ℓ , его импульсная характеристика равна нулю при $t > (\ell+1)T$.

Импульсная характеристика экстраполятора – это функция непрерывного времени. Поэтому можно ввести **передаточную функцию экстраполятора** как преобразование Лапласа от импульсной характеристики:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt, \quad (11)$$

где s — комплексная переменная.

Фиксатор нулевого порядка

В простейшем случае ЦАП, получив новый управляющий сигнал от цифровой части, просто удерживает его (фиксирует) в течение интервала квантования T до появления следующего значения входного сигнала. Такой элемент называется **фиксатором нулевого порядка** (англ. *zero-order hold, ZOH*), его работа иллюстрируется на рис. 9.

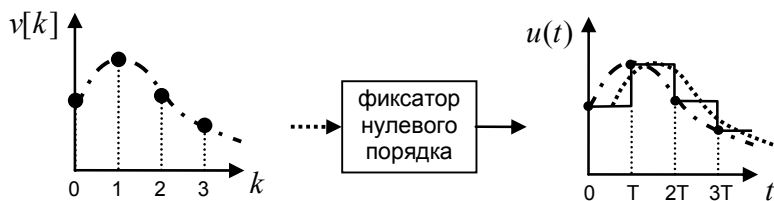


Рис. 9. Фиксатор нулевого порядка

Предположим, что последовательность на входе фиксатора нулевого порядка получена в результате квантования некоторого непрерывного сигнала (штрихпунктирная линия на рис. 9). Восстановленный сигнал будет представлять собой «ступеньки», высота которых совпадает с истинным значением сигнала в начале

интервала. Если провести линию через середины этих «ступенек», получается сигнал, смещенный относительно исходного на половину периода. Поэтому говорят, что последовательно примененные операции квантования и восстановления сигнала с помощью фиксатора нулевого порядка приводят к его *запаздыванию на $T/2$* .

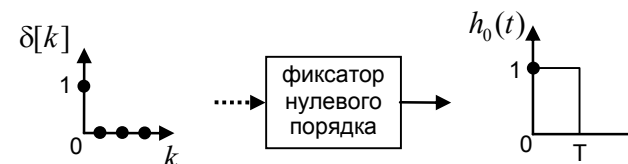


Рис. 10. Импульсная характеристика фиксатора нулевого порядка

По определению импульсная характеристика фиксатора нулевого порядка имеет вид

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases},$$

а его передаточная функция вычисляется как:

$$H_0(s) = \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Подавляющее большинство реальных восстанавливающих устройств описываются именно моделью фиксатора нулевого порядка. Это наиболее простой экстраполятор, легко реализуемый с помощью стандартной аппаратуры (ЦАП).

Фиксатор первого порядка

Иногда рассматривают **фиксатор первого порядка** (англ. *first-order hold, FOH*), который выполняет линейную экстраполяцию на основе двух предыдущих значений дискретного сигнала (рис. 11).

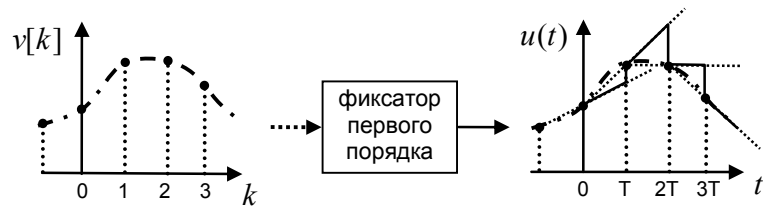


Рис. 11. Фиксатор первого порядка

Непрерывный сигнал на интервале $kT \leq t < (k+1)T$ восстанавливается по закону линейной экстраполяции:

$$u(t) = v[k] + \frac{t - kT}{T} (v[k] - v[k-1]).$$

Импульсная характеристика фиксатора первого порядка (его реакция на единичный дискретный импульс) показана на рис. 12.

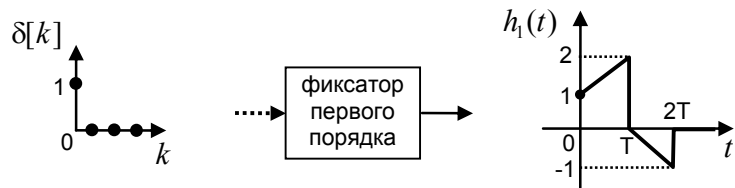


Рис. 12. Импульсная характеристика фиксатора первого порядка

Передаточная функция фиксатора первого порядка вычисляется как преобразование Лапласа от $h_1(t)$:

$$H_1(s) = \int_0^{\infty} h_1(t) e^{-st} dt = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right)^2 \left(\frac{Ts + 1}{T} \right).$$

На практике использование фиксатора первого порядка может дать некоторый выигрыш в точности восстановления сигнала при частом квантовании достаточно гладких сигналов [9].

Другие экстраполяторы

Существуют и более сложные экстраполяторы, рассмотренные, например, в [1] и [5]. В некоторых задачах цифровой фильтрации при случайных помехах оптимальным является так назы-

ваемый экспоненциальный экстраполятор, импульсная характеристика и передаточная функция которого имеют вид

$$h_{\text{exp}}(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & 0 \leq t < T \\ 0, & t > T \end{cases}, \quad (12)$$

$$H_{\text{exp}}(s) = \frac{1 - e^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha},$$

где α – постоянная. Техническая реализация таких экстраполяторов в реальных системах достаточно сложна, поэтому они используются главным образом в теоретических исследованиях.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Анализ последовательностей

В компьютере реализуется цифровой алгоритм обработки данных, в результате которого из входной числовой последовательности $\{e[k]\}$ по некоторому закону получается последовательность управляющих сигналов $\{v[k]\}$. В этом разделе мы рассмотрим специальные преобразования, применяемые при описании последовательностей.

z-преобразование

Преобразование Лапласа оказалось очень удобным инструментом для анализа и синтеза непрерывных линейных систем. Фактически работа с дифференциальными уравнениями и временными характеристиками свелась к алгебраическим операциям с полиномами и рациональными функциями. Поэтому весьма заманчиво попытаться применить аналогичную идею для дискретных сигналов.

Работы в этом направлении были выполнены в 50-х годах прошлого века одновременно в России [1] и США [2]. Я.З. Цыпкин [1] ввел понятие дискретного преобразования Лапласа, а Э. Джери построил теорию импульсных систем на основе аналогичного ***z-преобразования***.

Пусть $\{g[k]\}$ — полубесконечная последовательность ($g[k] = 0$ при всех $k < 0$):

$$g[0], g[1], g[2], \dots \quad (13)$$

Ее можно рассматривать как функцию, аргумент которой принимает дискретные значения $0, 1, 2, \dots$. Такие функции называют ***решетчатыми функциями*** [5].

Z -преобразованием последовательности (13) называется сумма ряда

$$G(z) = Z\{g[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]z^{-k}, \quad (14)$$

где z — комплексная переменная³. Последовательность (13) называется ***оригиналом***, а соответствующая ей функция $G(z)$ (14) — ***изображением***.

Из теоремы Коши-Адамара (см. [16]) следует, что ряд (14) сходится абсолютно вне круга $|z| > R$, где $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|g[k]|}$.

ζ-преобразование

В современной литературе по цифровым системам (см. [10,14,15]) часто применяют ζ -преобразование, которое получается из (14) путем замены z^{-1} на ζ :

$$\tilde{G}(\zeta) = G(z)|_{z=\zeta^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]\zeta^k. \quad (15)$$

Ряд (15) сходится абсолютно *внутри* круга $|\zeta| < 1/R$. Во многих случаях, особенно в задачах синтеза регуляторов, использование ζ -преобразования дает значительные преимущества в сравнении с классическим z -преобразованием (см. главу 4.).

В дальнейшем изложении мы будем использовать как z -преобразование, так и ζ -преобразование, в зависимости от того, какое из них удобнее в конкретной задаче. Материал этого раздела строится на использовании z -преобразования для того, чтобы обеспечить преимущество по отношению к существующей литературе. Аналогичные результаты для ζ -преобразования могут быть получены с помощью замены z на ζ^{-1} .

Вычисление изображений

Для простых случаев изображение $G(z)$ легко найти, используя определение (14). Пусть $g[k] = \delta[k]$ — единичный дискретный импульс (10) (рис. 13). Тогда

³ Не путать с оператором сдвига вперед, который обычно также обозначается символом z .

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k] z^{-k} = \delta[0] = 1.$$

Очевидно, что этот ряд сходится при любом z .

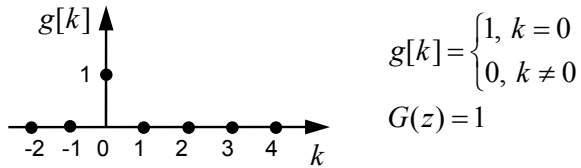


Рис. 13. Единичный дискретный импульс

Далее рассмотрим дискретный единичный ступенчатый сигнал (рис. 14).

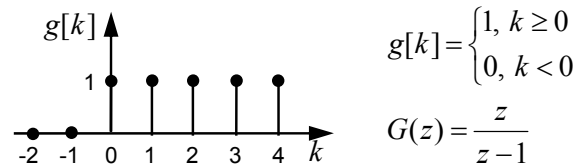


Рис. 14. Единичный ступенчатый сигнал

При $|z| > 1$ соответствующий ряд (14) сходится и представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая вычисляется в замкнутом виде:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Аналогично можно получить z -преобразование для сигнала $g[k] = \alpha \beta^k$, который изображен на рис. 15 (при $0 < \beta < 1$):

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \beta^k z^{-k} = \frac{\alpha}{1-\beta z^{-1}} = \frac{\alpha z}{z-\beta}. \quad (16)$$

Этот ряд сходится, если $|\beta z^{-1}| < 1$, т.е., при $|z| > |\beta|$.

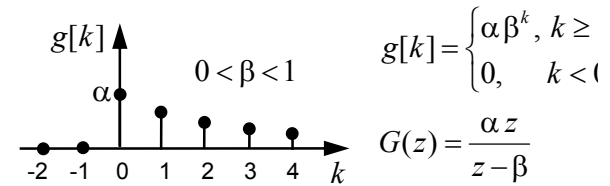


Рис. 15. Экспоненциально убывающий сигнал

Для более сложных функций составлены таблицы z -преобразований (см. приложение и [2,5,6]). Соответствующие ζ -преобразования могут быть получены заменой z^{-1} на ζ .

Важно, что все существующие изображения имеют общую область сходимости — круг некоторого радиуса R_{\min} в комплексной плоскости ζ и область вне круга радиуса $1/R_{\min}$ в плоскости z .

Свойства z -преобразования

Перечислим важнейшие свойства z -преобразования (более подробно эти и другие свойства описаны в [2,3,5]). Пусть $\{g_1[k]\}$ и $\{g_2[k]\}$ — последовательности, равные нулю при $k < 0$, а $G_1(z)$ и $G_2(z)$ — их изображения (z -преобразования).

Линейность. Для любых чисел α_1 и α_2 справедливо равенство

$$Z\{\alpha_1 g_1[k] + \alpha_2 g_2[k]\} = \alpha_1 G_1(z) + \alpha_2 G_2(z).$$

Начальное значение. Начальное значение последовательности может быть вычислено как

$$g[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z).$$

Конечное значение. Если функция $(1-z^{-1})G(z)$ не имеет полюсов в области $|z| \geq 1$ и конечное значение последовательности $\{g[k]\}$ существует, оно может быть вычислено как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})G(z). \quad (17)$$

Обратный сдвиг. Рассмотрим последовательность $\{g[k-m]\}$, сдвинутую вправо (запаздывающую) на целое число тактов $m > 0$ по отношению к исходной последовательности $\{g[k]\}$ (см. рис. 16). Тогда

$$Z\{g[k-m]\} = z^{-m}G(z), \quad (18)$$

где $G(z)$ – изображение последовательности $\{g[k]\}$.

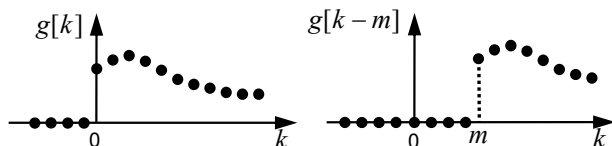


Рис. 16. Запаздывающая последовательность

Сдвиг вперед. Аналогично рассмотрим сдвиг последовательности вперед (упреждение). Для целого $m > 0$ имеем

$$Z\{g[k+m]\} = z^m \left[G(z) - \sum_{i=0}^{m-1} g[i]z^{-i} \right]. \quad (19)$$

Свертка решетчатых функций $\{g_1[k]\}$ и $\{g_2[k]\}$, которая определяется как последовательность

$$g^*[k] = \sum_{m=0}^k g_1[m]g_2[k-m] = \sum_{m=0}^k g_1[k-m]g_2[m],$$

имеет изображение, равное произведению изображений этих функций:

$$Z\{g^*[k]\} = G_1(z)G_2(z). \quad (20)$$

Восстановление оригинала

Для вычисления оригинала (решетчатой функции) по ее изображению используют несколько способов.

Обратное z -преобразование для изображения $G(z)$ представляет собой последовательность $\{g[k]\}$ и обозначается как

$Z^{-1}\{G(z)\}$. Значение $g[k]$ может быть вычислено по интегральной формуле [2]

$$g[k] = Z^{-1}\{G(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z)z^k \frac{dz}{z}. \quad (21)$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а контур интегрирования Γ должен охватывать все полюса $G(z)$. Пусть, например,

$G(z) = \frac{\alpha z}{z - \beta}$. Тогда по теореме о вычетах

$$g[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\alpha z}{z - \beta} z^k \frac{dz}{z} = \mathbf{Res}_{z=\beta} \frac{\alpha z^k}{z - \beta} = \alpha \beta^k.$$

Разложение на простые дроби. Если $G(z)$ — рациональная функция, ее можно разложить на простые дроби и найти соответствующие оригиналы по таблицам z -преобразований (см. приложение). Пусть такое разложение имеет вид

$$G(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i z}{z - \beta_i},$$

где α_i и β_i ($i = 1, \dots, N$) — вещественные или комплексные числа. Тогда, используя свойство линейности z -преобразования и (16), получаем

$$g[k] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i^k.$$

«Длинное» деление полиномов. Если $G(z)$ — рациональная функция, ее можно разложить в ряд Лорана, используя так называемое «длинное» деление полиномов:

$$G(z) = g[0] + g[1]z^{-1} + g[2]z^{-2} + \dots,$$

где коэффициенты ряда совпадают со значениями последовательности-оригинала. Пусть, например, $G(z) = \frac{\alpha z}{z - \beta}$. Тогда деление «углом» дает

$$\frac{\alpha z}{\alpha z - \alpha \beta} \left| \frac{z - \beta}{\alpha + \alpha \beta z^{-1} + \alpha \beta^2 z^{-2} + \dots} \right.$$

$$\frac{\alpha \beta}{\alpha \beta - \alpha \beta^2 z^{-1}}$$

$$\frac{\alpha \beta^2 z^{-1}}{\alpha \beta^2 z^{-1} - \alpha \beta^3 z^{-2}}$$

$$\frac{\alpha \beta^3 z^{-2}}{\dots}$$

Таким образом, $g[k] = \alpha \beta^k$, как и было получено ранее.

2.2. Линейные дискретные системы

Основные понятия

Дискретной будем называть систему, в которой передача информации между элементами осуществляется с помощью дискретных сигналов (числовых последовательностей). Будем рассматривать только системы направленного действия [10], для которых выходной сигнал не влияет на входной.

Если между входом и выходом системы существует однозначная связь, она может быть описана некоторым **оператором** \mathbf{U} – правилом, по которому входная последовательность $\{u[k]\}$ преобразуется в выходную последовательность $\{y[k]\}$. Символически это преобразование записывается в виде:

$$y = \mathbf{U}[u]. \quad (22)$$

Система называется **линейной**, если ей соответствует линейный оператор, т.е.,

$$\mathbf{U}[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2] = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Здесь α_1 и α_2 — произвольные числа, $\{u_1[k]\}$ и $\{u_2[k]\}$ — две входные последовательности, а $\{y_1[k]\}$ и $\{y_2[k]\}$ — соответствующие им выходные последовательности, такие что

$$y_1 = \mathbf{U}[u_1], \quad y_2 = \mathbf{U}[u_2].$$

Систему называют **стационарной**, если соответствующий ей оператор не изменяется с течением времени, т.е., сдвиг входной последовательности во времени (без изменения ее формы) на любое число отсчетов m приводит к точно такому же сдвигу выходной последовательности. Если последовательности $\{u[k]\}$ и $\{y[k]\}$ связаны соотношением (22), для стационарной системы при всех целых m справедливо равенство

$$\mathbf{U}[u[k - m]] = y[k - m].$$

Импульсная характеристика

Импульсной характеристикой линейной стационарной дискретной системы называется ее реакция на единичный дискретный импульс $\delta[k]$ (10). Для физически реализуемой системы сигнал на выходе не может появиться раньше, чем сигнал на входе, поэтому $w[k] = 0$ для $k < 0$ (рис. 17).

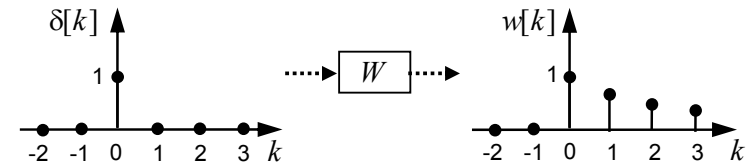


Рис. 17. Импульсная характеристика дискретной системы

Пусть на вход дискретной системы поступает последовательность $\{u[k]\}$, равная нулю при $k < 0$. Ее можно представить как сумму одиночных импульсов высотой $u[k]$, поступающих в моменты $k = 0, 1, \dots$:

$$u[k] = \sum_{m=0}^k \delta[k - m] u[m].$$

С учетом линейности системы сигнал выхода может быть записан как сумма реакций на эти импульсы, в виде линейной комбинации

предыдущих значений последовательности $\{u[k]\}$:

$$y[k] = \sum_{m=0}^k w[k-m]u[m] = \sum_{m=0}^k w[k]u[k-m], \quad k \geq 0. \quad (23)$$

В этой формуле значения $w[k]$ представляют собой весовые коэффициенты, с которыми суммируются значения входа. Поэтому последовательность $\{w[k]\}$ называется также **весовой функцией** дискретной системы.

Дискретные системы иногда называют **цифровыми фильтрами** (этот термин используется в цифровой обработке сигналов). Цифровые фильтры делятся на два класса: фильтры с **конечной импульсной характеристикой** (КИХ-фильтры) и фильтры с **бесконечной импульсной характеристикой** (БИХ-фильтры).

Как следует из названия, для первых импульсная характеристика конечна, т.е., $w[k]=0$ для $k > N$, где N — порядок фильтра. Для БИХ-фильтров импульсная характеристика имеет бесконечное число ненулевых отсчетов.

Фильтры с конечной импульсной характеристикой описываются моделью типа «скользящее среднее» (6), а БИХ-фильтры — авторегрессионной моделью со скользящим средним (7).

Дискретная передаточная функция

Для линейных дискретных систем оказывается возможным ввести передаточную функцию почти так же, как и для непрерывных. Как известно, передаточная функция непрерывной линейной стационарной системы может быть найдена как преобразование Лапласа от ее импульсной характеристики (весовой функции). Для дискретных систем вместо преобразования Лапласа используется z -преобразование (или дискретное преобразование Лапласа [1]).

Дискретная передаточная функция (ДПФ) линейной стационарной дискретной системы определяется как z -преобразование ее импульсной характеристики

$$W(z) = Z\{w[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} w[k]z^{-k}. \quad (24)$$

Рассмотрим систему с входом $\{u[k]\}$ и выходом $\{y[k]\}$. Учитывая, что при нулевых начальных условиях выходная последовательность записывается в виде свертки (23), можно вычислить z -преобразования левой и правой части в (23):

$$Z\{y[k]\} = Z\left\{\sum_{m=0}^k w[k-m]u[m]\right\}.$$

Выражение в правой части этого равенства может быть преобразовано с помощью формулы (20) в произведение изображений последовательностей $\{w[k]\}$ и $\{u[k]\}$. Тогда, с учетом (24)

$$Y(z) = W(z)U(z), \quad (25)$$

где $U(z)$ и $Y(z)$ — изображения последовательностей $\{u[k]\}$ и $\{y[k]\}$ соответственно. Таким образом, ДПФ линейной стационарной дискретной системы равна отношению изображений выхода и входа при нулевой начальной энергии.

Найдем дискретную передаточную функцию для цифрового фильтра, заданного в виде разностного уравнения

$$y[k] + b_1y[k-1] + \dots + b_Ny[k-N] = a_0u[k] + a_1u[k-1] + \dots + a_Nu[k-N]. \quad (26)$$

Возьмем z -преобразование от обеих частей этого уравнения при нулевых начальных условиях. С учетом свойства (18) получаем

$$(1 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N})Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N})U(z).$$

Вычислим ДПФ как отношение изображений выхода и входа:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}}{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}}. \quad (27)$$

Умножив обе части (27) на z^N , получим

$$W(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}, \quad (28)$$

что совпадает с (9). При замене $\zeta = z^{-1}$ в (27) получаем передаточную функцию $\tilde{W}(\zeta)$ вида (8).

Нули и полюса

Разложим числитель и знаменатель (28) на простые сомножители:

$$W(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - \alpha_i)}{\prod_{j=1}^N (z - \beta_j)}.$$

Здесь K — числовой коэффициент, а вещественные или комплексные числа α_i ($i=1, \dots, M$) и β_j ($j=1, \dots, N$) называются соответственно **нулями** и **полюсами** передаточной функции. Если объект физически реализуем, его передаточная функция от переменной z не может иметь больше нулей, чем полюсов т.е., $M \leq N$.

Представление передаточных функций через нули и полюса позволяет повысить точность вычислений, что важно, например, при реализации цифровых фильтров с небольшим числом разрядов. Напротив, прямая реализация с помощью формы (28) в виде отношения полиномов может приводить к накоплению существенных ошибок.

Типовые переходные процессы

Рассмотрим дискретную систему, имеющую ДПФ

$$W(z) = \frac{\alpha}{z - \beta},$$

где α и β — постоянные. Ей соответствует разностное уравнение

$$y[k] = \beta y[k-1] + \alpha u[k].$$

Пусть входное воздействие отсутствует ($u[k] \equiv 0$ при всех k). Тогда при начальном условии $y[0] = y_0$ переходный процесс имеет вид $y[k] = \beta^k y_0$.

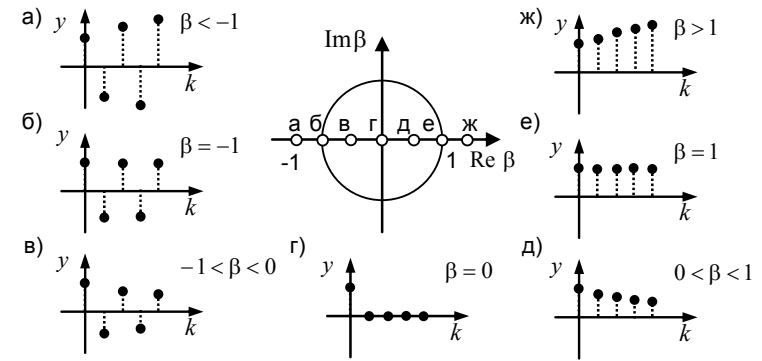


Рис. 18. Типовые переходные процессы

На рис. 18 показаны типовые переходные процессы для различных значений β . В центральной части рисунка эти значения отмечены точками и показана единичная окружность. При $|\beta| > 1$ процессы не затухают со временем, т.е., система неустойчива. При $\beta < 0$ процессы носят колебательный характер, причем знаки отсчетов чередуются.

Заметим, что при $\beta > 0$ полюсу $z = \beta$ можно сопоставить, используя соотношение $z = e^{sT}$, точку на плоскости s с координатами $\left(\frac{1}{T} \ln \beta; 0\right)$. Эту точку можно рассматривать как полюс некоторой непрерывной системы с аналогичным характером переходных процессов. При $\beta < 0$ такого соответствия нет.

Модели в пространстве состояний

В современной теории управления широко используются модели систем, заданные в пространстве состояний. Для такой формы описания моделей разработаны надежные вычислитель-

ные алгоритмы, и поэтому большинство программных средств расчета систем управления использует именно ее.

Передаточная функция (28) стационарной линейной системы может быть реализована в виде модели

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \quad (29)$$

где A , B , C и D – постоянные матрицы соответствующих размеров (матрица A — квадратная). Вектор x называется **вектором состояния**. Его значение полностью определяет состояние дискретной системы в данный момент времени. Вектор u называют вектором управления, а вектор y — вектором выхода.

Для любой передаточной функции существует бесконечное множество реализаций вида (29), причем соответствующие им матрицы A могут иметь разный размер. **Порядком** реализации называют число элементов вектора состояния x . Реализация, в которой матрица A (или, эквивалентно, вектор x) имеет минимально возможный размер, называется **минимальной реализацией**.

Разделив числитель передаточной функции (28) на знаменатель и выделив постоянный коэффициент, всегда можно представить ее в виде

$$W(z) = a_0 + \frac{c_1 z^{N-1} + c_2 z^{N-2} + \dots + c_N}{z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_{N-1} z + b_N}. \quad (30)$$

Одна из реализаций функции (30) (так называемая каноническая управляемая форма) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & \dots & -b_{N-1} & -b_N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N], \quad D = a_0.$$

Если числитель и знаменатель дроби в (30) не имеют общих множителей (несократимы), такая реализация является минимальной и имеет порядок N . Если передаточная функция сократима, минимальная реализация имеет порядок $N - q$, где q — степень общего множителя числителя и знаменателя.

Для того, чтобы найти передаточную функцию по уравнениям (29), вычислим z -преобразование левой и правой части обоих уравнений при нулевых начальных условиях. Используя (19) и полагая $x[0] = 0$, получаем

$$\begin{aligned} zX(z) &= AX(z) + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

где через $X(z)$, $Y(z)$ и $U(z)$ обозначены z -преобразования сигналов $\{x[k]\}$, $\{y[k]\}$ и $\{u[k]\}$ соответственно. Исключая из этих уравнений $X(z)$, получим

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z).$$

Поэтому передаточная функция равна

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (31)$$

ДПФ системы можно записать как функцию переменной $\zeta = z^{-1}$:

$$\tilde{W}(\zeta) = W(z)|_{z=\zeta^{-1}} = \zeta C(I - A\zeta)^{-1}B + D.$$

Физическая реализуемость

В инженерных задачах все рассматриваемые системы должны быть **физически реализуемыми**. Это значит, что реакция на воздействие не может появиться раньше, чем придет само воз-

действие, т.е. импульсная характеристика равна нулю при $k < 0$. Если $w[k] \neq 0$ для каких-либо $k < 0$, это означает, что реакция на воздействие появляется раньше, чем приходит само воздействие. Таким образом, система может «предсказывать будущее», что невозможно. Говорят, что такая система является **физически нереализуемой**. Физически нереализуемые модели находят применение в тех ситуациях, когда известны «будущие» значения, например, при обработке цифровых сигналов и изображений. При этом k имеет смысл не дискретного времени, а номера отсчета.

Для выполнения условия физической реализуемости передаточная функция системы $W(z)$ должна быть **правильной**, т.е., степень ее числителя не должна превышать степень знаменателя. Иначе говоря,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \text{const} \neq \infty. \quad (32)$$

Если это условие не выполняется, импульсная характеристика содержит ненулевые значения при $k < 0$, и система не будет физически реализуемой.

Пусть ДПФ задана как функция переменной $\zeta = z^{-1}$:

$$\tilde{W}(\zeta) = W(z)|_{z=\zeta^{-1}} = \frac{\tilde{a}(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)}, \quad (33)$$

где $\tilde{a}(\zeta)$ и $\tilde{b}(\zeta)$ — полиномы. Тогда условие, эквивалентное (32), запишется в виде

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \tilde{W}(\zeta) = \text{const} \neq \infty. \quad (34)$$

Если ДПФ (33) несократима, (34) равносильно

$$\tilde{b}(0) \neq 0. \quad (35)$$

Условие (35) будем называть **условием физической реализуемости** для ДПФ (33).

2.3. Устойчивость

Под устойчивостью системы обычно понимают ее свойство возвращаться к первоначальному состоянию после прекращения действия внешних возмущений. Как правило, устойчивость является необходимым условием работоспособности системы управления.

Существует много разных определений устойчивости. Сначала дадим классическое определение устойчивости решения разностного уравнения по А.М. Ляпунову.

Устойчивость по А.М. Ляпунову

Пусть дискретная система (возможно, нелинейная и нестационарная) задана уравнением в пространстве состояний

$$x[k+1] = f(k, x[k]), \quad (36)$$

где $f(k, x[k])$ — некоторая функция своих аргументов. Решением этого уравнения называется векторная последовательность $\{x[k]\}$, обращающая (36) в тождество.

Для любого вектора $g = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_N]^T$ обозначим через $\|g\|$ какую-нибудь норму, например, евклидову норму

$$\|g\| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_N^2}.$$

Решение $\{x^*[k]\}$ уравнения (36) при начальных условиях $x[0] = x_0^*$ называется **устойчивым**, если для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, зависящее от ε , что при всех начальных условиях, для которых $\|x_0 - x_0^*\| < \delta$, имеем

$$\|x[k] - x^*[k]\| < \varepsilon \quad \text{при всех } k \geq 0.$$

С геометрической точки зрения это означает, что все траектории, которые начинаются в δ -окрестности точки x_0^* , отклоняются от решения $\{x^*[k]\}$ не более, чем на ε по выбранной норме.

Таким образом, для нелинейной системы устойчивость – это свойство отдельного решения при заданных начальных условиях. При одних начальных условиях решение уравнения (36) может быть устойчиво, а при других – неустойчиво.

Решение $\{x^*[k]\}$ уравнения (36) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво и существует такое число $M > 0$, что при $\|x_0 - x_0^*\| < M$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x[k] - x^*[k]\| = 0.$$

Если при этом $M = \infty$, говорят, что система **устойчива в целом**, т.е., при любых начальных условиях.

Устойчивость линейных систем

Для линейных систем можно ввести понятие **устойчивости системы**, поскольку устойчивость одного решения разностного уравнения

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (37)$$

означает, что все остальные решения также устойчивы. Заметим, что это утверждение справедливо даже тогда, когда матрицы A и B зависят от k , т.е. для линейных нестационарных систем [16]. Итак, линейная дискретная система называется устойчивой, если все решения уравнения (37) устойчивы.

Более того, линейная система (37) **устойчива (асимптотически устойчива)** тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) тривиальное решение $x[k] \equiv 0$ однородной системы

$$x[k+1] = Ax[k]. \quad (38)$$

Это означает, что для устойчивости необходимо и достаточно, что при любых начальных условиях $x[0] = x_0$ решение системы (38) оставалось ограниченным, а для асимптотической устойчивости — стремилось к нулю при любом $x[0]$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = 0. \quad (39)$$

Возможны и другие определения устойчивости. Например, система называется **устойчивой по входу-выходу**⁴, если при любом ограниченном входе и любых начальных условиях сигнал выхода ограничен.

Можно показать, что асимптотически устойчивая система всегда устойчива по входу [9], т.е., асимптотическая устойчивость – это самое сильное условие. Далее, если это не оговаривается особо, под устойчивостью мы будем всегда понимать именно асимптотическую устойчивость.

Пусть система описывается уравнением (38) и $x[0] = x_0$. Тогда единственное решение (38) имеет вид

$$x[k] = A^k x_0.$$

Устойчивость этого решения определяется собственными числами $\lambda_i (i=1, \dots, N)$ матрицы A , которые вычисляются как корни уравнения

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

где I – единичная матрица размера $N \times N$ и \det обозначает определитель. Для того, чтобы система была устойчивой и выполнялось (39), необходимо и достаточно, чтобы все числа λ_i были расположены внутри единичного круга, т.е. $|\lambda_i| < 1$. Для доказательства этого утверждения достаточно привести матрицу A эквивалентными преобразованиями к диагональной или жордановой форме [9].

Аналогичный результат можно получить для передаточных функций. Рассмотрим линейную дискретную систему, заданную своей несократимой ДПФ $W(z)$. Условие асимптотической устойчивости, эквивалентное (39), можно записать через импульсную характеристику:

⁴ В англоязычной литературе — *bounded input-bounded output (BIBO) stability*.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w[k] = 0. \quad (40)$$

Представим передаточную функцию $W(z)$ в виде отношения полиномов $a(z)$ и $b(z)$, и разложим знаменатель на множители, выделив полюса ДПФ λ_i ($i = 1, \dots, N$):

$$W(z) = \frac{a(z)}{b(z)}, \quad b(z) = \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i).$$

Далее мы везде предполагаем, что рассматриваемая система – динамическая и физически реализуемая, т.е.,

$$N = \deg b(z) > 0 \quad \text{и} \quad \deg b(z) \geq \deg a(z).$$

Используя обратное z -преобразование (21), находим импульсную характеристику как оригинал для изображения $W(z)$:

$$w[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{a(z)}{\prod_{i=1}^N (z - \lambda_i)} z^k \frac{dz}{z}.$$

Для простоты будем считать, что среди чисел λ_i нет одинаковых.

Используя теорему о вычетах, при $k > 0$ получаем

$$w[k] = \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{z=\lambda_i} \frac{a(z)}{\prod_{\mu=1}^N (z - \lambda_{\mu})} z^{k-1} = \sum_{i=1}^N \frac{a(\lambda_i)}{\prod_{\mu=1, \mu \neq i}^N (\lambda_i - \lambda_{\mu})} \lambda_i^{k-1}.$$

Таким образом,

$$w[k] = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^{k-1},$$

где c_i ($i = 1, \dots, N$) — постоянные. Следовательно, поведение импульсной характеристики при $k \rightarrow \infty$ определяется числами λ_i . Если все они по модулю меньше единицы, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k-1} = 0$ при всех i , условие (40) выполняется и система устойчива. Этот результат, который можно доказать и для передаточных функций с кратными полюсами, вполне предсказуем, поскольку в силу (31)

полюсами передаточной функции $W(z)$ являются собственные числа матрицы A в (29).

Таким образом, устойчивость линейной дискретной системы определяется расположением полюсов ДПФ $W(z)$. Полином $b(z)$ называется **характеристическим полиномом дискретной системы**, а уравнение $b(z) = 0$ называется **характеристическим уравнением**.

Линейная дискретная система **асимптотически устойчива** тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического полинома по модулю меньше единицы, т.е., расположены внутри единичного круга на комплексной плоскости z (рис. 19). Соответствующую ДПФ $W(z)$ будем называть **устойчивой**.

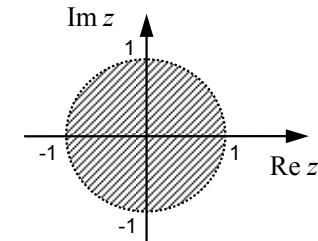


Рис. 19. Область устойчивости в плоскости z

При использовании ДПФ в виде функции переменной $\zeta = z^{-1}$ условие устойчивости меняется. Легко показать, что система с несократимой передаточной функцией $\tilde{W}(\zeta) = W(z)|_{z=\zeta^{-1}}$ асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все полюса $\tilde{W}(\zeta)$ находятся **вне** единичного круга на плоскости ζ . Такую функцию $\tilde{W}(\zeta)$ также будем называть **устойчивой**.

Алгебраические критерии устойчивости

Для выяснения вопроса об устойчивости требуется определить, все ли корни характеристического полинома $b(z)$ распо-

жены внутри единичного круга $|z| < 1$, причем желательно ответить на этот вопрос без вычисления самих корней.

Для непрерывных систем алгебраическое решение этой задачи дает известный критерий Рауса-Гурвица, который позволяет определить, находятся ли все корни некоторого полинома в левой полуплоскости. Чтобы использовать этот результат, можно применить билинейное w -преобразование [7,13]

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (41)$$

которое отображает внутреннюю часть единичного круга $|z| < 1$ на левую полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$, а единичную окружность $|z| = 1$ — на мнимую ось.

Рассмотрим полином $b(z) = z^2 + b_1 z + b_0$ и соответствующее ему характеристическое уравнение

$$z^2 + b_1 z + b_0 = 0. \quad (42)$$

Подстановка (41) дает

$$\frac{(1+w)^2}{(1-w)^2} + b_1 \frac{1+w}{1-w} + b_0 = 0.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая числитель к нулю, получаем

$$(1+w)^2 + b_1(1+w)(1-w) + b_0(1-w) = 0.$$

Раскрывая скобки, имеем $c_2 w^2 + c_1 w + c_0 = 0$, где

$$c_2 = 1 + b_0 - b_1, \quad c_1 = 2(1 - b_0), \quad c_0 = 1 + b_0 + b_1.$$

Как известно, критерий Рауса-Гурвица для полинома второго порядка сводится к тому, что все коэффициенты должны быть одного знака. Разделив c_1 и c_0 на c_2 , получаем

$$\frac{2(1-b_0)}{1+b_0-b_1} > 0, \quad \frac{1+b_0+b_1}{1+b_0-b_1} > 0.$$

Легко проверить, что эти условия равносильны неравенствам:

$$b_0 < 1, \quad b_0 > b_1 - 1, \quad b_0 > -b_1 - 1 \quad (43)$$

и определяют заштрихованную область на рис. 20.

Существуют также и другие алгебраические критерии устойчивости, разработанные специально для дискретных систем. Из них наиболее известен критерий Джюри [2,9], который сводится к построению специальной таблицы.

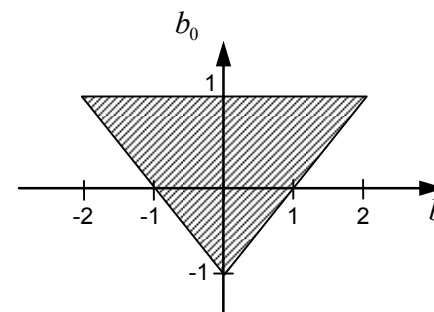


Рис. 20. Область устойчивости для полинома второго порядка

Пусть характеристический полином имеет вид

$$b(z) = b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0. \quad (44)$$

Составим таблицу

b_N	b_{N-1}	\dots	b_1	b_0	$\mu_N = \frac{b_0}{b_N}$
b_0	b_1	\dots	b_{N-1}	b_N	
$b_N^{(N-1)}$	$b_{N-1}^{(N-1)}$	\dots	$b_1^{(N-1)}$	$b_0^{(N-1)}$	$\mu_{N-1} = \frac{b_1^{(N-1)}}{b_N^{(N-1)}}$
$b_1^{(N-1)}$	$b_2^{(N-1)}$	\dots	$b_N^{(N-1)}$	$b_1^{(N-1)}$	
\vdots				\vdots	\vdots
$b_N^{(0)}$				\vdots	\vdots

где $b_i^{(\ell-1)} = b_i^\ell - \mu_\ell b_{2N-i-\ell}^{(\ell)}$ и $\mu_\ell = \frac{b_{N-\ell}^{(\ell)}}{b_N^{(\ell)}}$. Первая и вторая строки

таблицы – это коэффициенты характеристического полинома, выписанные в прямом и обратном порядке. Третья строка вычисляется как разность первой и второй, умноженной на μ_N , так что ее последний элемент равен нулю. Четвертая строка – это третья, записанная в обратном порядке. Схема повторяется до $(2N+1)$ -ой строки, которая состоит из одного элемента.

Критерий Джюри. Если $b_N > 0$, то корни уравнения (42) лежат внутри единичного круга тогда и только тогда, когда все $b_N^{(\ell)}$ ($\ell = 0, \dots, N-1$) положительны. Если среди $b_N^{(\ell)}$ нет равных нулю, то количество отрицательных $b_N^{(\ell)}$ равно количеству корней вне единичного круга.

Таблица Джюри для полинома второго порядка в левой части (42) выглядит так:

1	b_1	b_0	$\mu_2 = b_0$
b_0	b_1	1	
$1 - b_0^2$			$\mu_1 = \frac{b_1}{1 + b_0}$
$1 - b_0^2$	$b_1(1 - b_0)$	$1 - b_0^2$	
$1 - b_0^2 - \frac{b_1^2(1 - b_0)}{1 + b_0}$			

Условия устойчивости сводятся к неравенствам

$$1 - b_0^2 > 0, \quad \frac{1 - b_0}{1 + b_0} [(1 + b_0)^2 - b_1^2] > 0,$$

которые эквивалентны условиям (43).

Критерий Михайлова

Если известен характеристический полином замкнутой системы

$$b(z) = b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

для анализа устойчивости можно использовать дискретный аналог критерия Михайлова [13]. Согласно принципу аргумента, число корней полинома $b(z)$ внутри единичного круга можно определить по числу полных оборотов вектора $b(z)$ вокруг начала координат при изменении комплексной переменной z вдоль границы этого круга, т.е. при $z = e^{j\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$). Таким образом, для устойчивой системы

$$\Delta \arg b(e^{j\theta}) = 2\pi N, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

В силу свойства симметрии $b(e^{-j\theta}) = \overline{b(e^{j\theta})}$, где черта сверху означает комплексно сопряженное выражение. Поэтому достаточно рассмотреть лишь половинный интервал $[0, \pi]$.

Критерий Михайлова. Для устойчивости дискретной системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова проходил последовательно $2N$ квадрантов при изменении θ от 0 до π , т.е.

$$\Delta \arg b(e^{j\theta}) = \pi N, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

На рис. 21 показаны годографы Михайлова для полиномов

$$b(z) = (z - 0,2)^3 \quad \text{и} \quad b(z) = (z - 1,2)(z + 0,2)^2,$$

которые соответствуют устойчивой и неустойчивой дискретным системам третьего порядка.

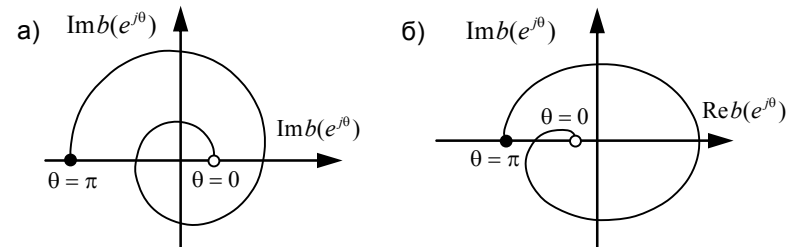


Рис. 21. Годограф Михайлова для систем 3-го порядка а) устойчивая система; б) неустойчивая система

Критерий Найквиста

На дискретные системы может быть легко распространён критерий Найквиста, который широко применяется при анализе устойчивости линейных непрерывных систем.

Пусть дана дискретная передаточная функция разомкнутой системы $W_0(z)$ и требуется определить, устойчива ли замкнутая дискретная система с единичной отрицательной обратной связью (рис. 22).

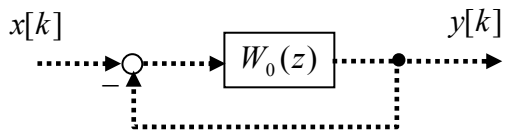


Рис. 22. Система с единичной отрицательной обратной связью

Будем предполагать, что функция $W_0(z)$ — **строго правильная** (степень ее числителя меньше степени знаменателя). Передаточная функция замкнутой системы равна

$$W(z) = \frac{W_0(z)}{1 + W_0(z)},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$1 + W_0(z) = 0.$$

Для дискретных систем граница области устойчивости — это единичная окружность в плоскости z , ее уравнение может быть записано в виде $z = e^{j\theta}$, где $\theta \in [0, 2\pi]$. Для построения годографа Найквиста используется верхняя полуокружность, которая соответствует диапазону $\theta \in [0, \pi]$ (рис. 23).

Полное доказательство критерия Найквиста для дискретных систем можно найти, например, в [13], мы приведем только его формулировку.

Критерий Найквиста. Если разомкнутая цепь устойчива, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф $W_0(e^{j\theta})$ не охватывал точку $(-1, 0)$ при изменении θ от 0 до π .

Если функция $W_0(z)$ имеет полюса в точке $z = 1$ (разомкнутая система содержит дискретные интеграторы), то нужно обходить контур, минуя точку $z = 1$, по четверти окружности малого радиуса r (см. рис. 23).

Если разомкнутая система неустойчива, для устойчивости замкнутой системы годограф должен охватывать точку $(-1, 0)$ на угол $m\pi$ (против часовой стрелки), где m — число неустойчивых полюсов $W_0(z)$.

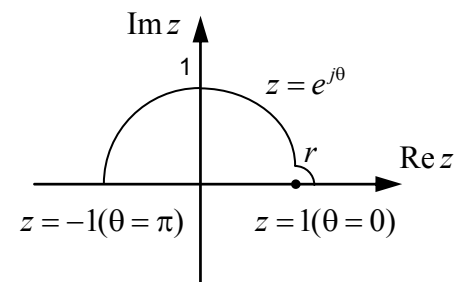


Рис. 23. Контур обхода для построения годографа Найквиста

Термин «нехват точки $(-1, 0)$ » означает, что общее изменение угла поворота радиус-вектора, проведенного из точки $(-1, 0)$ к частотной характеристике $W_0(e^{j\theta})$, равно нулю при изменении θ от 0 до π .

На рис. 24 показаны годографы Найквиста для разомкнутых систем с передаточными функциями вида

$$W_0(z) = \frac{K(z - 0,8)}{z^2 - 0,25},$$

где K — постоянный коэффициент. При $K = 0,3$ система устойчива, годограф (рис. 24а) не охватывает точку $(-1, 0)$, тогда как при $K = 0,6$ (рис. 24б) замкнутая система неустойчива. Можно показать, что критическое значение K , при котором система теряет устойчивость, равно $K^* = 0,417$. В этом случае годограф проходит через точку $(-1, 0)$.

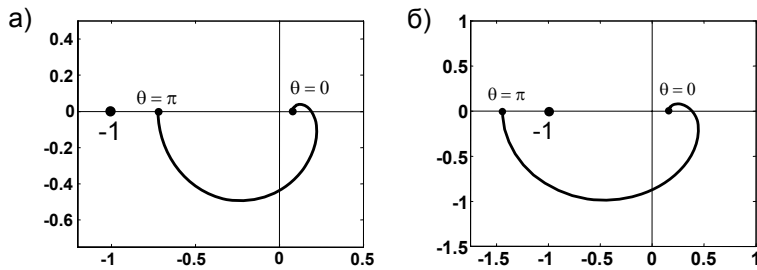


Рис. 24. Годограф Найквиста: а) устойчивая система
б) неустойчивая система

2.4. Одноконтурная дискретная система

Структурная схема

Рассмотрим одноконтурную замкнутую систему с единичной обратной связью (рис. 25).

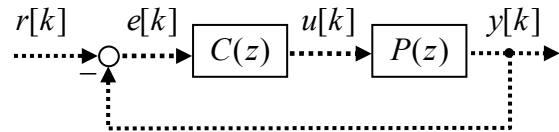


Рис. 25. Одноконтурная система

Здесь $C(z)$ и $P(z)$ обозначают ДПФ регулятора и объекта управления, соответственно, которые могут быть записаны в виде отношений полиномов:

$$C(z) = \frac{a(z)}{b(z)}, \quad P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}. \quad (45)$$

Далее мы везде предполагаем, что объект и регулятор – физически реализуемы элементы, т.е. обе функции в (45) правильные (степени их числителей не выше степеней знаменателей):

$$\deg n(z) \leq \deg d(z), \quad \deg a(z) \leq \deg b(z). \quad (46)$$

Физическая реализуемость

Будем называть систему на рис. 25 **физически реализуемой**, если хотя бы одно из неравенств в (46) — строгое, т.е.,

$$\deg n(z) + \deg a(z) < \deg d(z) + \deg b(z). \quad (47)$$

Посмотрим, что получится, если условие (47) нарушено, т.е. степени числителя и знаменателя ДПФ равны как для объекта, так и для регулятора. Пусть

$$C(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad P(z) = 1,$$

где α и β — постоянные. Соответствующие разностные уравнения имеют вид:

$$\text{объект:} \quad y[k] = u[k]$$

$$\text{регулятор:} \quad u[k] = \beta u[k-1] + e[k] - \alpha e[k-1]$$

$$\text{обратная связь:} \quad e[k] = r[k] - y[k]$$

Согласно второму равенству, для расчета $u[k]$ регулятор использует $u[k-1]$, $e[k]$ и $e[k-1]$. Объединяя первое и третье уравнения находим, что $e[k] = r[k] - u[k]$, т.е. значение $e[k]$ само зависит от $u[k]$, которое еще неизвестно. Иными словами, для того, чтобы рассчитать значение $u[k]$ надо его заранее знать! Это явление называется **алгебраическим циклом**.

Системы с алгебраическим циклом можно считать физически нереализуемыми, поскольку в них входной сигнал регулятора $e[k]$ зависит от (неизвестного еще) выхода регулятора $u[k]$ в тот же момент времени. Это происходит тогда, когда обе передаточные функции $C(z)$ и $P(z)$ имеют одинаковые степени числителя и знаменателя.

Объединяя приведенные выше уравнения, получаем

$$u[k] = \beta u[k-1] + r[k] - u[k] - \alpha e[k-1]. \quad (48)$$

Здесь неизвестное значение $u[k]$ входит как в левую, так и в правую часть равенства. Формально равенство (48) можно рассматривать как уравнение относительно $u[k]$. С математической точки зрения оно разрешимо в виде

$$u[k] = \frac{1}{2}(\beta u[k-1] + r[k] + \alpha e[k-1]),$$

так что формально смоделировать эту систему все-таки можно.

На практике алгебраические циклы почти не встречаются благодаря тому, что дискретные модели объектов с экстраполятором — это, как правило, строго правильные функции от z .

Некорректные системы

Рассмотрим одноконтурную систему на рис. 25, в которой

$$C(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad P(z) = -1, \quad (49)$$

где α и β — постоянные. Разностные уравнения имеют вид:

объект: $y[k] = -u[k]$

регулятор: $u[k] = \beta u[k-1] + e[k] - \alpha e[k-1]$

обратная связь: $e[k] = r[k] - y[k]$

Объединяя эти уравнения, получаем

$$u[k] = \beta u[k-1] + r[k] + u[k] - \alpha e[k-1].$$

После вычитания $u[k]$ из обеих частей находим

$$0 = \beta u[k-1] + r[k] + \alpha e[k-1].$$

Таким образом, значение $u[k]$ определить невозможно, потому что оно не входит в оставшееся уравнение.

Заметим, что для рассматриваемой структуры

$$1 + P(\infty)C(\infty) = 0. \quad (50)$$

Система, для которой выполняется (50), называется **вырожденной** или **некорректной** [15]. Она представляет собой некий математический объект и не соответствует никакой реальной физической системе.

Для выполнения (50) необходимо, чтобы для каждой из передаточных функций $P(z)$ и $C(z)$ степени числителя и знаменате-

ля были равны. Поскольку для моделей реальных объектов $P(z)$ — строго правильная функция, в практических задачах некорректные системы не встречаются.

Устойчивость

Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с единичной обратной связью на рис. 25. Уравнения в изображениях имеют вид

$$\begin{aligned} Y(z) &= P(z)C(z)E(z) \\ E(z) &= R(z) - Y(z) \end{aligned},$$

где заглавными буквами обозначены изображения соответствующих дискретных сигналов. Исключив из этих уравнений $E(z)$, получаем

$$Y(z) = W(z)R(z),$$

где $W(z)$ — ДПФ замкнутой системы:

$$W(z) = \frac{P(z)C(z)}{1 + P(z)C(z)}.$$

Полюсами $W(z)$ являются корни уравнения

$$1 + P(z)C(z) = 0, \quad (51)$$

которое называется **характеристическим уравнением**. Таким образом, система на рис. 25 устойчива только тогда, когда все решения уравнения (51) находятся внутри единичного круга.

Предположим, что дискретный объект и регулятор заданы в виде отношения полиномов

$$C(z) = \frac{a(z)}{b(z)}, \quad P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}.$$

Приравнивая числитель выражения в левой части (51) к нулю, получаем **характеристическое уравнение** в полиномах:

$$a(z)n(z) + b(z)d(z) = 0. \quad (52)$$

Полином

$$\Delta(z) = a(z)n(z) + b(z)d(z). \quad (53)$$

называют **характеристическим полиномом** замкнутой системы. Если корни совпадают с решениями уравнения (52). Полином от переменной z , степень которого выше 0 и все корни расположены внутри единичного круга, будем называть **устойчивым**.

Рассмотрим два характеристических уравнения, определяющих устойчивость замкнутой системы, (51) и (52). Их решения совпадают, если произведение $P(z)C(z)$ несократимо, в противном случае часть решений (52) не является решениями (51), т.е., эти уравнения не равносильны.

Пусть

$$C(z) = \frac{1}{z - \alpha}, \quad P(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad (54)$$

где α и β – постоянные. Легко проверить, что (51) имеет одно решение $z_1 = \beta - 1$, и при $|\beta - 1| < 1$ может быть сделан вывод об устойчивости системы.

В то же время уравнение (52) имеет два решения: $z_1 = \beta - 1$ и $z_2 = \alpha$, так что система устойчива только если одновременно $|\beta - 1| < 1$ и $|\alpha| < 1$. Это значит, что в общем случае следует использовать уравнение (52).

Заметим, что при сократимости произведения $P(z)C(z)$ степень полинома в числителе выражения $1 + P(z)C(z)$ оказывается меньше суммы степеней полиномов $d(z)$ и $b(z)$. Этот факт служит признаком особой ситуации.

Устойчивость моделей в пространстве состояний

Рассмотрим систему на рис. 25, в которой регулятор и объект имеют ДПФ (54). Эти передаточные функции могут быть записаны в виде

$$C(z) = (z - \alpha)^{-1}, \quad P(z) = (\beta - \alpha)(z - \beta)^{-1} + 1,$$

что соответствует уравнениям в пространстве состояний

$$C: \quad x_c[k+1] = \alpha x_c[k] + e[k]$$

$$u[k] = x_c[k]$$

$$P: \quad x_p[k+1] = \beta x_p[k] + u[k]$$

$$y[k] = (\beta - \alpha)x_p[k] + u[k]$$

Здесь через x_c и x_p обозначены переменные состояния регулятора и объекта. Пусть входной сигнал равен нулю, так что $e[k] = -y[k]$. Исключив из этих уравнений $e[k]$, $y[k]$ и $u[k]$, можно построить уравнение свободного движения:

$$x[k+1] = Ax[k],$$

где $x = [x_c \ x_p]^T$ – вектор состояния замкнутой системы. Ее устойчивость определяется собственными числами матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \alpha - \beta \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

которые равны $\beta - 1$ и α . Система устойчива, если оба они по модулю меньше единицы.

Использование переменной ζ

Понятия характеристического уравнения и характеристического полинома могут быть введены и для моделей, записанных с использованием переменной ζ . Выполним замену $z = \zeta^{-1}$ в ДПФ объекта и регулятора:

$$\tilde{C}(\zeta) = C(z)|_{z=\zeta^{-1}} = \frac{\tilde{a}(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)}, \quad \tilde{P}(\zeta) = P(z)|_{z=\zeta^{-1}} = \frac{\tilde{n}(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta)}.$$

Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\tilde{a}(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}(\zeta) = 0 \quad (55)$$

были расположены **вне** единичного круга. Полином

$$\tilde{\Delta}(\zeta) = \tilde{a}(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}(\zeta) \quad (56)$$

называется характеристическим полиномом замкнутой системы.

Полином от ζ будем называть **устойчивым**, если все его корни расположены вне единичного круга. Ненулевые корни $\rho_i (i=1, \dots, N)$ полинома $\Delta(z)$ (53) и корни $\tilde{\rho}_i$ полинома $\tilde{\Delta}(\zeta)$ (56) связаны отношением

$$\tilde{\rho}_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad \rho_i \neq 0.$$

Если полином $\Delta(z)$ имеет ℓ нулевых корней, то степень полинома $\tilde{\Delta}(\zeta)$ понижается, так что

$$\deg \tilde{\Delta}(\zeta) = \deg \Delta(z) - \ell.$$

Использование переменной ζ удобно в тех задачах, где важна физическая реализуемость регулятора [10]. Для подавляющего большинства моделей реальных объектов ДПФ $P(z)$ — **строго правильная** функция, т.е.

$$\deg n(z) < \deg d(z).$$

Тогда ДПФ $\tilde{P}(\zeta)$ содержит множитель ζ в числителе:

$$\tilde{P}(\zeta) = \frac{\zeta \tilde{n}_0(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta)}, \quad (57)$$

где $\tilde{n}_0(\zeta)$ — полином, и $\tilde{d}(0) \neq 0$. Это означает, что прямая передаточная функция с входа объекта на его выход отсутствует, для модели (29), записанной в пространстве состояний, имеем $D = 0$.

Пусть регулятор $\tilde{C}(\zeta) = \frac{\tilde{a}(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)}$ стабилизирует дискретный объект с передаточной функцией (57). Это значит, что все корни характеристического полинома замкнутой системы

$$\tilde{\Delta}(\zeta) = \tilde{a}(\zeta) \zeta \tilde{n}_0(\zeta) + \tilde{b}(\zeta) \tilde{d}(\zeta)$$

расположены вне единичного круга. Поэтому он не имеет корней при $\zeta = 0$ и

$$\tilde{\Delta}(0) = \tilde{b}(0) \tilde{d}(0) \neq 0.$$

Отсюда следует $\tilde{b}(0) \neq 0$, что совпадает с условием физической реализуемости ДПФ регулятора (35). Таким образом, при выполнении (57) **любой регулятор, обеспечивающий устойчивость полинома (56), физически реализуем** [10].

Для некорректных систем анализ устойчивости с помощью характеристических полиномов (53) и (56) от переменных z и ζ дает различные результаты. При использовании переменной ζ некорректная система определяется как неустойчивая и не представляющая практического интереса. Действительно, для случая (49) имеем, переходя в ζ -плоскость,

$$\tilde{C}(\zeta) = \frac{1 - \alpha \zeta}{1 - \beta \zeta}, \quad \tilde{P}(\zeta) = -1.$$

Характеристический полином (56) $\tilde{\Delta}(\zeta) = (\alpha - \beta)\zeta$ имеет корень в точке $\zeta = 0$ и система считается неустойчивой.

2.5. Стабилизируемость

Понятие стабилизируемости

Стабилизируемой называется система, для которой можно существует регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутого контура, т.е. затухание переходных процессов по всем координатам при любых начальных условиях. Такой регулятор называют **стабилизирующим**.

Пусть ДПФ дискретного объекта на рис. 25 задана в виде отношения полиномов

$$P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}. \quad (58)$$

При использовании регулятора $C(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ и замыкании контура

отрицательной обратной связью характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\Delta(z) = a(z)n(z) + b(z)d(z). \quad (59)$$

Если полином $\Delta(z)$ задан, а полиномы $a(z)$ и $b(z)$ неизвестны, последнее равенство представляет собой **полиномиальное уравнение** (уравнение, в котором неизвестными являются полиномы).

Пусть полиномы $n(z)$ и $d(z)$ не имеют общих множителей. Из теории полиномиальных уравнений известно [14], что в этом случае для любого $\Delta(z)$ можно найти полиномы $a(z)$ и $b(z)$, при которых выполняется равенство (59). Поскольку в (59) всегда можно выбрать устойчивый полином $\Delta(z)$, такой объект всегда стабилизируем.

Нестабилизируемые объекты

Как следует из предыдущего пункта, нестабилизируемым может быть только объект, для которого полиномы $n(z)$ и $d(z)$ имеют общий множитель. Пусть

$$n(z) = g(z)n_0(z), \quad d(z) = g(z)d_0(z),$$

где $g(z)$ — общий полиномиальный множитель, а полиномы $n_0(z)$ и $d_0(z)$ — взаимно простые (не имеют общих корней). Тогда (см. [14]) полиномиальное уравнение (59) имеет решение только при таком полиноме $\Delta(z)$, который делится на $g(z)$ без остатка. Следовательно, если полином $g(z)$ имеет неустойчивые корни, при любом выборе полиномов $a(z)$ и $b(z)$ (т.е. при любом регуляторе) система будет неустойчивой. Это значит, что объект $P(z)$ — нестабилизируем.

Продемонстрируем это явление на примере. Рассмотрим дискретный объект, состоящий из двух блоков (рис. 26). Покажем,

что сокращение общих множителей в числителе и знаменателе ДПФ объекта может вызвать его нестабилизируемость.

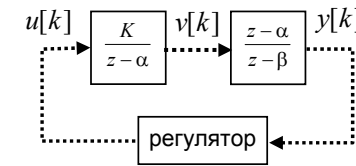


Рис. 26. Нестабилизируемый дискретный объект

Разностные уравнения, связывающие u , v и y , имеют вид

$$\begin{aligned} v[k+1] - \alpha v[k] &= K u[k] \\ y[k+1] - \beta y[k] &= v[k+1] - \alpha v[k] \end{aligned} \quad (60)$$

Заметим, что левая часть первого уравнения совпадает с правой частью второго, поэтому имеем

$$\begin{aligned} v[k+1] &= \alpha v[k] + K u[k] \\ y[k+1] &= \beta y[k] + K u[k] \end{aligned} \quad (61)$$

Из второго уравнения следует, что изменение величины сигнала v вообще никак не влияет на y (говорят, что сигнал v **ненаблюдаем** с выхода y). Поэтому регулятор в обратной связи, использующий для управления только сигнал y , не сможет обеспечить ограниченность сигнала v при любых начальных условиях.

Действительно, пусть начальные значения сигналов равны $v[0] = v_0$ и $y[0] = 0$. Пусть также все начальные условия регулятора — нулевые и $u[0] = 0$. Тогда, как следует из второго уравнения в (61), $y[k] = 0$ и $u[k] = 0$ при всех $k \geq 0$.

В то же время из первого уравнения в (61) получаем

$$v[k+1] = \alpha v[k] \Rightarrow v[k] = \alpha^k v_0.$$

Характер переходного процесса при $v_0 \neq 0$ зависит от значения α : если оно по модулю меньше единицы, при $k \rightarrow \infty$ сигнал v

стремится к нулю. Если $|\alpha| > 1$, он бесконечно нарастает, и в этом случае объект нестабилизируем, поскольку не существует регулятора, который был бы способен отреагировать на возрастание ненаблюдаемого сигнала. Для того, чтобы все же стабилизировать такой объект, надо использовать обратную связь по двум сигналам: y и v .

Множество стабилизирующих регуляторов

Во многих задачах важно выбрать лучший в некотором смысле регулятор из всех стабилизирующих регуляторов. Для этого желательно построить **параметризацию** множества стабилизирующих регуляторов. При этом все стабилизирующие регуляторы описываются единой формулой, в которую входит некоторая функция-параметр, которая должна быть устойчивой. Выбирая соответствующим образом эту функцию, можно построить любой стабилизирующий регулятор.

Параметризация множества стабилизирующих регуляторов для дискретных одномерных систем впервые была использована Л.Н. Волгиным в 1962 г.⁵ В 1971 году В.Б.Ларин, К.И. Наumenко и В.Н. Сунцев разработали аналогичную параметризацию для многомерных непрерывных и дискретных систем⁶. В зарубежной литературе этот результат называется параметризацией Юлы-Кучеры в честь ученых, которые независимо опубликовали его соответственно в 1976 году (непрерывные системы, *D.C. Youla*) и в 1974 году (дискретные системы, *V. Kučera*).

Представим ДПФ объекта в виде отношения полиномов от переменной $\zeta = z^{-1}$:

$$\tilde{P}(\zeta) = P(z)|_{z=\zeta^{-1}} = \frac{\tilde{n}(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta)}, \quad (62)$$

⁵ Л.Н. Волгин, Элементы теории управляющих машин, М.: Сов. радио, 1962.

⁶ В.Б.Ларин, К.И. Наumenко, В.Н. Сунцев. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью. Киев: Наукова думка, 1971.

где $\tilde{n}(\zeta)$ и $\tilde{d}(\zeta)$ — полиномы. Предположим, что они не имеют общих множителей, т.е., ДПФ объекта несократима. Тогда из теории полиномиальных уравнений [14] следует, что существуют полиномы $a^*(\zeta)$ и $b^*(\zeta)$, удовлетворяющие уравнению

$$a^*(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + b^*(\zeta)\tilde{d}(\zeta) = 1, \quad (63)$$

причем можно выбрать такое решение (решение минимальной степени), что

$$\deg a^*(\zeta) \leq \deg \tilde{d}(\zeta) - 1, \quad \deg b^*(\zeta) \leq \deg \tilde{n}(\zeta) - 1,$$

где \deg обозначает степень полинома.

Множество всех стабилизирующих регуляторов может быть задано в виде **параметризации**

$$\tilde{C}(\zeta) = \frac{a^*(\zeta) + \tilde{d}(\zeta)\Psi(\zeta)}{b^*(\zeta) - \tilde{n}(\zeta)\Psi(\zeta)}, \quad (64)$$

где $\Psi(\zeta)$ — произвольная устойчивая рациональная функция (*параметр*). Любой стабилизирующий регулятор может быть представлен в форме (64) с устойчивой функцией $\Psi(\zeta)$, и наоборот, при любой устойчивой функции $\Psi(\zeta)$ регулятор (64) стабилизирует объект (62).

Докажем это важное утверждение. Пусть $\Psi(\zeta)$ — устойчивая функция. Представим ее в виде

$$\Psi(\zeta) = \frac{\theta(\zeta)}{\Delta_+(\zeta)},$$

где $\Delta_+(\zeta)$ — устойчивый полином и $\theta(\zeta)$ — полином. Подставляя это выражение в (64), получаем

$$\tilde{C}(\zeta) = \frac{\tilde{a}(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)} = \frac{a^*(\zeta)\Delta_+(\zeta) + \tilde{d}(\zeta)\theta(\zeta)}{b^*(\zeta)\Delta_+(\zeta) - \tilde{n}(\zeta)\theta(\zeta)}.$$

Характеристический полином замкнутой системы с учетом равенства (63) принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\zeta) &= \tilde{a}(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}(\zeta) \\ &= \Delta_+(\zeta) \left[a^*(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + b^*(\zeta)\tilde{d}(\zeta) \right] = \Delta_+(\zeta).\end{aligned}$$

Так как полином $\Delta_+(\zeta)$ устойчив, замкнутая система устойчива.

Теперь пусть $\tilde{C}(\zeta) = \frac{\tilde{a}(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)}$ — стабилизирующий регулятор,

при котором $\tilde{\Delta}(\zeta) = \tilde{a}(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}(\zeta)$ — устойчивый полином. Непосредственной подстановкой проверяется, что он может быть получен из (64) при выборе

$$\Psi(\zeta) = \frac{\tilde{a}(\zeta)b^*(\zeta) - a^*(\zeta)\tilde{b}(\zeta)}{\tilde{\Delta}(\zeta)}.$$

Таким образом, мы доказали, что формула (64) описывает все возможные стабилизирующие регуляторы.

Заметим, что из (63) следует, что при использовании так называемого **базового регулятора**

$$\tilde{C}^*(\zeta) = \frac{a^*(\zeta)}{b^*(\zeta)}$$

характеристический полином замкнутой системы равен $\tilde{\Delta}(\zeta) = 1$. Такой регулятор является стабилизирующим, так как полином $\tilde{\Delta}(\zeta)$ не имеет корней внутри единичного круга. Кроме того, базовый регулятор обеспечивает затухание переходных процессов в системе за конечное число тактов квантования (процессы с конечной длительностью).

Особый случай

Полученные выше результаты справедливы только тогда, когда ДПФ объекта $\tilde{P}(\zeta)$ (62) несократима. Рассмотрим случай, когда это допущение нарушено, т.е.,

$$\tilde{n}(\zeta) = \tilde{g}(\zeta)\tilde{n}_0(\zeta), \quad \tilde{d}(\zeta) = \tilde{g}(\zeta)\tilde{d}_0(\zeta),$$

где $\tilde{g}(\zeta)$ — общий полиномиальный множитель, а полиномы $\tilde{n}_0(\zeta)$ и $\tilde{d}_0(\zeta)$ — взаимно простые. При этом уравнение (63) не имеет решения (см. [14]), а характеристический полином при любом выборе регулятора содержит множитель $\tilde{g}(\zeta)$:

$$\tilde{\Delta}(\zeta) = \tilde{g}(\zeta)\tilde{\Delta}_0(\zeta), \quad \tilde{\Delta}_0(\zeta) = \tilde{a}(\zeta)\tilde{n}_0(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}_0(\zeta).$$

Если этот множитель неустойчив, то объект нестабилизируем. Если $\tilde{g}(\zeta)$ — устойчивый полином, для обеспечения устойчивости системы остается стабилизировать объект с ДПФ

$$\tilde{P}_0(\zeta) = \frac{\tilde{n}_0(\zeta)}{\tilde{d}_0(\zeta)}.$$

Используя доказанный ранее результат, находим, что множество стабилизирующих регуляторов параметризуется в виде

$$\tilde{C}(\zeta) = \frac{a^*(\zeta) + \tilde{d}_0(\zeta)\Psi(\zeta)}{b^*(\zeta) - \tilde{n}_0(\zeta)\Psi(\zeta)},$$

где $\Psi(\zeta)$ — произвольная устойчивая функция, а полиномы $a^*(\zeta)$ и $b^*(\zeta)$ удовлетворяют уравнению

$$a^*(\zeta)\tilde{n}_0(\zeta) + b^*(\zeta)\tilde{d}_0(\zeta) = 1.$$

Грубость стабилизирующих регуляторов

В [10] было показано, что любой стабилизирующий регулятор является **грубым**, т.е. при малых изменениях параметров управляемого объекта сохраняется устойчивость замкнутой системы⁷. Пусть номинальная (расчетная) и фактическая передаточные функции объекта имеют вид:

$$\tilde{P}_0(\zeta) = \frac{\tilde{n}(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta)}, \quad \tilde{P}(\zeta) = \frac{\tilde{n}(\zeta) + \varepsilon_n(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta) + \varepsilon_d(\zeta)},$$

где $\varepsilon_n(\zeta)$ и $\varepsilon_d(\zeta)$ — полиномы с достаточно малыми по модулю коэффициентами. Тогда при использовании регулятора

⁷ Для непрерывных систем это не всегда так — см. [15].

$\tilde{C}(\zeta) = \frac{\tilde{a}(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)}$ номинальный и фактический характеристические

полиномы имеют вид

$$\tilde{\Delta}_0(\zeta) = \tilde{a}(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}(\zeta), \quad \tilde{\Delta}(\zeta) = \tilde{\Delta}_0(\zeta) + \tilde{\Delta}_1(\zeta)$$

где $\tilde{\Delta}_1(\zeta) = \tilde{a}(\zeta)\varepsilon_n(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\varepsilon_d(\zeta)$.

Предположим, что регулятор $\tilde{C}(\zeta)$ — стабилизирующий, и полином $\tilde{\Delta}_0(\zeta)$ устойчив. Если степени характеристических полиномов $\tilde{\Delta}_0(\zeta)$ и $\tilde{\Delta}(\zeta)$ равны, при достаточно малых по модулю коэффициентах $\varepsilon_n(\zeta)$ и $\varepsilon_d(\zeta)$ полином $\tilde{\Delta}(\zeta)$ также будет устойчив, так как корни полинома непрерывно зависят от его коэффициентов и не могут скачком перейти из области устойчивости в область неустойчивости.

Если степень полинома $\tilde{\Delta}(\zeta)$ выше, чем степень $\tilde{\Delta}_0(\zeta)$, при малых коэффициентах $\varepsilon_n(\zeta)$ и $\varepsilon_d(\zeta)$ его старшие коэффициенты также малы по модулю. При этом новые корни «приходят из бесконечности», и полином $\tilde{\Delta}(\zeta)$ не может иметь неустойчивых корней (внутри единичного круга). Поэтому при малых отклонениях параметров объекта от номинальных система остается устойчивой, т.е., обладает свойством грубости. Строгое доказательство этого факта приводится в [10].

3. АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

3.1. Дискретизация непрерывных процессов

Один из широко распространенных инженерных методов исследования цифровых систем основан на их дискретизации, т.е. переходе к дискретным моделям, описывающим процессы только в моменты квантования $t_k = kT$ при целых $k \geq 0$. В связи с этим возникают следующие задачи:

- для функции $g(t)$ с известным преобразованием Лапласа $G(s)$ построить z -преобразование решетчатой функции $g[k] = g(kT)$ при целых $k \geq 0$;
- построить решетчатую функцию $y[k] = y(kT)$, полученную при квантовании аналогового сигнала $y(t)$ на выходе непрерывного объекта, управляемого цифровым регулятором;
- найти значения сигнала $y(t)$ не только в моменты квантования, но и между ними.

Квантование непрерывных функций

Пусть заданы функция $g(t)$, такая что $g(t) = 0$ при $t < 0$, и интервал квантования T . Построим решетчатую функцию $g[k] = g(kT)$, и найдем ее z -преобразование:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]z^{-k}.$$

Такую процедуру будем обозначать $G(z) = Z\{g(t)\}$.

Теперь предположим, что известно преобразование Лапласа $G(s)$. С помощью обратного преобразования Лапласа (или по таблицам) можно найти соответствующий ему оригинал $g(t)$ и затем построить функцию $G(z)$ как z -преобразование для последовательности $g[k] = g(kT)$. Такой переход от $G(s)$ к $G(z)$ будем символически обозначать $G(z) = Z\{G(s)\}$.

Пусть, например, $G(s) = \frac{1}{s - \alpha}$. По таблицам (см. приложение) находим соответствующий оригинал

$$g(t) = e^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Тогда $g[k] = g(kT) = e^{\alpha kT}$ и по определению

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha kT} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}. \quad (65)$$

Существует возможность прямого перехода от $G(s)$ к $G(z)$ с помощью интегральной формулы [1,2].

Восстановление непрерывных функций

Пусть известно z -преобразование $G(z)$ решетчатой функции, полученной при квантовании некоторой непрерывной функции $g(t)$ с периодом T .

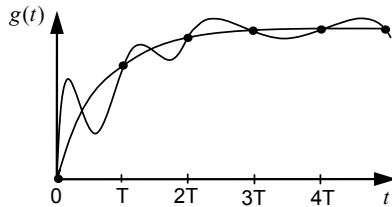


Рис. 27. Восстановление непрерывного сигнала

Для восстановления значений $g[k] = g(kT)$ в моменты квантования можно использовать интегральную формулу обратного z -преобразования:

$$g[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z) z^k \frac{dz}{z}.$$

Она позволяет вычислить значения функции только в моменты квантования, а значения непрерывного сигнала $g(t)$ между этими моментами не могут быть определены однозначно. Одной решетчатой функции может соответствовать множество аналоговых

сигналов, и по дискретному изображению $G(z)$ невозможно определить, какая из них подвергалась квантованию (рис. 27). Это еще раз демонстрирует тот факт, что при квантовании происходит потеря информации.

Модифицированное z -преобразование

Для того, чтобы получить возможность анализировать процессы между моментами квантования, различными авторами были введены дискретные преобразования, названные модифицированным дискретным преобразованием Лапласа [1] и модифицированным z -преобразованием [2,3]. Мы рассмотрим вариант модифицированного z -преобразования, получивший наибольшее распространение в отечественной литературе [5].

Предположим, что импульсный элемент выбирает значения функции $g(t)$ не при $t_k = kT$, а в моменты $t_{k\varepsilon} = kT + \varepsilon T$, где $0 \leq \varepsilon < 1$. Тогда модифицированное z -преобразование для сигнала $g(t)$, обозначаемое как $Z_{\varepsilon}\{g(t)\}$, представляет собой z -преобразование для решетчатой функции

$$g[k, \varepsilon] = g(kT + \varepsilon T),$$

которое может быть вычислено как

$$G(z, \varepsilon) = Z_{\varepsilon}\{g(t)\} = Z\{g[k, \varepsilon]\} = \sum_{k=0}^{\infty} g[k, \varepsilon] z^{-k}.$$

Пусть, например, $g(t) = e^{at}$. Тогда

$$Z_{\varepsilon}\{g(t)\} = Z\{e^{a(kT + \varepsilon T)}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{a(kT + \varepsilon T)} z^{-k} = e^{a\varepsilon T} \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT} z^{-k}.$$

Применив формулу суммы бесконечно убывающей последовательности (в соответствующей области сходимости), получим:

$$G(z, \varepsilon) = \frac{e^{a\varepsilon T} z}{z - e^{aT}}.$$

Для вычисления модифицированного z -преобразования более сложных функций существуют подробные таблицы (см. приложение или [5,6]).

В зарубежной литературе используется несколько иной вариант модифицированного z -преобразования [2,3]:

$$Z_m\{g(t)\} = Z\{g(kT - T + mT)\}, \quad 0 \leq m < T.$$

Связь между этими преобразованиями выражается формулой

$$Z_\epsilon\{g(t)\} = z \cdot Z_m\{g(t)\}.$$

3.2. Аналоговые модели дискретных сигналов

Аналоговая модель экстраполятора

Как показано в разд. 1.4, экстраполятор – это элемент с дискретным входом и аналоговым выходом, который преобразует числовую последовательность $\{v[k]\}$ в аналоговый сигнал управления $u(t)$, поступающий на объект. Импульсная характеристика экстраполятора $h(t)$ (реакция на единичный дискретный импульс $\delta[k]$) – это функция непрерывного времени, так же, как и у линейных непрерывных систем. Покажем, что экстраполятор можно рассматривать как аналоговый элемент при соответствующем преобразовании входного сигнала.

Входной сигнал экстраполятора $\{v[k]\}$ можно представить в виде

$$v[k] = \sum_{m=0}^{\infty} v[m] \delta[k - m]. \quad (66)$$

Действительно, при любом k в правой части остается только одно ненулевое слагаемое (при $m = k$). Используя принцип суперпозиции для линейных систем, сигнал $u(t)$ можно записать как реакцию на вход (66):

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v[k] h(t - kT). \quad (67)$$

Теперь рассмотрим линейную непрерывную систему с импульсной характеристикой $h(t)$ при импульсном входе

$$v^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v[k] \delta(t - kT). \quad (68)$$

Здесь $\delta(t)$ обозначает единичный импульс (дельта-функцию Дирака), такой что для некоторой функции $f(t)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = f(t). \quad (69)$$

Как известно из теории линейных стационарных систем, реакция непрерывной системы на сигнал (68) равна

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) v^*(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} v[k] \delta(t - \tau - kT) d\tau.$$

Учитывая (69), получаем (67).

Таким образом, реакция экстраполятора с импульсной характеристикой $h(t)$ на дискретный сигнал (66) совпадает с реакцией непрерывной системы с такой же импульсной характеристикой на аналоговый сигнал (68). Это позволяет рассматривать экстраполятор как аналоговое звено с импульсной характеристикой $h(t)$ и передаточной функцией

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

при условии, что дискретный входной сигнал (66) заменяется импульсным аналоговым сигналом (68).

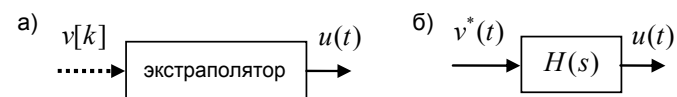


Рис. 28. Модели экстраполятора: а) гибридная; б) аналоговая

Как будет показано далее, использование аналоговой модели экстраполятора позволяет легко находить преобразования Лапласа непрерывных сигналов в цифровой системе.

Импульсная модель дискретного сигнала

Исследуем более подробно свойства сигналов вида

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] \delta(t - kT), \quad (70)$$

где $\{g[k]\}$ – некоторая числовая последовательность. Преобразование Лапласа для (70) может быть найдено как

$$G^*(s) = \int_0^{\infty} g^*(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g[k] \delta(t - kT) e^{-st} dt.$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования, и используя свойство дельта-функции (69), имеем

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] e^{-ksT}.$$

При замене $z = e^{-sT}$ получаем z -преобразование последовательности $\{g[k]\}$:

$$G(z) = G^*(s) \Big|_{e^{sT}=z} = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k}.$$

Предположим, что последовательность $\{g[k]\}$ была получена квантованием непрерывного процесса $g(t)$ с изображением по Лапласу $G(s)$. Если функция $G(s)$ убывает при $|s| \rightarrow \infty$ по крайней мере как $1/|s|$, то связь между $G^*(s)$ и $G(s)$ определяется формулой [9]

$$G^*(s) = \frac{g(0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(s + kj\omega_s), \quad (71)$$

где $\omega_s = 2\pi/T$ – угловая частота квантования. Если же $G(s)$ убывает при $|s| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/|s|$, имеем $g(0) = 0$, так что первое слагаемое в правой части (71) отсутствует.

Из формулы (71) следует периодичность преобразования Лапласа импульсного сигнала:

$$G^*(s + mj\omega_s) = G^*(s) \quad (72)$$

для любого целого m .

3.3. Дискретизация простейшей импульсной системы

Дискретная модель объекта с экстраполятором

Простейшей импульсной системой будем называть разомкнутую систему, состоящую из экстраполятора и линейного непрерывного объекта, которые заданы передаточными функциями $H(s)$ и $F(s)$ соответственно (см. рис. 29).

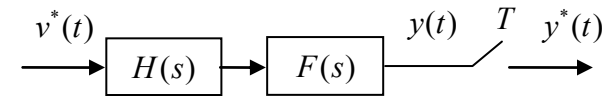


Рис. 29. Простейшая импульсная система

Входной импульсный сигнал $v^*(t)$ вида (70), моделирующий последовательность $\{v[k]\}$, проходит через звено с передаточной функцией $F_H(s) = F(s)H(s)$. Тогда преобразование Лапласа сигнала $y(t)$ вычисляется как

$$Y(s) = F_H(s) V^*(s) = F(s) H(s) V^*(s). \quad (73)$$

Предположим из сигнала $y(t)$ выбираются (с помощью импульсного элемента) дискретные значения $y[k] = y(kT)$. Найдем связь между последовательностями $\{v[k]\}$ и $\{y[k]\}$.

Будем считать, что функция $F_H(s)$ убывает при $|s| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/|s|$, так что $y(0) = 0$. Для этого достаточно, чтобы $\lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s) = 0$, поскольку для любого экстраполятора $h(0) \neq \infty$ и передаточная функция $H(s)$ убывает по крайней мере как $1/|s|$.

Импульсный сигнал

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \delta(t - kT)$$

при $y[0] = 0$ имеет изображение по Лапласу

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] e^{-ksT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + kj\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_H(s + kj\omega_s) V^*(s + kj\omega_s)$$

Учитывая, что $V^*(s + kj\omega_s) = V^*(s)$ в силу свойства периодичности (72), получаем

$$Y^*(s) = W^*(s) V^*(s), \quad (74)$$

где

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_H(s + kj\omega_s). \quad (75)$$

Можно показать (см. [8,10]), что все изображения в (74) являются функциями переменной $z = e^{sT}$ (или $\zeta = e^{-sT}$). Тогда

$$Y(z) = W(z) V(z),$$

где $V(z)$ и $Y(z)$ обозначают z -преобразования последовательностей $\{v[k]\}$ и $\{y[k]\}$, а функция

$$W(z) = W^*(s) \Big|_{e^{sT}=z} = Z\{F_H(s)\} \quad (76)$$

представляет собой **дискретную модель приведенной непрерывной части** – объекта с экстраполятором. Она определяет линейный закон преобразования управляющей последовательности $\{v[k]\}$ в $\{y[k]\}$ при нулевой начальной энергии системы. Если рассматривать процессы в простейшей цифровой системе только в моменты квантования, можно сказать, что $W(z)$ – это ее дискретная передаточная функция.

Замкнутые формулы

Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$F(s) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{s - \beta_i}, \quad (77)$$

где α_i и β_i ($i=1, \dots, N$) — постоянные. Найдем дискретную модель для объекта (77) с фиксатором нулевого порядка:

$$H(s) = H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Для $F_H(s) = F(s) H_0(s)$ из (76) и (75) следует

$$W(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-(s+kj\omega_s)T}}{s + kj\omega_s} F(s + kj\omega_s) \Big|_{e^{sT}=z}. \quad (78)$$

Заметим, что при $\omega_s = 2\pi/T$ и целых k имеем:

$$1 - e^{-(s+kj\omega_s)T} = 1 - e^{-sT} e^{-kj\omega_s T} = 1 - e^{-sT} e^{-j2\pi k} = 1 - e^{-sT}.$$

Поэтому, выполнив замену $e^{sT} = z$, получаем

$$W(z) = (1 - e^{-sT}) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(s + kj\omega_s)}{s + kj\omega_s} \Big|_{e^{sT}=z} = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}.$$

Для функции (77) имеем

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{s(s-\beta_i)}\right\} = \frac{z-1}{z} \sum_{i=1}^N Z\left\{\frac{\alpha_i}{s(s-\beta_i)}\right\}.$$

В последнем равенстве использовано свойство линейности z -преобразования. По таблице в приложении находим

$$Z\left\{\frac{\alpha_i}{s(s-\beta_i)}\right\} = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \frac{(e^{\beta_i T} - 1)z}{(z-1)(z - e^{\beta_i T})}.$$

Тогда окончательно

$$W(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \frac{e^{\beta_i T} - 1}{z - e^{\beta_i T}}. \quad (79)$$

Из формулы (79) видно, что полюса непрерывной передаточной функции $F(s)$ преобразуются в полюса дискретной модели $W(z)$ по правилу

$$\beta_i \rightarrow z_i = e^{\beta_i T}.$$

Если непрерывная система устойчива, т.е. $\operatorname{Re} \beta_i < 0$ для всех i , дискретная модель также устойчива, поскольку $|z_i| < 1$.

К сожалению, получить простые зависимости для преобразования нулей передаточной функции при квантовании не удастся, существуют только предельные результаты (при очень больших или очень малых периодах квантования).

Процессы между моментами квантования

Для вычисления непрерывного сигнала на выходе объекта управления можно вычислить обратное преобразование Лапласа для изображения $Y(s)$ (73). Такой подход, развитый в [10], позволяет получить аналитическое выражение для сигнала $y(t)$ при известном входном сигнале, однако приводит к громоздким вычислениям.

Наибольшее распространение получил второй метод, основанный на использовании модифицированного z -преобразования. Рассмотрим последовательность $\{y[k, \varepsilon]\}$ значений сигнала $y(t)$ в моменты $t_{k\varepsilon} = kT + \varepsilon T$, где $0 \leq \varepsilon < T$. Связь между смещенным z -преобразованием выходного сигнала $y(t)$ и z -преобразованием входной последовательности $\{v[k]\}$ определяется **модифицированной дискретной передаточной функцией**:

$$W(z, \varepsilon) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{V(z)}.$$

Для системы, изображенной на рис. 29, она может быть вычислена как

$$W(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon \{F_H(s)\} = Z_\varepsilon \{F(s)H(s)\}$$

по таблицам модифицированного z -преобразования (см. приложение и [5,6]).

Пусть $F(s)$ имеет вид (77) и используется экстраполятор нулевого порядка. Тогда

$$W(z, \varepsilon) = \frac{z-1}{z} \sum_{i=1}^n Z_\varepsilon \left\{ \frac{\alpha_i}{s(s-\beta_i)} \right\}.$$

По таблицам модифицированного z -преобразования находим

$$Z_\varepsilon \left\{ \frac{\alpha_i}{s(s-\beta_i)} \right\} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \left(1 - \frac{e^{\beta_i \varepsilon T} (z-1)}{z - e^{\beta_i T}} \right).$$

Окончательно

$$W(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot \frac{(e^{\beta_i \varepsilon T} - 1)z - (e^{\beta_i \varepsilon T} - e^{\beta_i T})}{z - e^{\beta_i T}}.$$

Легко проверить, что при подстановке $\varepsilon = 0$ последнее выражение совпадает с (79).

Дискретизация моделей в пространстве состояний

Пусть непрерывный объект задан моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (80)$$

где $x(t)$ — вектор состояния, $u(t)$ — вектор управляющих воздействий, $y(t)$ — вектор выхода, A , B , C и D — постоянные матрицы соответствующего размера.

Пусть в момент времени $t_k = kT$ вектор состояния равен $x[k]$. Тогда решение линейного дифференциального уравнения в (80) при $kT \leq t \leq (k+1)T$ имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-kT)} x[k] + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Здесь e^{At} обозначает матричную экспоненту, которая определяется как сумма сходящегося ряда

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}.$$

Используя относительное смещение ε и выполнив замену переменных $t = kT + \varepsilon T$ и $\sigma = \tau - kT$, при $0 \leq \varepsilon < 1$ получаем

$$x(kT + \varepsilon T) = e^{A\varepsilon T} x[k] + \int_0^{\varepsilon T} e^{A(\varepsilon T - \sigma)} B u(kT + \sigma) d\sigma.$$

Будем считать, что на входе объекта используется фиксатор нулевого порядка, т.е., $u(t) = v[k]$ для $kT \leq t < (k+1)T$. Тогда

$$x(kT + \varepsilon T) = e^{A\varepsilon T} x[k] + \int_0^{\varepsilon T} e^{A(\varepsilon T - \sigma)} d\sigma B v[k], \quad 0 \leq \varepsilon < T,$$

Таким образом, уравнения состояния дискретной модели при $0 \leq \varepsilon < T$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} x[k, \varepsilon] &= \Phi(\varepsilon) x[k] + \Gamma(\varepsilon) v[k], \\ y[k, \varepsilon] &= C x[k, \varepsilon] + D v[k], \\ &= C \Phi(\varepsilon) x[k] + (D + C \Gamma(\varepsilon)) v[k] \end{aligned}, \quad (81)$$

где $\Phi(\varepsilon) = e^{A\varepsilon T}$, $\Gamma(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon T} e^{A(\varepsilon T - \sigma)} d\sigma B$. При $\varepsilon = 1$ получаем дискретную модель процессов в моменты квантования

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma v[k] \\ y[k] &= C x[k] + D v[k] \end{aligned}, \quad (82)$$

где $\Phi = e^{AT}$, $\Gamma = \int_0^T e^{A(\varepsilon - \sigma)} d\sigma B$.

Модели (81) и (82) точно описывают динамику объекта при условии, что входной сигнал $u(t)$ не меняется между моментами квантования. Если используется более сложный экстраполятор, матрица Γ изменится. Более того, в некоторых случаях (например, при наличии запаздывания в управлении [9]) в пер-

вом уравнении могут появиться члены, зависящие от предыдущих значений последовательности $\{v[k]\}$.

Применяя z -преобразование к левой и правой частям (82) при нулевых начальных условиях ($x[0] = 0$), получаем

$$\begin{aligned} zX(z) &= \Phi X(z) + \Gamma V(z) \\ Y(z) &= C X(z) + D V(z), \end{aligned} \quad (83)$$

где заглавные буквы обозначают изображения соответствующих последовательностей. Отсюда следует

$$Y(z) = [C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D] V(z) = W(z)V(z),$$

где $W(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D$ — дискретная передаточная функция разомкнутой системы.

3.4. Передаточные функции цифровых систем

Введение

В теории управления передаточные функции используются как инструмент исследования линейных стационарных непрерывных и дискретных систем. Цифровая система не является стационарной, поэтому для нее передаточная функция в классическом смысле не существует. Однако в литературе предложено два подхода, позволяющих использовать аппарат передаточных функций для исследования цифровых систем.

Во-первых, если входные сигналы поступают непосредственно на импульсный элемент, все непрерывные сигналы в системе будут зависеть только от значений входов в моменты квантования. Это явление называют **стробоскопическим эффектом** [10]. В этом случае система, рассматриваемая в дискретном времени, будет стационарной, и для нее существует дискретная передаточная функция. Для того, чтобы найти значения сигналов между моментами квантования, можно использовать модифицированные дискретные преобразования и модифицированные ДПФ.

Во-вторых, в монографии [10] разработана частотная теория линейных цифровых систем, основанная на понятии *параметри-*

ческой передаточной функции, которая зависит не только от комплексной переменной s , но и от времени t . Такой подход использует достаточно сложный математический аппарат и мы в конце раздела рассмотрим только его основные идеи.

Разомкнутые системы

В разд. 3.3 было показано, что ДПФ простейшей импульсной системы, изображенной на рис. 29, может быть найдена по формуле

$$W(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = Z\{F_H(s)\}.$$

Аналогично находится и модифицированная ДПФ:

$$W(z, \varepsilon) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{V(z)} = Z_\varepsilon\{F_H(s)\}.$$

Рассмотрим параллельное соединение импульсных систем (рис. 30). Здесь и далее $F_i(s)$ ($i = 1, 2$) обозначают передаточные функции непрерывных объектов с экстраполяторами.

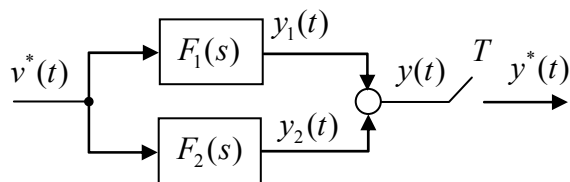


Рис. 30. Параллельное соединение

Для определения ДПФ параллельного соединения можно использовать свойство линейности z -преобразования:

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z) = Z\{F_1(s)\} + Z\{F_2(s)\},$$

$$W(z, \varepsilon) = W_1(z, \varepsilon) + W_2(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{F_1(s)\} + Z_\varepsilon\{F_2(s)\}.$$

Далее рассмотрим более сложную систему с двумя последовательно соединенными объектами (рис. 31).

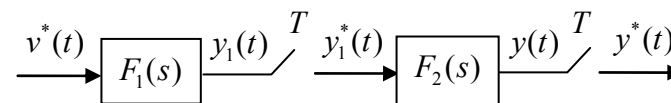


Рис. 31. Последовательное соединение

Пусть импульсные элементы работают синхронно и синфазно (измеряют сигналы в одни и те же моменты времени). Найдем изображение последовательности $\{y[k]\}$:

$$Y(z) = Z\{F_2(s)\} Y_1(z) = Z\{F_2(s)\} Z\{F_1(s)\} V(z).$$

Таким образом, ДПФ всей системы равна

$$W(z) = Z\{F_2(s)\} Z\{F_1(s)\}.$$

Надо заметить, что если между объектами нет импульсного элемента, ДПФ будет совсем другая, поскольку в общем случае

$$Z\{F_2(s) F_1(s)\} \neq Z\{F_2(s)\} Z\{F_1(s)\}.$$

Для модифицированного z -преобразования и модифицированной ДПФ находим

$$Y(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{F_2(s)\} Y_1(z) = Z_\varepsilon\{F_2(s)\} Z\{F_1(s)\} V(z),$$

$$W(z, \varepsilon) = Z_\varepsilon\{F_2(s)\} Z\{F_1(s)\}.$$

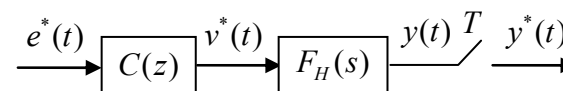


Рис. 32. Разомкнутая система с цифровым фильтром

Найдем ДПФ для разомкнутой системы с цифровым фильтром. Пусть закон преобразования входной последовательности $\{e[k]\}$ в последовательность управляющих сигналов $\{v[k]\}$, который задан дискретной передаточной функцией $C(z)$. Тогда при нулевой начальной энергии

$$V(z) = C(z) E(z),$$

где $E(z)$ и $V(z)$ – изображения последовательностей $\{e[k]\}$ и $\{v[k]\}$ соответственно. Поэтому изображение выхода в моменты квантования имеет вид

$$Y(z) = Z\{F_H(s)\}V(z) = Z\{F_H(s)\}C(z)V(z).$$

Таким образом, ДПФ системы равна

$$W(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = Z\{F_H(s)\}C(z).$$

Модифицированная ДПФ вычисляется аналогично:

$$W(z, \varepsilon) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{V(z)} = Z_{\varepsilon}\{F_H(s)\}C(z).$$

Замкнутые системы

Рассмотрим замкнутую систему, изображенную на рис. 33.

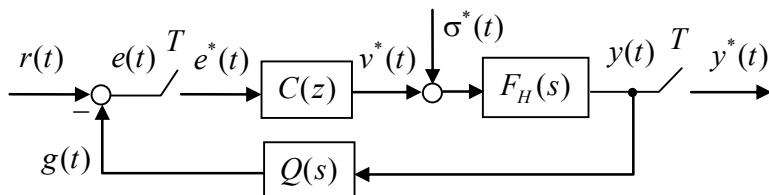


Рис. 33. Замкнутая система с цифровым регулятором

Для управления объектом с передаточной функцией $F_H(s)$ (включающей экстраполятор) используется цифровой регулятор с ДПФ $C(z)$. Измерительное устройство имеет передаточную функцию $Q(s)$, сигнал обратной связи $g(t)$ используется для формирования ошибки

$$e(t) = r(t) - g(t), \quad (84)$$

где $r(t)$ – задающее воздействие.

На объект действует возмущение в виде последовательности $\{\sigma[k]\}$, которая может быть представлена в непрерывном времени как эквивалентный аналоговый импульсный сигнал $\sigma^*(t)$. В

такой форме учитывают, например, шумы квантования по уровню в ЦАП [6].

Заметим, что сигнал помехи – дискретный, а непрерывный вход $r(t)$ поступает непосредственно на импульсный элемент. В силу стробоскопического эффекта все непрерывные сигналы в системе при нулевых начальных условиях полностью определяются последовательностями $\{\sigma[k]\}$ и $\{r[k]\}$, поэтому для дискретизированной системы можно построить ДПФ от входов r и σ к выходам y , e и v .

Как следует из полученных выше результатов,

$$Y(z) = Z\{F_H(s)\}C(z)E(z),$$

где заглавными буквами обозначаются z -преобразования соответствующих дискретных сигналов. Для того, чтобы найти $E(z)$, заметим, что в силу (84)

$$E(z) = R(z) - G(z),$$

где

$$G(z) = Z\{Q(s)F_H(s)\}C(z)E(z).$$

Тогда

$$E(z) = R(z) - Z\{Q(s)F_H(s)\}C(z)E(z).$$

Решая это уравнение относительно $E(z)$, находим

$$E(z) = \frac{1}{1 + Z\{Q(s)F_H(s)\}C(z)}R(z),$$

что дает

$$Y(z) = Z\{F_H(s)\}C(z)E(z) = \frac{Z\{F_H(s)\}C(z)}{1 + Z\{Q(s)F_H(s)\}C(z)}R(z),$$

так что ДПФ замкнутой системы $W(z)$ от входа r к выходу y имеет вид

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Z\{F_H(s)\}C(z)}{1 + Z\{Q(s)F_H(s)\}C(z)}.$$

Для модифицированной ДПФ получаем

$$W(z, \varepsilon) = \frac{Y(z, \varepsilon)}{R(z)} = \frac{Z_\varepsilon \{F_H(s)\} C(z)}{1 + Z \{Q(s) F_H(s)\} C(z)}.$$

Заметим, что в числителе используется модифицированное z -преобразование, а в знаменателе — обычное.

Управляющий сигнал может быть найден с помощью дискретной передаточной функции по управлению (от входа r к выходу v)

$$W_v(z) = \frac{V(z)}{R(z)} = \frac{C(z)}{1 + Z \{Q(s) F_H(s)\} C(z)}.$$

Для анализа точности системы используется **дискретная передаточная функция по ошибке** (от входа r к выходу e):

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + Z \{Q(s) F_H(s)\} C(z)}.$$

Если на объект действует возмущение в виде последовательности $\{\sigma[k]\}$ (рис. 33), можно найти **передаточную функцию по возмущению** (от входа σ к выходу y):

$$W_\sigma(z) = \frac{Y(z)}{\Sigma(z)} = \frac{Z \{F_H(s)\}}{1 + Z \{Q(s) F_H(s)\} C(z)},$$

где $\Sigma(z)$ — z -преобразование последовательности $\{\sigma[k]\}$.

Когда система имеет ДПФ?

Как следует из определения (24), дискретная передаточная функция определена для дискретных систем, входом и выходом которых являются числовые последовательности.

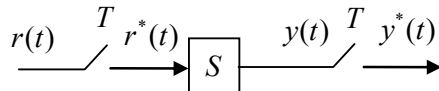


Рис. 34. Цифровая система, имеющая ДПФ

Рассмотрим цифровую систему, показанную на рис. 34, где S обозначает некоторый преобразователь дискретных сигналов

(последовательностей), моделируемых как импульсные сигналы, в аналоговые сигналы.

ДПФ системы определяется как отношение z -преобразований последовательностей $\{y[k]\}$ и $\{r[k]\}$, измеряемых в моменты $t_k = kT$, при нулевой начальной энергии:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}. \quad (85)$$

Формула (85) фактически означает, что последовательность $\{y[k]\}$ зависит только от дискретных отсчетов входного сигнала, а не от непрерывного процесса $r(t)$ на входе, т.е. считается, что **все входные сигналы поступают непосредственно на импульсные элементы**.

Системы, не имеющие ДПФ

Ранее мы специально рассматривали только те системы, в которых входные сигналы поступают на импульсные элементы и поэтому дискретная передаточная функция существует.

В реальных цифровых системах для того, чтобы избежать эффекта поглощения частот (см. разд. 1.2), на входе цифровой части устанавливают фильтр низких частот (предфильтр). Попробуем построить ДПФ для разомкнутой системы с предфильтром, изображенной на рис. 35.

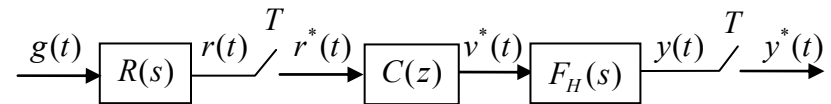


Рис. 35. Разомкнутая система с предфильтром

Очевидно, что

$$Y(z) = Z \{F_H(s)\} C(z) R(z).$$

Изображение сигнала $r(t)$ по Лапласу равно $R(s)G(s)$, где $G(s)$ — изображение входного сигнала $g(t)$. Поэтому z -преобразование последовательности $\{r[k]\}$ вычисляется как

$$R(z) = Z\{R(s)G(s)\}.$$

Таким образом,

$$Y(z) = Z\{F_H(s)\} C(z) Z\{R(s)G(s)\}.$$

Эта формула означает, что в правой части не удалось выделить $G(z)$ как множитель, поэтому такая система не имеет ДПФ.

Отсутствие ДПФ у системы на рис. 35 объясняется тем, что входной сигнал $g(t)$ поступает на непрерывный динамический объект, и сигнал $y(t)$ даже в дискретные моменты времени определяется не только последовательностью $\{g[k]\}$, а всеми значениями непрерывного сигнала $g(t)$.

На практике системы, не имеющие ДПФ, являются скорее правилом, чем исключением. Чаще всего внешние возмущения приложены непосредственно к непрерывному объекту. Такая ситуация характерна, в частности, для систем судовой автоматики. Например, система стабилизации судна по курсу может быть представлена схемой, изображенной на рис. 36. Здесь $F_1(s)$, $F_2(s)$, $Q(s)$ и $H(s)$ – передаточные функции привода, объекта управления, измерительного устройства и экстраполятора соответственно; $C(z)$ — ДПФ цифрового регулятора. Сигналы $\varphi_0(t)$, $\varphi(t)$, $\delta(t)$ и $\sigma(t)$ обозначают соответственно заданный курс, фактический курс, угол поворота вертикального руля и внешнее возмущение (например, силы и моменты, вызванные ветром и морским волнением).

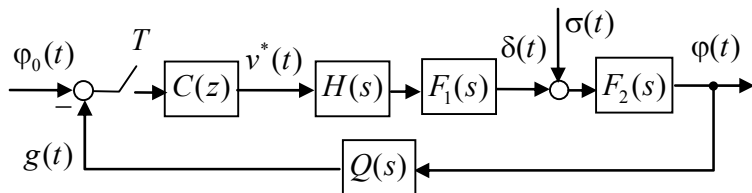


Рис. 36. Блок-схема системы стабилизации судна по курсу

Поскольку внешнее возмущение действует непосредственно

на непрерывный объект управления, все сигналы зависят от полной истории процесса $\sigma(t)$, а не только от его значений в моменты квантования. Поэтому такая система не имеет ДПФ от входа $\sigma(t)$ к любому выходу (например, $\varphi(t)$ или $\delta(t)$).

В то же время, если рассматривать вход $\varphi_0(t)$, поступающий на импульсный элемент, все ДПФ существуют. Например, ДПФ от входа $\varphi_0(t)$ к выходам $\varphi(t)$ и $\delta(t)$ равны

$$W_\varphi(z) = \frac{Z\{F_2(s)F_1(s)H(s)\}C(z)}{1 + Z\{Q(s)F_2(s)F_1(s)H(s)\}C(z)},$$

$$W_\delta(z) = \frac{Z\{F_1(s)H(s)\}C(z)}{1 + Z\{Q(s)F_2(s)F_1(s)H(s)\}C(z)}.$$

Модифицированные ДПФ определяются аналогично.

Строго говоря, если цифровая система не имеет ДПФ, применение методов теории дискретных систем для ее исследования некорректно. В такой ситуации наиболее грамотный (хотя и довольно сложный) подход состоит в применении точных методов, изложенных в [10,11]. Однако в инженерной практике часто используют приближенный подход, связанный с введением фиктивных (несуществующих) импульсных элементов на всех входах системы, чтобы после этой операции можно было найти все необходимые ДПФ.

Параметрическая передаточная функция

В монографии [10] был разработан метод **параметрических передаточных функций** (ППФ), который применим для любых цифровых систем с периодическим квантованием, независимо от того, поступают входные сигналы на импульсный элемент или действуют непосредственно на непрерывные объекты. Далее кратко излагаются основные идеи метода ППФ.

В современной теории управления цифровые системы рассматриваются в непрерывном времени как **периодически нестационарные системы**, т.е. системы с периодически изменяющимися параметрами. Для широкого класса периодических систем, в том числе и для цифровых систем с постоянным интер-

валом квантования, оказывается возможным ввести единую системную характеристику — параметрическую передаточную функцию, свойства которой аналогичны свойствам обычной передаточной функции линейных стационарных систем.

Любую систему направленного действия можно рассматривать как некоторый преобразователь входного сигнала в выходной. Если между входом и выходом системы существует однозначное соответствие, она может быть описана оператором, который обозначается символом \mathbf{U} (рис. 37). Используя операторное представление, удастся обобщить понятие передаточной функции на класс периодически нестационарных систем.

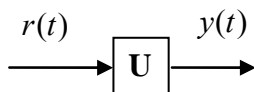


Рис. 37. Операторное описание системы

Сначала рассмотрим линейную стационарную непрерывную систему, для которой оператор \mathbf{U} задан линейным дифференциальным уравнением

$$y^{(N)} + b_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + b_0y = a_M r^{(M)} + a_{M-1}r^{(M-1)} + \dots + a_0r, \quad (86)$$

где a_i ($i = 0, \dots, M$) и b_i ($i = 0, \dots, N-1$) — вещественные коэффициенты, и верхний индекс (ℓ) обозначает производную по времени порядка ℓ . Известно, что такой системе соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (87)$$

Покажем, что она может быть также определена формулой

$$W(s) = \mathbf{U}[e^{st}]e^{-st},$$

где $\mathbf{U}[e^{st}]$ обозначает реакцию оператора \mathbf{U} на входной сигнал $r(t) = e^{st}$, причем s считается комплексной постоянной.

При $r(t) = e^{st}$ имеем $r^{(\ell)}(t) = s^\ell e^{st} = s^\ell r(t)$. Несложно показать, что функция $y(t) = W(s)e^{st}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (86), откуда следует

$$W(s) = y(t)e^{-st} = \mathbf{U}[e^{st}]e^{-st}.$$

Эту же идею можно использовать для построения параметрической передаточной функции периодической системы. В отличие от стационарного случая (когда параметры системы не изменяются во времени), ППФ будет зависеть от двух величин: комплексной переменной s и времени t , причем по времени она будет периодической с периодом T . Таким образом, ППФ цифровой системы можно строить как решение уравнения

$$W(s, t) = \mathbf{U}[e^{st}]e^{-st},$$

такое что $W(s, t) = W(s, t + T)$ [10].

Использование аппарата ППФ позволило создать новую теорию цифровых систем и найти точное решение некоторых задач, которые ранее решались только приближенно. С практической точки зрения метод ППФ особенно эффективен для решения задач оптимального синтеза регуляторов при случайных и детерминированных возмущениях, в том числе для систем сложной структуры, включающих звенья чистого запаздывания.

3.5. Устойчивость цифровых систем

Понятие устойчивости

Цифровая система, включающая непрерывные и дискретные элементы, может быть описана с помощью системы уравнений, в которой некоторые уравнения являются дифференциальными, а другие — разностными. Для этого случая также можно применить общее понятие устойчивости решения по А.М. Ляпунову (см. разд. 2.3).

Для линейной цифровой системы устойчивость (асимптотическая устойчивость) означает, что при любых начальных условиях все непрерывные и дискретные процессы в ней остаются ограниченными (соответственно, затухают).

Необходимо отметить, что устойчивость определяется по отношению к ненулевым начальным условиям при отсутствии внешних возмущений, поэтому наличие или отсутствие устойчивости не зависит от выбора входа и выхода.

Устойчивость одноконтурной цифровой системы

Рассмотрим систему на рис. 38. Непрерывная часть состоит из объекта с передаточной функцией $F(s)$, экстраполятора $H(s)$ и измерительного устройства $Q(s)$. Предполагается, что $F(s)$ – строго правильная функция, а $Q(s)$ – по меньшей мере правильная (степень ее числителя не больше степени знаменателя). Дискретный сигнал ошибки $\{e[k]\}$ обрабатывается цифровым регулятором с дискретной передаточной функцией $C(z)$.

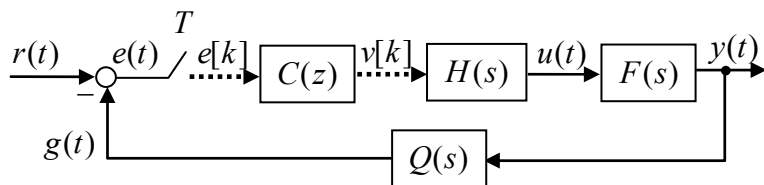


Рис. 38. Одноконтурная цифровая система

Пусть произведение $Q(s)F(s)$ — несократимая функция, и $p_i (i=1, \dots, L)$ — её различные полюса. Будем считать, что система на рис. 38 невырождена в смысле [10], т.е.,

1) для всех пар (p_i, p_k) при $i \neq k$ выполнено условие

$$e^{p_i T} \neq e^{p_k T}; \quad (88)$$

2) для всех $p_i (i=1, \dots, L)$ выполнено условие

$$H(p_i) \neq 0. \quad (89)$$

Условия (88)-(89) называются **условиями невырожденности**. Их выполнение зависит как от полюсов непрерывной части, так и от выбранного периода квантования. Период T , для которого выполняются условия невырожденности, называется **непатологическим** [11].

При выполнении условий невырожденности устойчивость цифровой системы на рис. 38 эквивалентна устойчивости дискретной системы, изображенной на рис. 25, с объектом

$$P(z) = Z\{Q(s)F_H(s)\}, \quad (90)$$

где $F_H(s) = F(s)H(s)$. Если все корни $\lambda_i (i=1, \dots, N)$ **характеристического уравнения**

$$1 + Z\{Q(s)F_H(s)\}C(z) = 0 \quad (91)$$

по модулю меньше единицы:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i=1, \dots, N, \quad (92)$$

цифровая система асимптотически устойчива. Важно, что устойчивость дискретизированной системы обеспечивает затухание всех процессов в непрерывном времени.

Уравнение (91) может быть записано в ином виде. Поскольку $P(z)$ и $C(z)$ — рациональные функции от переменной z , их можно представить в виде отношения полиномов:

$$P(z) = Z\{Q(s)F_H(s)\} = \frac{n(z)}{d(z)}, \quad C(z) = \frac{a(z)}{b(z)}.$$

Будем считать, что произведение $P(z)C(z)$ несократимо. Тогда уравнение (91) равносильно уравнению

$$a(z)n(z) + b(z)d(z) = 0. \quad (93)$$

Полином в левой части

$$\Delta(z) = a(z)n(z) + b(z)d(z) \quad (94)$$

называется **характеристическим полиномом** замкнутой цифровой системы. Для того, чтобы проверить устойчивость системы, надо решить уравнение (93) и проверить выполнение условия (92) для каждого из его корней.

Поскольку характеристическое уравнение (93), определяющее устойчивость цифровой системы, совпадает с характеристическим уравнением эквивалентной дискретной системы с объектом (90), для описания множества всех стабилизирующих регулято-

ров можно использовать результаты для дискретных систем, приведенные в разд. 2.5.

Стабилизированность в вырожденных случаях

Как и для дискретных систем (см. разд. 2.5), **стабилизированной** называется система, для которой существует регулятор, обеспечивающий затухание переходных процессов по всем координатам при любых начальных условиях.

Ранее мы рассматривали только системы, для которых

- 1) передаточная функция $Q(s)F(s)$ несократима;
- 2) выполняются условия невырожденности (88)-(89).

Для таких систем всегда можно найти стабилизирующий регулятор. Теперь мы исследуем вырожденные случаи, когда эти допущения не выполняются.

Рассмотрим цифровую систему управления непрерывным объектом с динамической обратной связью (рис. 39).

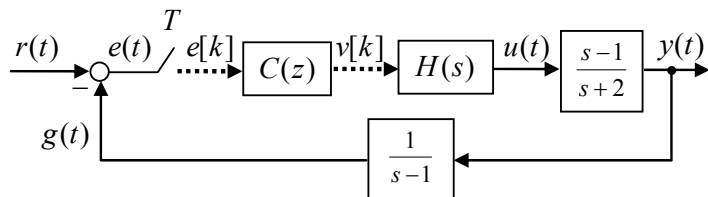


Рис. 39. Нестабильная цифровая система

Передаточная функция непрерывной части системы равна

$$Q(s)F(s) = \frac{s-1}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Поскольку в числителе и знаменателе есть неустойчивый общий множитель $\chi_s(s) = s-1$, эта система нестабилизирована даже с помощью непрерывного регулятора. Сокращать этот множитель нельзя, потому что при этом будет потеряно движение, вызванное соответствующими начальными условиями, и будет сделан неверный вывод об устойчивости.

Дискретная модель непрерывной части с экстраполятором $Z\{Q(s)F_H(s)\}$ (без сокращений) имеет в числителе и знамена-

теле неустойчивый множитель $\chi(z) = z - e^{-T}$, который всегда будет множителем характеристического полинома (94), поэтому дискретная модель также нестабилизирована.

Рассмотренный пример говорит о том, что если непрерывная часть системы нестабилизирована, то соответствующая дискретная модель также нестабилизирована.

Кроме того, существуют случаи, когда непрерывный объект стабилизируем, а его дискретная модель – нет. Рассмотрим систему на рис. 40. Очевидно, что непрерывная часть с несократимой передаточной функцией стабилизируема непрерывным регулятором.

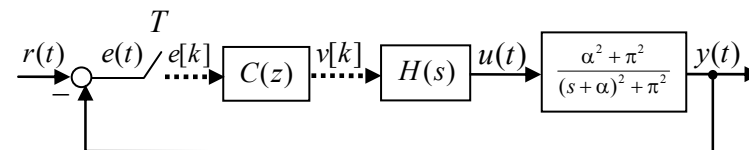


Рис. 40. Нестабильная цифровая система ($\alpha < 0$)

Пусть интервал квантования равен $T = 2$ и используется фиксатор нулевого порядка. Тогда ДПФ непрерывной части

$$Z\{F(s)H_0(s)\} = \frac{(1 - e^{-2\alpha})(z - e^{-2\alpha})}{(z - e^{-2\alpha})^2} \quad (95)$$

содержит в числителе и знаменателе общий множитель $\chi(z) = z - e^{-2\alpha}$, который может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от значения α . Если $\alpha < 0$, этот множитель неустойчивый ($|e^{-2\alpha}| > 1$) и система нестабилизирована.

Сократимость функции (95) объясняется тем, что в данном случае выбран **патологический** интервал квантования, для которого нарушено условие невырожденности (88). Функция $F(s)$ имеет полюса в точках $p_{1,2} = -\alpha \pm j\pi$. При $T = 2$ имеем

$$e^{-2\alpha \pm j2\pi} = e^{-2\alpha} (\cos 2\pi \pm j \sin 2\pi) = e^{-2\alpha},$$

т.е., условие (88) не выполнено при $i = 1, k = 2$. Отметим, что система неустойчива при любом экстраполяторе.

Таким образом, если условия невырожденности нарушаются для неустойчивого полюса передаточной функции непрерывного объекта, соответствующая цифровая система неустойчива.

Скрытые колебания

Скрытые колебания были обнаружены в 50-х годах прошлого века при изучении поведения непрерывных сигналов в цифровых системах между моментами квантования [2]. Это явление заключается в том, что дискретные отсчеты сигнала выхода дают принципиально неверное представление о динамике непрерывного процесса.

Рассмотрим простейшую импульсную систему с фиксатором нулевого порядка (рис. 41) при $T = 2$. Пусть на вход подается единичный дискретный скачок: $v[k] = 1 (k \geq 0)$. Тогда на выходе системы будет один из процессов, показанных на рис. 42.

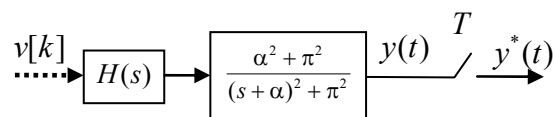


Рис. 41. Система, в которой есть скрытые колебания

Если рассматривать сигнал только в моменты квантования, кажется, что процесс монотонный, однако между этими моментами существуют сильные колебания. Это связано с тем, что в данном случае интервал квантования — патологический (нарушено первое условие невырожденности (88)) и в дискретной модели приведенной непрерывной части (95) происходит сокращение множителя $z - e^{-2\alpha}$ в числителе и знаменателе. Таким образом, передаточная функция непрерывной части имеет два разных полюса, а ДПФ дискретной модели — один. Это говорит о возможности скрытых колебаний, которые не проявляются в моменты квантования.

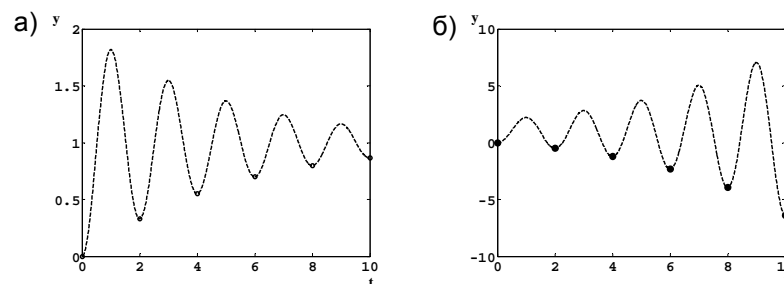


Рис. 42. Скрытые колебания а) $\alpha > 0$; б) $\alpha < 0$

При $\alpha > 0$ система устойчива, процесс сходится к значению $y_\infty = 1$ (рис. 42а). При $\alpha < 0$ система неустойчива (см. рис. 42б) и, более того, неустойчива, поскольку в дискретной модели (95) сокращается неустойчивый множитель.

3.6. Показатели качества

Переходные процессы

Традиционно в инженерной практике одной из основных характеристик системы управления считается ее **переходная характеристика** — реакция на единичный ступенчатый входной сигнал (рис. 43а).

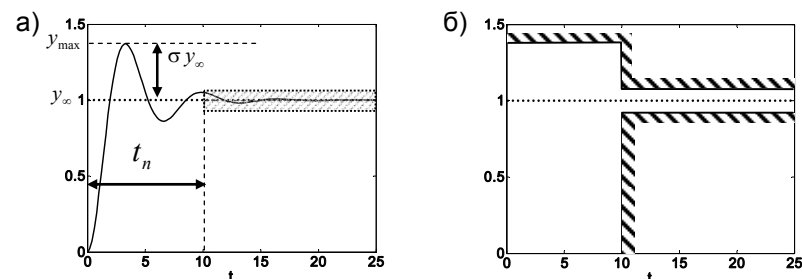


Рис. 43. Переходная характеристика: а) показатели качества; б) запретная зона

Время переходного процесса t_n определяется как интервал, по истечении которого переходная функция остается внутри 5%-ного коридора:

$$|y(t) - y_\infty| \leq 0,05y_\infty,$$

где y_∞ — установившееся значение выхода. Иногда используют 2%-ный или 1%-ный коридоры.

Перерегулирование σ определяется как

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\%,$$

где y_{\max} — наибольшее значение регулируемой величины. Для большинства систем допускается перерегулирование 10-30%, однако в некоторых случаях требуется обеспечить монотонный переходный процесс (без перерегулирования).

Требования к переходному процессу (допустимые величины t_n и σ) могут быть графически заданы в виде запретной зоны (рис. 43б).

Для построения переходной характеристики применяют аналитические и численные методы. Если входной сигнал поступает на импульсный элемент, для вычисления непрерывного процесса на выходе можно использовать модифицированное z -преобразование

$$Y(z, \varepsilon) = W(z, \varepsilon) R(z),$$

где $R(z)$ — z -преобразование входного сигнала, а $W(z, \varepsilon)$ — модифицированная ДПФ замкнутой системы.

Кроме того, сигнал выхода можно найти с помощью точных методов [3,4,10], однако расчетные формулы получаются весьма громоздкими. Поэтому переходная характеристика чаще всего строится по результатам компьютерного моделирования.

Запасы устойчивости

Для оценки запаса устойчивости цифровой системы можно использовать классические понятия запасов устойчивости по амплитуде g_m и по фазе φ_m , которые определяются по годографу Найквиста так же, как и для непрерывных систем.

Если $W_0(z)$ — дискретная передаточная функция приведенной непрерывной части, годограф Найквиста представляет собой кривую $W_0(e^{j\theta})$ при $\theta \in [0, \pi]$, изображенную на комплексной плоскости (рис. 44). Если разомкнутая система устойчива, эта кривая не должна охватывать точку $(-1, 0)$ (см. разд. 2.3).

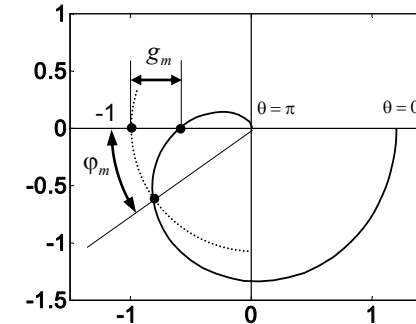


Рис. 44. Определение запасов устойчивости по годографу Найквиста

Запас устойчивости по амплитуде g_m — это наименьший дополнительный коэффициент усиления в контуре, при котором система теряет устойчивость⁸. То есть, при увеличении масштаба графика в g_m раз он пройдет через точку $(-1, 0)$, соответствующую границе устойчивости. При использовании логарифмических частотных характеристик запас устойчивости удобно измерять в децибелах, например, значению $g_m = 2$ соответствует запас $L_m = 20 \lg 2 \approx 6,02$ дБ.

Запас устойчивости по фазе φ_m — это минимальный дополнительный фазовый сдвиг (вызванный, например, запаздыванием сигнала обратной связи), при котором система становится неустойчивой при неизменном коэффициенте усиления контура.

⁸ Если объект неустойчив, то устойчивость теряется и при уменьшении коэффициента усиления контура.

То есть, при повороте графика на угол φ_m по часовой стрелке он пройдет через точку $(-1, 0)$.

Во многих случаях более информативен **показатель колебательности** M , который определяется как отношение максимума частотной характеристики замкнутой системы к ее значению при нулевой частоте (рис. 45).

Для того, чтобы система имела показатель колебательности меньше заданного значения M , частотная характеристика разомкнутой системы (годограф Найквиста) не должна заходить внутрь запретной области вокруг точки $(-1, 0)$ ⁹. Эта область представляет собой круг радиуса $\frac{M}{M^2 - 1}$ с центром в точке

$$\left(0, -\frac{M^2}{M^2 - 1}\right) [5, 6].$$

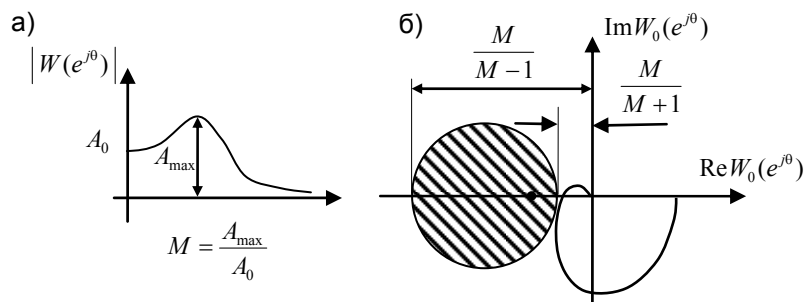


Рис. 45. Показатель колебательности: а) определение; б) запретная область для годографа Найквиста

Ошибка в установившемся режиме

В цифровых системах, так же, как и в непрерывных, можно использовать понятие установившихся ошибок при типовых входных сигналах.

⁹ В зарубежной литературе для решения подобных задач часто используют диаграмму Николса [8].

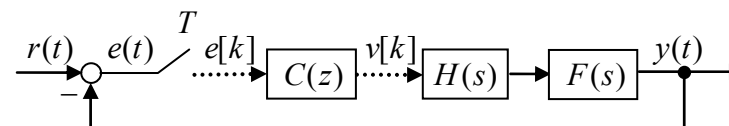


Рис. 46. Одноконтурная цифровая система

Пусть на вход одноконтурной системы (рис. 46) действует единичный ступенчатый сигнал $r(t) = r_0 \mathbf{1}(t)$, имеющий z -преобразование $R(z) = \frac{r_0 z}{z - 1}$, где r_0 – постоянная. Обозначим через $W_0(z)$ и $W_e(z)$ соответственно ДПФ разомкнутой системы и ДПФ замкнутой системы по ошибке:

$$W_0(z) = Z\{F(s)H(s)\}C(z), \quad W_e(z) = \frac{1}{1 + W_0(z)}.$$

Изображение ошибки в моменты квантования $\{e[k]\}$ равно

$$E(z) = W_e(z) R(z) = \frac{1}{1 + W_0(z)} \cdot \frac{r_0 z}{z - 1}.$$

По теореме о конечном значении (17)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e[k] &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = r_0 \lim_{z \rightarrow 1} W_e(z) \\ &= r_0 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + W_0(z)} = \frac{r_0}{1 + K}. \end{aligned}$$

где $K = \lim_{z \rightarrow 1} W_0(z)$ — коэффициент усиления контура в установившемся режиме (**добротность**). Таким образом, чем больше добротность, тем меньше установившаяся статическая ошибка.

Для того, чтобы система обладала **астицизмом** первого порядка, т.е. имела бы нулевую статическую ошибку при постоянном входном сигнале, необходимо обеспечить $K = \infty$, что выполнимо только если ДПФ $W_0(z)$ имеет полюс в точке $z = 1$, соответствующий цифровой модели интегратора.

Для линейно возрастающего входного сигнала $r(t) = r_0 t \cdot \mathbf{1}(t)$

с изображением $R(z) = \frac{r_0 T z}{(z-1)^2}$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e[k] &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = r_0 T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{W_e(z)}{z-1} \\ &= r_0 T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)[1+W_0(z)]} = \frac{r_0}{K_v}, \end{aligned}$$

где $K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W_0(z)$ — **добротность по скорости**. Для того, чтобы система обладала астатизмом второго порядка, т.е. имела бы нулевую установившуюся ошибку при линейно возрастающем сигнале, необходимо, чтобы функция $W_0(z)$ имела два полюса в точке $z = 1$ (включала двойной дискретный интегратор). Аналогично можно ввести понятие **добротности по ускорению** для входного сигнала $r(t) = r_0 t^2 \cdot \mathbf{1}(t)$.

Если рассматривать сигнал ошибки $e(t)$ в непрерывном времени, ситуация значительно усложняется. Как показано в [10], в общем случае при постоянном входном сигнале установившаяся ошибка представляет собой периодический процесс. Однако если передаточная функция экстраполятора при всех целых $k \neq 0$ обладает свойством

$$H(kj\omega_s) = 0, \quad (96)$$

установившиеся колебания отсутствуют.

Рассмотренные ранее фиксаторы нулевого и первого порядков обладают свойством (96). Действительно, для фиксатора нулевого порядка имеем

$$H_0(kj\omega_s) = \frac{1 - e^{-kj\omega_s T}}{kj\omega_s} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{j2\pi k}.$$

Используя равенство $e^{-j2\pi k} = \cos 2\pi k - j \sin 2\pi k = 1$, получаем (96). Аналогично можно показать, что условие (96) верно для фиксатора первого порядка.

В то же время для экспоненциального экстраполятора (12) условие (96) не выполняется. Поэтому при его использовании в системе устанавливаются периодические колебания, что в большинстве случаев нежелательно.

Интегральные показатели

Нередко требования к следящей системе задаются некоторым идеальным (желаемым) переходным процессом $\tilde{y}(t)$ при подаче на вход эталонного сигнала, например, единичного скачка. Реальный процесс $y(t)$ будет отличаться от желаемого процесса $\tilde{y}(t)$ (см. рис. 47).

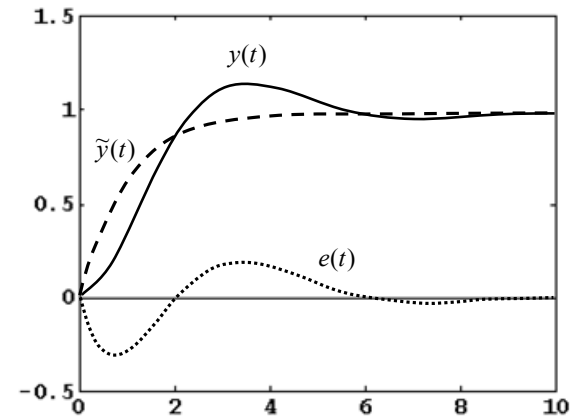


Рис. 47. Желаемый и реальный переходные процессы

Для оценки точности системы можно использовать интеграл от квадрата сигнала ошибки $e(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ на полуоси $t \in [0, \infty)$:

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt, \quad (97)$$

при условии, что он сходится. Эту величину также называют L_2 -нормой сигнала $e(t)$ или **интегральной квадратической ошибкой**.

Численно интеграл (97) несложно найти по результатам моделирования. Аналитическое выражение для (97) строится с помощью теоремы Парсеваля, из которой следует

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(-s)E(s) ds, \quad (98)$$

где $E(s)$ — изображение ошибки $e(t)$ по Лапласу. Для системы на рис. 46

$$E(s) = Y(s) - \tilde{Y}(s) = \frac{F(s)H(s)C(e^{sT})}{1 + Z\{F(s)H(s)\}C(e^{sT})} - \tilde{Y}(s),$$

где $\tilde{Y}(s)$ — изображение идеального сигнала, и при вычислении z -преобразования сделана замена $z = e^{sT}$ [10].

Иногда для того, чтобы ограничить управляющий сигнал, в критерий качества включают также интегральную квадратическую ошибку по управлению:

$$I = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \rho^2 e_u(t)] dt. \quad (99)$$

Здесь ρ^2 — неотрицательный весовой коэффициент, а ошибка по управлению $e_u(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$ вычисляется как разница между фактическим $u(t)$ и желаемым $\tilde{u}(t)$ сигналами управления. Аналитический способ вычисления интегралов типа (98) и (99) с помощью теоремы о вычетах приводится в [10].

Статистические показатели

Большинство явлений в природе носят случайный характер (например, морское волнение, помехи измерения, возмущения), поэтому важную роль в теории управления играют методы статистического анализа и синтеза [17]. Здесь мы только затронем эту

очень обширную тему, подробно с современными статистическими методами исследования цифровых систем можно познакомиться в книгах [5,10].

Случайные процессы представляют собой случайные функции времени. Если на входе системы действует случайный процесс, на выходе также будет случайный процесс.

Свойства случайных процессов описываются с помощью плотностей совместного распределения вероятностей случайных величин. Наиболее важные усредненные характеристики случайного процесса $x(t)$ — это его **математическое ожидание**

$$\bar{x}(t) = \mathbf{M}\{x(t)\},$$

и **дисперсия**

$$D_x(t) = \mathbf{M}\{(x(t) - \bar{x}(t))^2\},$$

где символ $\mathbf{M}\{\cdot\}$ означает математическое ожидание. Процессы, для которых $\mathbf{M}\{x(t)\} \equiv 0$ называются **центрированными**.

Стационарным называют случайный процесс, все характеристики которого не зависят от времени. На практике обычно достаточно ограничиться рассмотрением процессов, **стационарных в широком смысле**, для которых математическое ожидание и дисперсия постоянны:

$$\bar{x} = \mathbf{M}\{x(t)\} = \text{const},$$

$$D_x = \mathbf{M}\{(x(t) - \bar{x}(t))^2\} = \text{const},$$

а корреляционная функция

$$K(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{x(t_1)x(t_2)\}$$

зависит только от разности аргументов, т.е., $K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2)$.

Если на входы линейной цифровой системы действуют стационарные центрированные случайные процессы, все установившиеся непрерывные процессы в системе также будут центрированными, однако уже не будут стационарными.

Поскольку характеристики цифровой системы в непрерывном времени изменяются периодически с периодом T , дисперсия

любого непрерывного сигнала $y(t)$ будет периодична по времени, так что $D_y(t) = D_y(t + T)$. Точность системы в непрерывном времени оценивается с помощью **средней дисперсии**:

$$\bar{D}_y = \frac{1}{T} \int_0^T D_y(t) dt.$$

Для вычисления этой величины используются точные методы (см. [10,11]), хотя некоторые задачи в принципе могут быть решены и с помощью модифицированных ДПФ [5,6].

Робастность

Под **робастностью** (или грубостью) системы понимается ее свойство сохранять все существенные характеристики (устойчивость, показатели качества) при изменении параметров объекта и внешних возмущений.

Законы движения реального объекта всегда отличаются от модели, используемой разработчиком. Кроме того, объект может менять свои характеристики в зависимости от режима работы (например, от скорости движения судна) или от времени (дрейф параметров, мелкие неисправности). Поэтому при проектировании систем управления важно учитывать неопределенность информации об объекте и возмущениях.

Неопределенность может быть параметрическая и непараметрическая. При использовании **параметрической** неопределенности предполагается, что сама модель (количество и структура уравнений) известна точно, но некоторые параметры могут меняться, принимая значения внутри некоторой области. Часто используют интервальную неопределенность, когда для каждого параметра p независимо задается допустимый интервал $p \in [p_{\min}, p_{\max}]$. Например, постоянная времени в модели судна может меняться в широком диапазоне в зависимости от скорости движения.

Непараметрическая неопределенность задается в частотной области в виде ограничивающей функции. Например, модель объекта управления может быть задана в виде

$$F(s) = F_0(s) + \Delta(s)$$

(**аддитивная** неопределенность) или

$$F(s) = F_0(s)(1 + \Delta(s))$$

(**мультипликативная** неопределенность). Здесь $F_0(s)$ — некоторая **номинальная** (базовая) модель, а о функции $\Delta(s)$ известно лишь то, что ее частотная характеристика ограничена сверху как $|\Delta(j\omega)| \leq \Delta_{\max}(\omega)$, где $\Delta_{\max}(\omega)$ — некоторая заданная функция угловой частоты. При этом обычно требуется, чтобы неустойчивые полюса $F(s)$ и $F_0(s)$ совпадали с учетом кратности (т.е., неопределенность не должна добавлять новых неустойчивых полюсов).

В современной теории управления различают несколько характерных задач, связанных с робастностью:

1. **Робастная устойчивость** — регулятор должен обеспечивать устойчивость замкнутой системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной.
2. **Робастное качество** — регулятор должен обеспечивать заданное значение показателей качества замкнутой системы при всех допустимых отклонениях модели объекта от номинальной.
3. **Гарантирующее управление** — регулятор должен обеспечивать заданное значение показателей качества замкнутой системы при всех допустимых отклонениях параметров *внешних возмущений* от номинальных.

Изложение современных подходов к робастности непрерывных и дискретных систем дано в книге [15]. Робастная оптимизация цифровых систем с позиций так называемой H_∞ -теории рассматривается в [11].

4. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

4.1. Переоборудование непрерывных регуляторов

Задача переоборудования

Пусть спроектирована непрерывная система управления, удовлетворяющая всем необходимым требованиям (рис. 48). Здесь $F(s)$ и $C_0(s)$ обозначают передаточные функции объекта и регулятора.

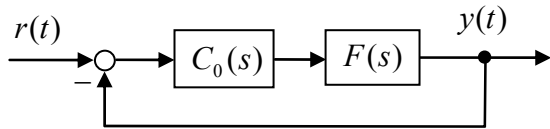


Рис. 48. Непрерывная система

Задача переоборудования заключается в том, чтобы заменить непрерывный регулятор $C_0(s)$ цифровым регулятором (который включает импульсный элемент, фильтр с ДПФ $C(z)$ и экстраполятор $H(s)$) так, чтобы сохранить все существенные свойства замкнутой системы (рис. 49).

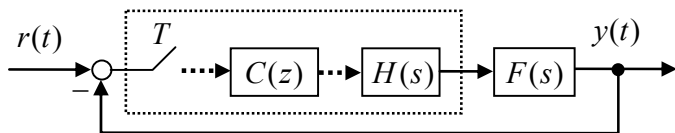


Рис. 49. Переоборудованная цифровая система

Методы переоборудования можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, которые направлены на обеспечение близости свойств отдельно взятого цифрового регулятора (например, его импульсной или переходной характеристики) к свойствам исходного непрерывного регулятора. При этом регулятор рассматривается изолированно, без учета других элементов, поэтому нельзя гарантировать даже устойчивость переоборудованной замкнутой системы.

Цель методов второй группы – обеспечить близость свойств замкнутых систем на рис. 48 и рис. 49. Такой подход позволяет гарантировать устойчивость цифровой системы, однако приводит к значительно более сложным алгоритмам.

Численное интегрирование

Простейшие методы переоборудования основаны на приближенной замене интегрирующего звена его дискретной моделью. Это позволяет получить ДПФ цифрового регулятора, сделав соответствующую замену переменных непосредственно в передаточной функции непрерывного регулятора $C_0(s)$.

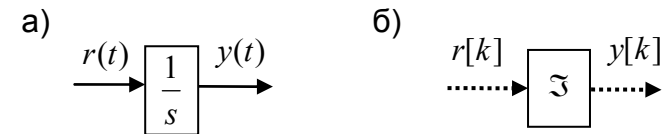


Рис. 50. Интегратор (а) и его дискретная модель (б)

Пусть $r(t)$ и $y(t)$ — входной и выходной сигнал интегратора на рис. 50а. Если известно значение $y[k] = y(kT)$, то

$$y[k+1] = y(kT + T) = y[k] + \int_{kT}^{kT+T} r(t) dt.$$

Непрерывный интегратор можно приближенно заменить дискретной моделью (рис. 50б):

$$y[k+1] = \mathfrak{Z}(y[k], y[k-1], \dots, r[k+1], r[k], \dots),$$

где $\mathfrak{Z}(\cdot)$ — некоторый алгоритм расчета следующего значения выхода, который может быть построен на основе любого метода численного интегрирования.

При использовании метода Эйлера, который называют также методом прямых разностей или методом левых прямоугольников (рис. 51а), имеем

$$y[k+1] = y[k] + Tr[k].$$

Применяя оператор сдвига вперед z , получаем

$$(z-1)y[k] = Tr[k],$$

откуда следует, что ДПФ этого звена равна $\frac{T}{z-1}$. Таким образом,

переоборудование по **методу Эйлера** сводится к замене

$$\frac{1}{s} \leftarrow \frac{T}{z-1} \quad \text{или} \quad s \leftarrow \frac{z-1}{T}. \quad (100)$$

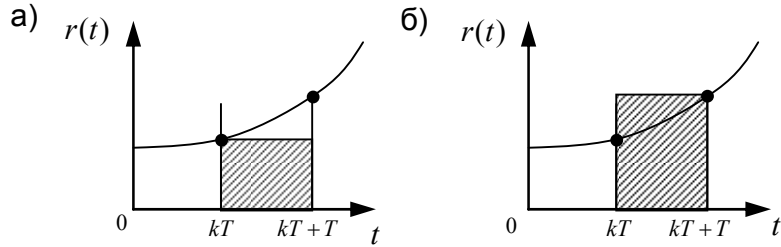


Рис. 51. Метод Эйлера (а) и метод обратных разностей (б)

Аналогично можно построить правило замены для **метода обратных разностей** или правых прямоугольников (рис. 51б):

$$s \leftarrow \frac{z-1}{zT}. \quad (101)$$

Из курса численных методов известно, что точность рассмотренных методов прямоугольников невысока.

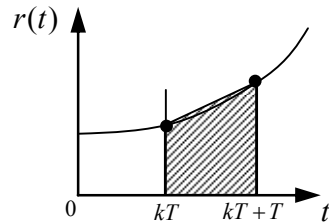


Рис. 52. Метод трапеций

Для повышения точности используется **метод трапеций** (рис. 52), который описывается формулой

$$y[k+1] = y[k] + \frac{T}{2} (r[k+1] + r[k]).$$

Соответствующая замена

$$s \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (102)$$

называется **преобразованием Тастина**¹⁰.

Пример. Дискретизация непрерывного регулятора

$$C_0(s) = K_0 \frac{s-\alpha}{s-\beta},$$

где K_0 , α и β – вещественные числа, с помощью методов Эйлера, обратных разностей и Тастина дает, соответственно, дискретные регуляторы

$$C_E(z) = K_0 \frac{z-(1+\alpha T)}{z-(1+\beta T)}, \quad C_B(z) = K_0 \frac{z(\alpha T-1)+1}{z(\beta T-1)+1},$$

$$C_T(z) = K_0 \frac{z(\alpha T-2)+(\alpha T+2)}{z(\beta T-2)+(\beta T+2)}.$$

Все регуляторы имеют тот же самый порядок (равный 1), что и непрерывный регулятор. Они достаточно хорошо моделируют регулятор $C_0(s)$ при малых интервалах квантования, однако при увеличении T их свойства существенно отличаются от свойств непрерывного оригинала.

Для повышения точности аппроксимации можно использовать более сложные методы, например, замены

$$s \leftarrow \frac{3}{T} \cdot \frac{z^2-1}{z^2+4z+1},$$

$$s \leftarrow \frac{10}{T} \cdot \frac{z^4+z^3-z-1}{z^4+6z^3+6z^2+6z+1}$$

соответствующие методам интегрирования Симпсона и Уэддла [6]. Однако при этом порядок переоборудованного регулятора будет выше, чем порядок непрерывного.

¹⁰ В англоязычной литературе — *Tustin transform*.

Частотная коррекция

Частотная характеристика системы представляет собой ее реакцию на периодический сигнал $e^{j\omega t}$, где ω – частота и $j = \sqrt{-1}$. Для непрерывного регулятора с передаточной функцией $C_0(s)$ она вычисляется как $C_0(j\omega)$. Частотная характеристика дискретного регулятора, полученного в результате переоборудования, определяется при подстановке $z = e^{j\omega T}$. Для преобразования Тастина получаем

$$C(e^{j\omega T}) = C_0\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right). \quad (103)$$

что очевидно не совпадает с $C_0(j\omega)$. Аргумент в правой части (103) можно привести к виду

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} = j \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\lambda,$$

где $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$ – псевдочастота. Это значит, что частотная характеристика цифрового регулятора на частоте ω совпадает с частотной характеристикой непрерывного регулятора на частоте λ . При $\omega < 2/T$ частота и псевдочастота мало отличаются, т.е., $\lambda \approx \omega$.

Можно показать, что другие рассмотренные преобразования также искажают частотную характеристику регулятора. Это может быть нежелательно, например, если надо дискретизировать полосовой фильтр или фильтр-пробку (блокирующий сигналы определенной частоты), поскольку полученный цифровой фильтр будет иметь другую рабочую частоту. В этом случае используется модифицированное преобразование Тастина с предварительной частотной коррекцией

$$s \leftarrow \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}(\omega_0 T/2)} \cdot \frac{z-1}{z+1}.$$

Легко проверить, что оно не дает искажений амплитудной характеристики на частоте ω_0 , хотя искажения на остальных частотах остаются.

Устойчивость регулятора

Рассмотрим вопрос о сохранении устойчивости регулятора при переоборудовании: если непрерывный регулятор устойчив, будет ли устойчив полученный дискретный регулятор?

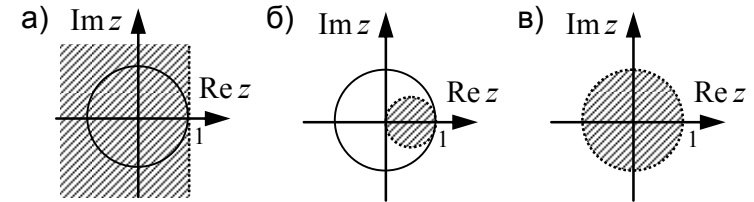


Рис. 53. Преобразование области устойчивости

При использовании **метода Эйлера** полуплоскость $\operatorname{Re} s < 0$ (область устойчивости непрерывных систем) отображается на полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$ (рис. 53а). Часть этой области находится вне единичного круга (области устойчивости дискретных систем), поэтому устойчивому регулятору $C_0(s)$ может соответствовать неустойчивый дискретный регулятор.

Пример. Пусть, например,

$$C_0(s) = \frac{1}{s - \beta}. \quad (104)$$

Используя замену (100), получаем дискретный регулятор с ДПФ

$$C(z) = \frac{T}{z - 1 - \beta T}. \quad (105)$$

которая имеет полюс в точке $z = 1 + \beta T$. Если регулятор $C_0(s)$ устойчивый ($\beta < 0$), его дискретная модель (105) становится неустойчивой при $\beta T < -2$.

Метод обратных разностей отображает полуплоскость $\operatorname{Re} s < 0$ на внутреннюю часть круга $|z - 0,5| < 0,5$ (рис. 53б).

Поэтому устойчивость регулятора всегда сохраняется, и даже неустойчивый регулятор при переоборудовании может стать устойчивым. Замена (101) для регулятора (104) дает ДПФ

$$C(z) = \frac{zT}{z(1 - \beta T) - 1},$$

которая имеет полюс в точке $z = \frac{1}{1 - \beta T}$. Таким образом, при

$\beta < 0$ устойчивость сохраняется, а при $\beta T > 2$ неустойчивому регулятору соответствует устойчивая дискретная модель.

Преобразование Тастина отображает полуплоскость $\operatorname{Re} s < 0$ на внутреннюю часть единичного круга (рис. 53в), т.е., устойчивость (или неустойчивость) регулятора сохраняется всегда.

В то же время ни один из описанных методов не может гарантировать сохранение устойчивости *замкнутой системы*, поскольку регулятор рассматривается изолированно и влияние остальных элементов системы вообще не учитывается.

Отображение нулей и полюсов

Один из простейших способов переоборудования сводится к отображению нулей и полюсов непрерывного регулятора из плоскости s в плоскость z по следующим правилам:

- Все полюса функции $C_0(s)$ преобразуются в полюса дискретного регулятора по закону $z = e^{sT}$.
- Все конечные нули функции $C_0(s)$ преобразуются в нули дискретного регулятора по закону $z = e^{sT}$.
- Все нули функции $C_0(s)$ в точке $s = \infty$ преобразуются в нули дискретного регулятора в точке $z = -1$. Если надо обес-

печить запаздывание на 1 такт, один из нулей отображается в точку $z = \infty$.

- Коэффициент усиления K цифрового регулятора $C(z)$ выбирается так, чтобы совпадали коэффициенты передачи на некоторой частоте. Во многих случаях используется условие, гарантирующее сохранение коэффициента усиления в установленном режиме:

$$\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = \lim_{s \rightarrow 0} C_0(s). \quad (106)$$

Считается, что передаточная функция имеет q нулей на бесконечности, если степень ее числителя меньше степени знаменателя на q .

Пусть непрерывный регулятор задан в виде

$$C_0(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^N (s - \beta_i)},$$

где $\alpha_i (i = 1, \dots, M)$ и $\beta_i (i = 1, \dots, N)$ – соответственно нули и полюса функции $C_0(s)$, а K_0 – коэффициент. Предполагается, что $N \geq M$, т.е., функция $C_0(s)$ имеет $N - M$ нулей на бесконечности. Тогда ДПФ дискретного регулятора, переоборудованный по методу отображения нулей и полюсов, имеет вид

$$C(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{\alpha_i T}) \prod_{i=1}^q (z + 1)}{\prod_{i=1}^N (z - e^{\beta_i T})},$$

где $q = N - M$ или $q = N - M - 1$ (для регулятора с запаздыванием). Коэффициент K выбирается из условия (106), которое принимает вид

$$K \cdot 2^q \frac{\prod_{i=1}^M (1 - e^{\alpha_i T})}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{\beta_i T})} = K_0 \frac{\prod_{i=1}^M (-\alpha_i)}{\prod_{i=1}^N (-\beta_i)}.$$

Пример. Пусть $C_0(s) = \frac{K_0}{s - \beta}$. Передаточная функция такого

регулятора имеет один полюс в точке $s = \beta$ и один нуль на бесконечности. Полюс отображается в точку $z = e^{\beta T}$, а нуль — в точку $z = -1$. Коэффициент усиления непрерывного регулятора в установившемся режиме равен 1. Для того, чтобы обеспечить выполнение условия (106), надо принять $K = K_0 \frac{e^{\beta T} - 1}{2\beta}$, так что

$$C(z) = K_0 \frac{e^{\beta T} - 1}{2\beta} \cdot \frac{z + 1}{z - e^{\beta T}}.$$

Аналогично можно получить регулятор, ДПФ которого — строго правильная функция (нуль в $s = \infty$ переходит в $z = \infty$):

$$C(z) = K_0 \frac{e^{\beta T} - 1}{\beta} \cdot \frac{1}{z - e^{\beta T}}.$$

Фиктивное квантование

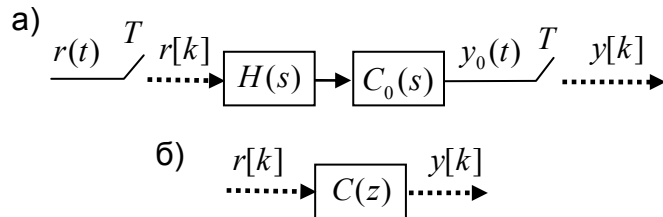


Рис. 54. Фиктивное квантование

Еще один метод переоборудования состоит в том, чтобы мысленно установить на входе непрерывного регулятора фиктивный (несуществующий) импульсный элемент с экстраполятором, а на выходе — еще один импульсный элемент (рис. 54а). Далее остается найти дискретную передаточную функцию $C(z)$ полученной дискретной системы (рис. 54б). Таким образом,

$$C(z) = Z\{C_0(s)H(s)\}.$$

При использовании фиксатора нулевого порядка имеем

$$C(z) = Z\left\{C_0(s) \frac{1 - e^{-sT}}{s}\right\} = \frac{z - 1}{z} Z\left\{\frac{C_0(s)}{s}\right\}. \quad (107)$$

При подаче на вход такого регулятора единичного дискретного скачка $r[k] = 1 (k \geq 0)$ с изображением $R(z) = \frac{z}{z - 1}$, имеем

$$Y(z) = C(z)R(z) = C(z) \frac{z}{z - 1}.$$

Учитывая (107), получаем

$$Y(z) = Z\left\{\frac{C_0(s)}{s}\right\} = Z\{Y_0(s)\},$$

где $Y_0(s) = C_0(s)/s$ — изображение выхода $y_0(t)$ непрерывного регулятора при подаче на его вход единичного скачка $r(t) = \mathbf{1}(t)$ с изображением $R(s) = 1/s$. Таким образом, реакции непрерывного и дискретного регуляторов на единичный скачок совпадают в моменты квантования.

Для сравнения методов переоборудования на рис. 55 показаны логарифмические амплитудные частотные характеристики различных дискретных моделей непрерывного регулятора

$C_0(s) = \frac{2}{s + 2}$. Сплошная линия соответствует непрерывному регулятору, пунктирная — переоборудованию с помощью преобразования Тастина, штриховая — фиктивному квантованию с фиксатором нулевого порядка.

При малых интервалах квантования все характеристики практически сливаются, для больших T при $\omega < 1$ ближе всего к оригиналу идет линия, соответствующая преобразованию Тастина, хотя при $\omega > 1$ коэффициент усиления такого регулятора резко уменьшается.

При малых интервалах квантования все характеристики практически сливаются, для больших T при $\omega < 1$ ближе всего к оригиналу идет линия, соответствующая преобразованию Тастина, хотя при $\omega > 1$ коэффициент усиления такого регулятора резко уменьшается.

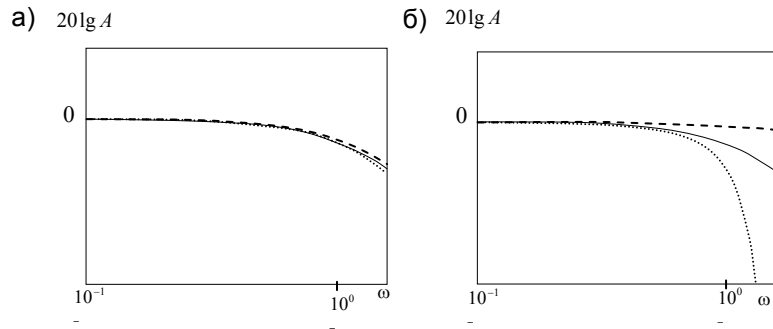


Рис. 55. Частотные характеристики: а) $T = 0,5$; б) $T = 2$.

Аппроксимация частотной характеристики

При использовании изложенных выше методов переоборудования регулятор рассматривался изолированно от остальных элементов замкнутой системы. Поэтому такая дискретизация в принципе может даже привести к потере устойчивости (при больших интервалах квантования). Кроме того, невозможно гарантировать и сохранение показателей качества системы.

Более совершенны методы, которые рассматривают замкнутую систему в целом. Один из возможных подходов основан на сближении частотных характеристик замкнутых систем (исходной и переоборудованной).

Рассмотрим систему на рис. 48, которая состоит из объекта и регулятора. Ее частотная характеристика может быть найдена как

$$W_c(j\omega) = \frac{F(j\omega)C_0(j\omega)}{1 + F(j\omega)C_0(j\omega)}.$$

Для цифровой системы на рис. 49 определим частотную характеристику как

$$W(j\omega) = \frac{W_0(e^{j\omega T})C(e^{j\omega T})}{1 + W_0(e^{j\omega T})C(e^{j\omega T})},$$

где $W_0(z)$ — дискретная передаточная функция приведенной непрерывной части:

$$W_0(z) = Z\{F(s)H(s)\}.$$

Интуитивно ясно, что чем точнее совпадают частотные характеристики, тем ближе свойства исходной и переоборудованной систем. Поэтому имеет смысл выбрать цифровой регулятор так, чтобы минимизировать интеграл

$$J_\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |W(j\omega) - W_c(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min$$

для заданного частотного диапазона $[\omega_1, \omega_2]$

Обычно при этом порядок регулятора выбирается заранее, так что остается наилучшим образом определить его неизвестные коэффициенты, т.е., решить задачу параметрической оптимизации с помощью численных методов нелинейного программирования.

Этот подход учитывает поведение замкнутой системы и позволяет задать диапазон частот, наиболее важный в данной задаче. Однако существуют примеры, когда построенная таким образом переоборудованная система оказывается неустойчива.

Оптимальное переоборудование

Еще один метод предполагает оптимизацию переходного процесса при действии на вход системы эталонного сигнала, например, единичного скачка.

Если на вход непрерывной системы на рис. 48 подается сигнал $r(t)$, имеющий изображение по Лапласу $R(s)$, изображение сигнала выхода $y_0(t)$ при нулевых начальных условиях равно

$$Y_0(s) = \frac{F(s)C_0(s)}{1 + F(s)C_0(s)} R(s).$$

Для цифровой системы на рис. 49 изображение выхода $y(t)$ имеет вид [3,4,10]

$$Y(s) = \frac{F(s)H(s)C(e^{sT})}{1 + Z\{F(s)H(s)\}C(e^{sT})} Z\{R(s)\},$$

где в z -преобразованиях сделана замена $z = e^{sT}$. Задача заключается в том, чтобы найти такой *оптимальный стабилизирующий* регулятор $C(z)$, при котором интегральная квадратическая ошибка между выходами исходной и переоборудованной систем достигает минимума:

$$J = \int_0^{\infty} (y_0(t) - y(t))^2 dt \rightarrow \min.$$

В соответствии с равенством Парсеваля [16] этот критерий (при условии сходимости интеграла) можно записать в виде

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [Y_0(-s) - Y(-s)] \cdot [Y_0(s) - Y(s)] dt \rightarrow \min.$$

Для этой задачи известно точное аналитическое решение (см. [4,10]), гарантирующее устойчивость получаемой замкнутой системы. Однако порядок оптимального регулятора $C(z)$ оказывается достаточно высоким.

4.2. Размещение полюсов

Многие практические методы проектирования цифровых регуляторов основаны на использовании дискретной модели непрерывной части. Все сигналы рассматриваются только в моменты квантования, т.е. система считается чисто дискретной. Это позволяет применять для синтеза регуляторов хорошо разработанные методы теории дискретных систем. В этом разделе рассматривается одна из важных классических задач – размещение полюсов ДПФ замкнутой дискретной системы.

Эквивалентная дискретная система

Рассмотрим одноконтурную цифровую систему, изображенную на рис. 56. Поскольку входной сигнал поступает на импульсный элемент, такая система имеет ДПФ и может рассматриваться в дискретном времени. Эквивалентная дискретная система показана на рис. 57, где $P(z)$ — дискретная модель объекта с экстраполятором: $P(z) = Z\{F(s)H(s)\}$.

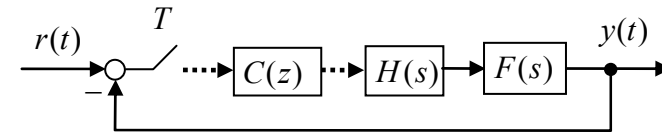


Рис. 56. Одноконтурная цифровая система

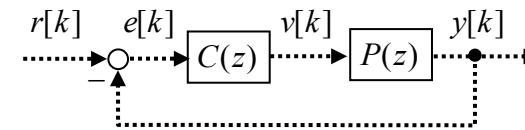


Рис. 57. Эквивалентная дискретная система

Пусть дискретная модель объекта и ДПФ регулятора записаны в виде отношения полиномов:

$$P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}, \quad C(z) = \frac{a(z)}{b(z)}. \quad (108)$$

Будем считать, что

$$\deg n(z) < \deg d(z), \quad \deg a(z) \leq \deg b(z). \quad (109)$$

т.е. объект и регулятор физически реализуемы, причем передаточная функция объекта – строго правильная. Последнее условие исключает из рассмотрения системы с алгебраическими циклами, которые не встречаются в прикладных задачах.

Как и для непрерывных систем, полюса ДПФ замкнутой системы определяют ее устойчивость и быстродействие. Часто их (а также соответствующие им движения) называют *модами* системы. Поэтому задача проектирования может быть поставлена следующим образом: найти цифровой регулятор, при котором полюса ДПФ замкнутой системы расположены в заданной области комплексной плоскости. Такую задачу называют задачей *модального синтеза регулятора*.

Регуляторы низкого порядка

В прикладных задачах желательно, чтобы порядок регулятора был наименьшим. Простейший пропорциональный регулятор (или *П-регулятор*) представляет собой усилитель $C(z) = K$. Тогда характеристический полином принимает вид

$$\Delta(z) = K n(z) + d(z). \quad (110)$$

Задача заключается в выборе коэффициента K так, чтоб все корни полинома $\Delta(z)$ были расположены внутри заданной области комплексной плоскости. Во всяком случае, они должны быть внутри единичного круга, кроме того, обычно ограничивается степень устойчивости и колебательность [13, 15].

Очевидно, что при $K = 0$ корни полинома в левой части (110) совпадают с корнями $d(z)$, поэтому с помощью П-регулятора всегда можно стабилизировать устойчивый объект (при малом K). Если объект неустойчив, то может оказаться, что никаким П-регулятором его стабилизировать нельзя.

При изменении K корни характеристического полинома $\Delta(z)$ описывают на комплексной плоскости траектории, которые называются **корневым годографом**. Построив эти кривые, можно попытаться выбрать такое значение K , при котором все корни лежат в заданной области (заметим, что это не всегда возможно).

Пример. Пусть объект с передаточной функцией

$$P(z) = \frac{z - 0,8}{(z + 0,5)(z - 0,1)(z - 0,3)}$$

требуется стабилизировать с помощью П-регулятора $C(z) = K$.

Корневой годограф показан на рис. 58. Объект устойчив в разомкнутом состоянии, при $K = 0$ корни характеристического полинома расположены в точках $z = -0,5$, $z = 0,1$ и $z = 0,3$, обозначенных белыми кружками. Хорошо видно, что первые два корня при увеличении K сближаются и при $K = 0,046$ превращаются в пару комплексно-сопряжённых корней. Далее они расходятся, так что при $K > 0,76$ оказываются за пределами единичной окружности, т.е. замкнутая система становится неустойчивой. Третий корень при $K \rightarrow \infty$ стремится к точке $z = 0,8$ (т.е. к нулю передаточной функции $P(z)$), оставаясь внутри области устойчивости.

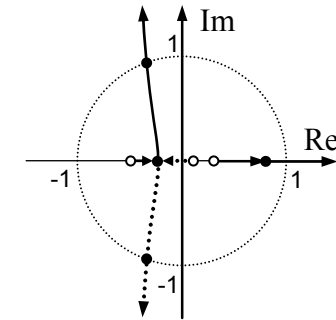


Рис. 58. Корневой годограф

Часто используется также дискретный пропорционально-интегральный регулятор (**ПИ-регулятор**), передаточная функция которого равна

$$C(z) = K_p + \frac{K_i}{z-1} = \frac{K_p z + K_i - K_p}{z-1}. \quad (111)$$

Тогда характеристический полином принимает вид

$$\Delta(z) = (K_p z + K_i - K_p) n(z) + (z-1)d(z). \quad (112)$$

Для полинома (112) можно выделить области на плоскости параметров $K_p - K_i$, соответствующие устойчивым системам. Такая процедура, разработанная Ю.И. Неймарком, называется **D-разбиением** [15].

Пример. Пусть для управления объектом с ДПФ $P(z) = \frac{1}{z-1}$ используется ПИ-регулятор (111). Тогда характеристический полином (112) имеет вид $\Delta(z) = z^2 + \delta_1 z + \delta_0$, где

$$\delta_1 = K_p - 2, \quad \delta_0 = 1 + K_i - K_p.$$

Применение условий устойчивости (43) дает

$$1 + K_i - K_p < 1 \Rightarrow K_i < K_p,$$

$$1 + K_i - K_p > K_p - 2 - 1 \Rightarrow K_i > 2K_p - 4,$$

$$1 + K_i - K_p > -K_p + 2 - 1 \Rightarrow K_i > 0.$$

Таким образом, область допустимых пар (K_p, K_i) ограничена прямыми $K_i = K_p$, $K_i = 2K_p - 4$ и $K_i = 0$ (заштрихованная область на рис. 59). В более сложных случаях для поиска области устойчивости используют численные методы.

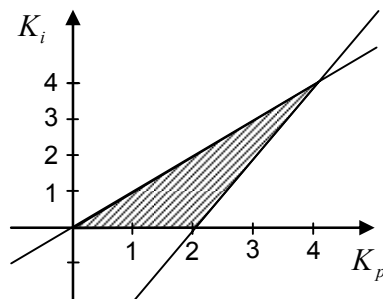


Рис. 59. Область устойчивости на плоскости $K_p - K_i$

В промышленных системах широко распространены пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы (**ПИД-регуляторы**). Классический аналоговый ПИД-регулятор имеет передаточную функцию

$$C_0(s) = K_{p0} + \frac{K_{i0}}{s} + \frac{K_{d0}s}{T_0s + 1}. \quad (113)$$

где K_{p0} , K_{i0} и K_{d0} — коэффициенты пропорционального, интегрального и дифференциального каналов, а T_0 — малая постоянная времени инерционного звена. При дискретизации (113) преобразуется к виду [9]

$$C(z) = K_p + \frac{K_i}{z-1} + \frac{K_d(z-1)}{z-\gamma},$$

где $\gamma = \exp(-1/T_0)$. Для выбора коэффициентов K_p , K_i и K_d можно зафиксировать один из них (например, K_p) и построить на плоскости область допустимого расположения оставшейся пары коэффициентов с помощью D-разбиения.

Задача размещения полюсов

При увеличении порядка регулятора увеличиваются и возможности, которыми обладает проектировщик. В частности, расширяется класс объектов, которые можно стабилизировать, полюса ДПФ замкнутой системы (корни характеристического полинома) можно разместить более точно.

Если порядок регулятора увеличить до $\deg d - 1$, полюса ДПФ замкнутой системы почти всегда¹¹ могут быть точно размещены в произвольных точках комплексной плоскости. Такая задача называется **задачей размещения полюсов**. Она может решаться как в пространстве состояний [9], так и в частотной области (через передаточные функции). Для одномерных систем проще использовать второй подход.

Рассмотрим дискретный объект и регулятор вида (108). Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\Delta(z) = a(z)n(z) + b(z)d(z).$$

Пусть задан желаемый характеристический полином

$$\Delta^*(z) = \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i), \quad |\lambda_i| < 1 \quad (i=1, \dots, N).$$

Требуется выбрать полиномы $a(z)$ и $b(z)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$a(z)n(z) + b(z)d(z) = \Delta^*(z). \quad (114)$$

Если полиномы $n(z)$ и $d(z)$ — взаимно простые (не имеют общих множителей), уравнение (114) разрешимо при любом $\Delta^*(z)$. Однако необходимо обеспечить еще и физическую реализуемость регулятора, т.е. выполнение условия $\deg a(z) \leq \deg b(z)$. Как будет показано, это можно гарантировать, если

¹¹ Исключение составляют системы, в которых ДПФ объекта сократима (полиномы $n(z)$ и $d(z)$ имеют общие множители).

$$\deg \Delta^*(z) \geq 2 \deg d(z) - 1. \quad (115)$$

Полиномиальные уравнения

Уравнение (114) представляет собой линейное полиномиальное уравнение, в котором неизвестными являются полиномы $a(z)$ и $b(z)$. Теория полиномиальных уравнений для скалярного случая подробно изложена в [14], ниже кратко излагаются её основные результаты.

Решением полиномиального уравнения (114) называется пара полиномов $a(z)$, $b(z)$, обращающая его в тождество. Уравнение (114) разрешимо тогда и только тогда, когда наибольший общий множитель полиномов $n(z)$ и $d(z)$ является делителем желаемого характеристического полинома $\Delta^*(z)$. В этом случае оно имеет бесконечное множество решений вида

$$\begin{cases} a(z) = a^*(z) + d(z)\xi(z) \\ b(z) = b^*(z) - n(z)\xi(z) \end{cases},$$

где $a^*(z)$ и $b^*(z)$ — любое решение уравнения (114), а $\xi(z)$ — нуль или произвольный полином.

Среди всех решений есть такое, для которого $\deg a(z) \leq \deg d(z) - 1$, оно называется **решением минимальной степени** относительно $a(z)$. При этом

$$\deg b(z) = \max \{ \deg n(z) - 1, \deg \Delta^*(z) - \deg d(z) \}, \quad (116)$$

поскольку по крайней мере два члена в уравнении (114) должны иметь одинаковую степень.

Существует также решение минимальной степени относительно $b(z)$, для которого $\deg b(z) \leq \deg n(z) - 1$ и

$$\deg a(z) = \max \{ \deg d(z) - 1, \deg \Delta^*(z) - \deg n(z) \}.$$

Если

$$\deg \Delta^*(z) < \deg n(z) + \deg d(z), \quad (117)$$

уравнение (114) называется **правильным**, и оба минимальных решения совпадают.

Покажем, что полиномиальное уравнение сводится к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Пусть, например, требуется решить уравнение

$$a(z)(z+2) + b(z)(z^2 - z + 1) = z + 0,5. \quad (118)$$

Поскольку условие (117) выполняется, уравнение — правильное и можно искать (единственное) минимальное решение в виде

$$a(z) = \alpha_1 z + \alpha_0, \quad b(z) = \beta_0,$$

где α_1 , α_0 и β_0 — неопределенные коэффициенты. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях (118):

$$\begin{aligned} z^0: & \quad 2\alpha_0 + \beta_0 = 0,5 \\ z^1: & \quad 2\alpha_1 + \alpha_0 - \beta_0 = 1 \\ z^2: & \quad \alpha_1 + \beta_0 = 0 \end{aligned}$$

В матричной форме

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где штриховые линии отделяют подматрицы, относящиеся к коэффициентам полиномов $a(z)$ и $b(z)$. Решая эту систему, получим $a(z) = 0,214z + 0,357$, $b(z) = -0,214$.

Физическая реализуемость регулятора

Проверим, какие решения полиномиального уравнения (114) соответствуют физически реализуемым регуляторам, для которых $\deg a(z) \leq \deg b(z)$.

Будем рассматривать решения минимальной степени относительно $a(z)$. За исключением особых случаев, можно считать,

что $\deg a(z) = \deg d(z) - 1$. Сначала предположим, что уравнение (114) правильное, т.е.,

$$\deg \Delta^*(z) < \deg n(z) + \deg d(z).$$

Учитывая, что для дискретных моделей реальных объектов имеем $\deg n(z) < \deg d(z)$, из (116) находим

$$\deg b(z) \leq \deg n(z) - 1 < \deg d(z) - 1 = \deg a(z).$$

Таким образом, $\deg b(z) < \deg a(z)$ и регулятор не является физически реализуемым.

Рассмотрим второй случай, когда уравнение (114) – неправильное. Тогда из (116) следует

$$\deg b(z) = \deg \Delta^*(z) - \deg d(z).$$

Таким образом, для того, чтобы ДПФ регулятора была правильной, а регулятор – физически реализуемым, достаточно выполнить условие

$$\deg b(z) \geq \deg d(z) - 1 \geq \deg a(z),$$

откуда следует (115).

В особых случаях (при специальном выборе полинома $\Delta^*(z)$) регулятор может оказаться физически реализуемым и при нарушении условия (115). Например, пусть $n(z) = 1$ и $d(z) = z^2 - 0,25$. Выбрав $\Delta^*(z) = z^2 + 0,25$, находим решение уравнения (114):

$$a(z) = 0,5 \quad \text{и} \quad b(z) = 1,$$

соответствующее физически реализуемому регулятору $C(z) = 0,5$. Если же выбрать $\Delta^*(z) = z^2 + z + 0,5$, решение (114) минимальной степени относительно $a(z)$ имеет вид

$$a(z) = z + 0,75 \quad \text{и} \quad b(z) = 1,$$

так что регулятор $C(z) = z + 0,75$ физически нереализуем.

Пример синтеза регулятора

Многие реальные технические объекты, например, привод жесткого диска компьютера, могут быть приближенно описаны моделью двойного интегратора с передаточной функцией

$$F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Применим метод размещения полюсов в задаче синтеза цифрового регулятора для управления таким объектом. При использовании фиксатора нулевого порядка

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

ДПФ приведенной непрерывной части равна

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{F(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}.$$

Получаем $n(z) = T^2(z+1)$ и $d(z) = 2z^2 - 4z + 2$. Выберем желаемый характеристический полином

$$\Delta^*(z) = z(z-0,5)(z-0,25) = z^3 - 0,75z^2 + 0,125z.$$

Минимальное решение полиномиального уравнения (114)

$$a(z)T^2(z+1) + b(z)(2z^2 - 4z + 2) = z^3 - 0,75z^2 + 0,125z$$

имеет вид

$$a(z) = \frac{1}{32T^2}(23z-17), \quad b(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{17}{32} \right)$$

и соответствует регулятору

$$C(z) = \frac{\frac{1}{16T^2}(23z-17)}{z + \frac{17}{32}}. \quad (119)$$

Поскольку полином $\Delta^*(z)$ был выбран в соответствии с условием (115), этот регулятор физически реализуем. Легко проверить, что при выборе $\Delta^*(z) = (z - 0,5)(z - 0,25)$ (с нарушением (115)) получаемое решение

$$a(z) = \frac{1}{32T^2}(17z - 11), \quad b = \frac{15}{64}$$

соответствует физически нереализуемому регулятору.

Размещение полюсов в плоскости ζ

Практически для всех моделей реальных объектов функция $P(z)$ – строго правильная (степень ее числителя меньше степени знаменателя), так что функция $\tilde{P}(\zeta) = P(z)|_{z=\zeta^{-1}}$ содержит множитель ζ в числителе:

$$\tilde{P}(\zeta) = \frac{\zeta \tilde{n}_0(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta)}, \quad (120)$$

где $\tilde{n}_0(\zeta)$ и $\tilde{d}(\zeta)$ – полиномы. В этом случае использование оператора запаздывания $\zeta = z^{-1}$ (вместо z) позволяет всегда получать физически реализуемые регуляторы [10].

Для рассмотренного выше двойного интегратора

$$\tilde{P}(\zeta) = \frac{T^2 \zeta (\zeta + 1)}{2(\zeta - 1)^2},$$

что дает $\tilde{n}(\zeta) = T^2 \zeta (\zeta + 1)$ и $\tilde{d}(\zeta) = 2\zeta^2 - 4\zeta + 2$. Выберем желаемый характеристический полином с корнями в точках $\zeta = 2$ и $\zeta = 4$:

$$\tilde{\Delta}^*(\zeta) = (\zeta - 2)(\zeta - 4) = \zeta^2 - 6\zeta + 8.$$

Решая уравнение

$$\tilde{a}(\zeta)\tilde{n}(\zeta) + \tilde{b}(\zeta)\tilde{d}(\zeta) = \tilde{\Delta}^*(\zeta),$$

находим

$$\tilde{a}(\zeta) = \frac{1}{4T^2}(23 - 17\zeta), \quad \tilde{b}(\zeta) = \frac{17}{8}\zeta + 4.$$

Поскольку $\tilde{b}(0) \neq 0$, такой регулятор, имеющий ДПФ

$$\tilde{C}(\zeta) = \frac{\frac{1}{4T^2}(23 - 17\zeta)}{4 + \frac{17}{8}\zeta} = \frac{\frac{1}{16T^2}(23\zeta^{-1} - 17)}{\zeta^{-1} + \frac{17}{32}}$$

физически реализуем. Заметим, что при замене $\zeta^{-1} = z$ он совпадает с выражением (119). Соответствующий характеристический полином в плоскости z равен

$$\Delta(z) = z(z - 0,5)(z - 0,25).$$

Таким образом, можно отметить две особенности решения задачи размещения полюсов в плоскости ζ :

1. При выполнении (120) всегда получается физически реализуемый регулятор. Поэтому далее мы будем использовать в основном методы синтеза в плоскости ζ .
2. Если порядок желаемого характеристического полинома $\tilde{\Delta}^*(\zeta)$ выбран ниже, чем $2 \deg d(z) - 1$, часть полюсов ДПФ замкнутой системы автоматически размещается в точке $z = 0$. За исключением особых случаев, их число равно $2 \deg d(z) - 1 - \deg \tilde{\Delta}^*(\zeta)$.

4.3. Аperiodическое управление

Размещение полюсов

Представляет интерес особый случай, когда все желаемые полюса в плоскости z располагаются в точке $z = 0$, т.е. $\Delta^*(z) = z^N$, где $N = \deg \Delta^*(z)$. При этом переходные процессы в цифровой системе заканчиваются за конечное время, что принципиально невозможно в линейных непрерывных системах.

При переходе в плоскость переменной ζ характеристический полином принимает вид

$$\tilde{\Delta}^*(\zeta) = a(\zeta)n(\zeta) + b(\zeta)d(\zeta) = 1,$$

так что ДПФ замкнутой системы на рис. 57 равна

$$W(\zeta) = \frac{CP}{1+CP} = \frac{an}{an+bd} = an.$$

Здесь и далее для упрощения записи мы будем опускать знак «тильда» и аргумент у передаточных функций и полиномов от ζ .

Пусть

$$W(\zeta) = an = q_0 + q_1\zeta^1 + \dots + q_{\ell-1}\zeta^{\ell-1} + q_{\ell}\zeta^{\ell},$$

где q_i ($i = 0, \dots, N$) — коэффициенты полинома. Это значит, что замкнутая система представляет собой фильтр с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр). Выход системы может быть вычислен как

$$y[k] = q_0 r[k] + q_1 r[k-1] + \dots + q_N r[k-N].$$

При подаче на вход единичного дискретного импульса или ступенчатого сигнала переходный процесс полностью заканчивается за N тактов. Это явление не имеет аналога для непрерывных систем. Такое управление иногда называют **апериодическим** (в англоязычной литературе — *deadbeat control*) [7,8,9].

Пример. Построим апериодический закон управления для двойного интегратора с фиксатором нулевого порядка:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

Дискретная модель приведенной непрерывной части имеет вид

$$P(z) = Z\{F(s)H_0(s)\} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}, \quad P(\zeta) = \frac{T^2\zeta(\zeta+1)}{2(\zeta-1)^2}.$$

Апериодический регулятор определяется в результате решения задачи размещения полюсов при выборе $\Delta^*(\zeta) = 1$. Соответствующее полиномиальное уравнение

$$a(\zeta)(T^2\zeta^2 + T^2\zeta) + b(\zeta)(2\zeta^2 - 4\zeta + 2) = 1$$

имеет минимальное решение

$$a(\zeta) = \frac{1}{4T^2}(5 - 3\zeta), \quad b(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\zeta,$$

соответствующее регулятору

$$C(\zeta) = \frac{\frac{1}{2T^2}(5 - 3\zeta)}{1 + \frac{3}{4}\zeta} = \frac{\frac{1}{2T^2}(\zeta^{-1} - 3)}{\zeta^{-1} + \frac{3}{4}}.$$

На рис. 60 показаны переходные процессы в цифровой системе при апериодическом управлении с периодами квантования $T = 0,2$ и $T = 1$.

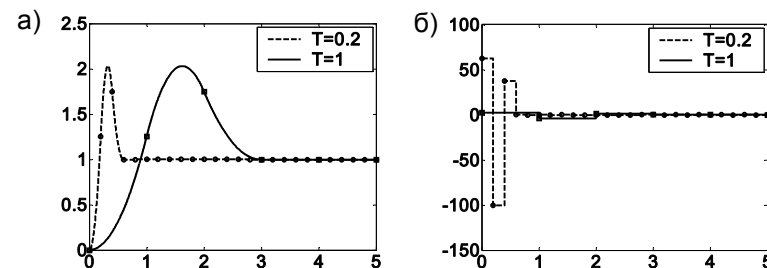


Рис. 60. Апериодическое управление: а) сигналы выхода; б) сигналы управления

Можно показать, что при уменьшении интервала квантования в m раз значение сигнала управления на первом шаге увеличивается в m^2 раз, поэтому при апериодическом управлении нежелательно использовать малые интервалы квантования.

Процессы минимальной длительности

Рассмотрим дискретизированную цифровую систему, в которой модели элементов заданы передаточными функциями от переменной ζ (рис. 61). Пусть дискретная модель объекта с экстраполятором описывается несократимой ДПФ

$$P(\zeta) = \frac{n(\zeta)}{d(\zeta)}, \quad (121)$$

где $n(\zeta)$ и $d(\zeta)$ – полиномы, а входной сигнал имеет изображение (ζ -преобразование) $R(\zeta) = \frac{p(\zeta)}{q(\zeta)}$, где $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ – полиномы.

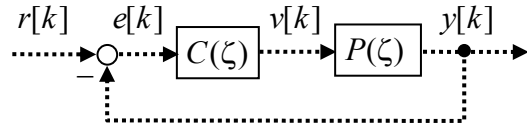


Рис. 61. Дискретизированная система

Требуется построить регулятор, обеспечивающий затухание дискретного сигнала ошибки $e[k]$ за минимальное время. Далее излагается решение этой задачи, основанное на идеях монографии [14].

ζ -преобразование последовательности $\{e[k]\}$ имеет вид

$$E(\zeta) = \frac{R}{1+CP} = \frac{pb d}{q(an+bd)}. \quad (122)$$

Для того, чтобы сигнал ошибки стал равен нулю за конечное число тактов, необходимо и достаточно, чтобы изображение $E(\zeta)$ было полиномом, т.е., числитель в (122) должен нацело делиться на знаменатель. Кроме того, полином $E(\zeta)$ должен иметь минимально возможную степень, при этом характеристический полином замкнутой системы $\Delta(\zeta) = an+bd$ должен быть устойчив.

Пусть $g(\zeta)$ — наибольший общий полиномиальный множитель полиномов $q(\zeta)$ и $d(\zeta)$, т.е.,

$$q(\zeta) = g q_0, \quad d(\zeta) = g d_0,$$

где $q_0(\zeta)$ и $d_0(\zeta)$ — полиномы, не имеющие общих множителей. Будем предполагать, что полином $q_0(\zeta)$ устойчив.

Выделим в полиномах $n(\zeta)$, $d_0(\zeta)$ и $p(\zeta)$ устойчивый и неустойчивый сомножители (корни которых расположены соответственно вне и внутри единичного круга в плоскости ζ):

$$\begin{aligned} n(\zeta) &= n^+(\zeta) n^-(\zeta), & d_0(\zeta) &= d^+(\zeta) d^-(\zeta), \\ p(\zeta) &= p^+(\zeta) p^-(\zeta), \end{aligned} \quad (123)$$

Здесь верхние индексы «+» и «-» обозначают соответственно устойчивые (все полюса которых расположены вне единичного круга) и строго неустойчивые полиномы (все их полюса находятся внутри единичного круга). Такое разложение полиномов на сомножители называют **факторизацией**.

Подставив (123) в (122), после сокращений получаем

$$E(\zeta) = \frac{p^+ p^- b d^+ d^-}{q_0 (a n^+ n^- + b g d^+ d^-)}.$$

Чтобы это выражение было полиномом, необходимо сократить множитель q_0 в знаменателе. Это возможно только при выборе $b(\zeta) = q_0 b_0$, где $b_0(\zeta)$ – полином. Тогда

$$E(\zeta) = \frac{p^+ p^- b_0 d^+ d^-}{a n^+ n^- + q_0 b_0 g d^+ d^-}.$$

Учтем, что в знаменателе этого выражения стоит характеристический полином замкнутой системы, который должен быть устойчивым. Следовательно, он не может сократить неустойчивые полиномы p^- и d^- . Тогда получаем

$$p^+ b_0 d^+ = \xi (a n^+ n^- + q_0 b_0 g d^+ d^-), \quad (124)$$

где $\xi(\zeta)$ – неизвестный полином, степень которого должна быть минимальна. Заметим, что выбрав

$$a(\zeta) = d^+ \theta \quad \text{и} \quad b_0(\zeta) = n^+ \varepsilon, \quad (125)$$

где $\theta(\zeta)$ и $\varepsilon(\zeta)$ – некоторые полиномы, можно сократить устойчивый множитель $n^+ d^+$ в левой и правой части (124), так что

$$p^+ \varepsilon = \xi (n^- \theta + q_0 g d^- \varepsilon).$$

Поскольку дискретная модель (121) несократима, полиномы n^- и $g d^-$ не могут иметь общих множителей. Кроме того, неустойчивый полином n^- и устойчивый q_0 также не имеют общих множителей. Следовательно, всегда можно выбрать полиномы $\theta(\zeta)$ и $\varepsilon(\zeta)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$n^- \theta + q_0 g d^- \varepsilon = p^+ \quad (126)$$

и полином $\varepsilon(\zeta)$ имел минимальную степень $\deg \varepsilon = \deg n^- - 1$. При этом $\xi = \varepsilon$, так что изображение ошибки имеет вид

$$E(\zeta) = p^- d^- \varepsilon,$$

а длительность переходного процесса (в тактах) равна

$$N = \deg E(\zeta) = \deg p^- + \deg d^- + \deg n^- - 1.$$

Как видно из последнего выражения, быстродействие системы ограничивают неустойчивые нули и полюса ДПФ объекта управления $P(\zeta)$, а также неустойчивые нули изображения входного сигнала $R(\zeta)$.

Используя (125), получим ДПФ регулятора в виде

$$C(\zeta) = \frac{\theta}{q_0 \varepsilon} \cdot \frac{d^+}{n^+}. \quad (127)$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$\Delta(\zeta) = \theta d^+ n + q_0 \varepsilon n^+ d = d^+ n^+ (n^- \theta + q_0 g d^- \varepsilon) = d^+ n^+ p^+$$

устойчив, поэтому замкнутая система устойчива и регулятор физически реализуем.

Как следует из (127), регулятор компенсирует устойчивые нули и полюса объекта управления. Такие регуляторы называются **компенсационными** [7]. Дискретная передаточная функция разомкнутой системы

$$C(\zeta) P(\zeta) = \frac{\theta}{q_0 \varepsilon} \cdot \frac{d^+}{n^+} \cdot \frac{n}{d}$$

сократима, поэтому в системе возможны скрытые колебания.

Компенсация допустима только для устойчивых нулей и полюсов, поскольку сокращенные нули и полюса модели объекта становятся корнями характеристического полинома замкнутой системы. При компенсации неустойчивых множителей вся система в целом будет неустойчива при ненулевых начальных условиях (см. разд. 2.5).

Если полином $p(\zeta)$ неизвестен, для определения полиномов $\theta(\zeta)$ и $\varepsilon(\zeta)$ вместо (126) используют уравнение [14]

$$n^- \theta + q_0 g d^- \varepsilon = 1.$$

Тогда кратчайший переходный процесс, достижимый при неизвестном $p(\zeta)$, имеет длительность

$$N = \deg p + \deg d^- + \deg n^- - 1.$$

Пример. Построим регулятор, обеспечивающий минимальную длительностью переходного процесса, при

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \quad R(s) = \frac{1}{s}.$$

Дискретные модели непрерывной части и входного сигнала имеют вид

$$P(\zeta) = \frac{\zeta(\gamma_1 \zeta + \gamma_0)}{(\zeta - 1)(\zeta - e^T)}, \quad R(\zeta) = \frac{-1}{\zeta - 1}$$

где $\gamma_1 = e^T - T - 1$, $\gamma_0 = T e^T + 1 - e^T$. Тогда

$$n(\zeta) = \zeta(\gamma_1 \zeta + \gamma_0), \quad d(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta - e^T) \\ p(\zeta) = -1, \quad q(\zeta) = \zeta - 1.$$

Учитывая, что $\gamma_0 > \gamma_1 \geq 0$ и $e^T > 1$ при всех $T > 0$, находим

$$n^+(\zeta) = \gamma_1 \zeta + \gamma_0, \quad n^-(\zeta) = \zeta, \quad p^+(\zeta) = -1, \quad p^-(\zeta) = 1,$$

$$v(\zeta) = \zeta - 1, \quad q_0(\zeta) = 1, \quad d^+(\zeta) = \zeta - e^T, \quad d^-(\zeta) = 1.$$

Решая уравнение (126), получаем $\theta = -1$ и $\varepsilon = 1$, что соответствует регулятору с ДПФ (127)

$$C(\zeta) = -\frac{\zeta - e^T}{\gamma_1 \zeta + \gamma_0} = \frac{e^T \zeta^{-1} - 1}{\gamma_0 \zeta^{-1} + \gamma_1}.$$

Регуляторы, построенные по этим формулам при $T = 0,2$ и $T = 1$, имеют вид

$$T = 0,2: \quad C(\zeta) = \frac{53,5 (\zeta^{-1} - 0,819)}{\zeta^{-1} + 0,936},$$

$$T = 1: \quad C(\zeta) = \frac{2,72 (\zeta^{-1} - 0,368)}{\zeta^{-1} + 0,718}.$$

Так как $E(\zeta) = 1$, сигнал ошибки совпадает с единичным дискретным импульсом $\delta[k]$ (10), и переходный процесс в моменты квантования заканчивается за 1 такт.

На рис. 62 показаны переходные процессы в замкнутых системах при подаче на вход единичного ступенчатого сигнала. По графикам видно, что при уменьшении интервала квантования мощность управляющего сигнала возрастает. Переходный процесс в моменты квантования действительно заканчивается за 1 такт, однако между этими моментами наблюдаются скрытые колебания, вызванные компенсацией нуля модели объекта. На плоскости z соответствующий нуль расположен в точке $z = -\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$

на отрицательной части вещественной оси. Как следует из рис. 18, такому множителю соответствует выраженный колебательный процесс, который и наблюдается на рис. 62.

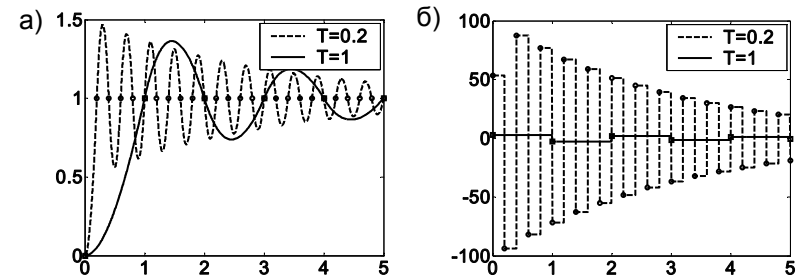


Рис. 62. Переходные процессы минимальной длительности: а) сигналы выхода; б) сигналы управления

Чтобы избавиться от нежелательных скрытых колебаний, надо отказаться от компенсации «опасного» нуля, включив соответствующий множитель в n^- :

$$n^+(\zeta) = 1, \quad n^-(\zeta) = \zeta(\gamma_1 \zeta + \gamma_0).$$

Тогда минимальное решение уравнения (126) имеет вид

$$\theta(\zeta) = -\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_0}, \quad \varepsilon(\zeta) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_0} \zeta + 1.$$

и соответствует регулятору с ДПФ (127)

$$C(\zeta) = -\frac{\zeta - e^T}{\gamma_1 \zeta + \gamma_1 + \gamma_0} = \frac{e^T \zeta^{-1} - 1}{(\gamma_1 + \gamma_0) \zeta^{-1} + \gamma_1}.$$

Хотя в этом случае переходные процессы заканчиваются не за 1 такт, а за два, скрытые колебания отсутствуют (рис. 63).

Итак, при использовании апериодического управления:

- все корни характеристического уравнения замкнутой системы размещаются в начале координат на плоскости z ;
- переходный процесс в моменты квантования заканчивается за конечное число тактов;
- при малых интервалах квантования требуется большая мощность управления;
- при компенсации нулей и полюсов объекта могут возникать скрытые колебания.

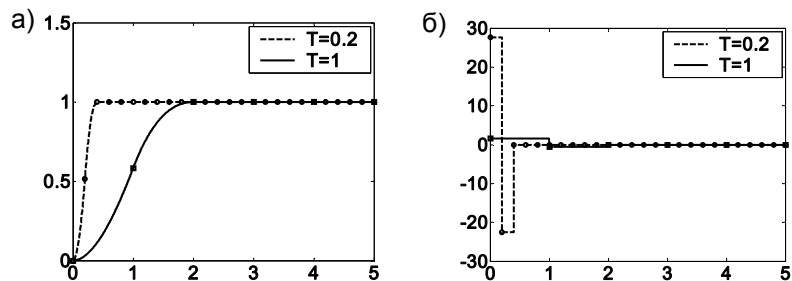


Рис. 63. Переходные процессы без компенсации нуля:
а) сигналы выхода; б) сигналы управления

4.4. Синтез регулятора по эталонной модели

Системы с двумя степенями свободы

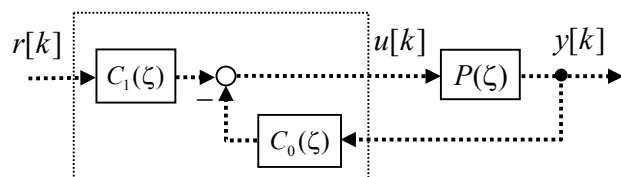


Рис. 64. Дискретная система с двумя степенями свободы

Рассмотрим дискретную систему с двумя регуляторами (рис. 64). Иногда такие системы называют системами комбинированного управления или системами с двумя степенями свободы (англ. — *two-degrees-of-freedom system, 2-DOF system*). Регулятор состоит из двух блоков — регулятора $C_0(\zeta)$ в контуре управления и корректирующего регулятора $C_1(\zeta)$, который обрабатывает только входной сигнал.

В классической схеме (рис. 57) $C_1(\zeta) = C_0(\zeta)$, что ограничивает возможности управления. Дело в том, что регулятор должен решать две задачи. С одной стороны, необходимо обеспечить достаточный запас устойчивости контура, требуемый уровень подавления помех и внешних возмущений. С другой стороны, желательно получить качественные переходные процессы. Часто не-

возможно удовлетворительно решить обе задачи с помощью одного регулятора, и разработчик вынужден выбирать компромиссное решение.

В схеме на рис. 64 каждая из упомянутых задач решается с помощью отдельного регулятора. Блок $C_0(\zeta)$ обеспечивает устойчивость контура, подавление помех и компенсацию внешних возмущений. Регулятор $C_1(\zeta)$ служит для того, чтобы повысить точность системы в установившемся режиме и получить переходные процессы с требуемыми характеристиками.

Полиномиальный алгоритм синтеза регулятора

Представим передаточные функции объекта и регуляторов в виде отношений полиномов:

$$P(\zeta) = \frac{n(\zeta)}{d(\zeta)}, \quad C_0(\zeta) = \frac{a_0(\zeta)}{b(\zeta)}, \quad C_1(\zeta) = \frac{a_1(\zeta)}{b(\zeta)},$$

где полином $b(\zeta)$ — наименьшее общее кратное знаменателей ДПФ цифровых регуляторов. Тогда схема на рис. 64 может быть в полиномиальном виде (рис. 65).

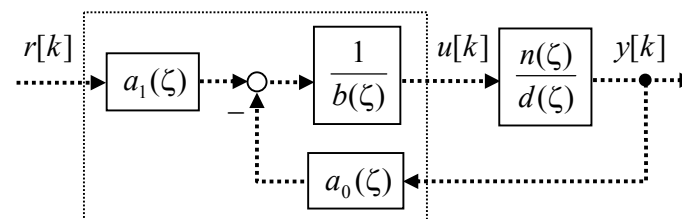


Рис. 65. Полиномиальное представление

Пусть задана некоторая желаемая устойчивая передаточная функция замкнутой системы (эталонная модель)

$$W_m(\zeta) = \frac{n_m(\zeta)}{d_m(\zeta)},$$

где $n_m(\zeta)$ и $d_m(\zeta)$ — полиномы, причем полином $d_m(\zeta)$ — устойчивый. Требуется выбрать полиномы $a_0(\zeta)$, $a_1(\zeta)$ и $b(\zeta)$ так,

чтобы ДПФ $W(\zeta)$ замкнутой системы на рис. 65 совпадала с $W_m(\zeta)$, т.е.,

$$W(\zeta) = W_m(\zeta) \Rightarrow \frac{a_1 n}{a_0 n + b d} = \frac{n_m}{d_m}. \quad (128)$$

Кроме равенства (128), при разработке алгоритма управления надо учитывать дополнительные ограничения:

- замкнутая система должна быть устойчива;
- регулятор должен быть физически реализуемым;
- для повышения точности необходимо обеспечить большой коэффициент усиления контура на низких частотах.

Условие (128) может быть записано в виде

$$\frac{a_1 n}{\Delta} = \frac{n_m}{d_m}, \quad (129)$$

где $\Delta(\zeta) = a_0 n + b d$ — устойчивый характеристический полином замкнутой системы. Если полином $n(\zeta)$ имеет неустойчивые множители, они не могут сократиться в левой части (129), поэтому должны входить в $n_m(\zeta)$. Представим полином $n(\zeta)$ в виде $n(\zeta) = n^+ n^-$, где $n^+(\zeta)$ и $n^-(\zeta)$ обозначают устойчивый и строго неустойчивый сомножители. Тогда требуется выбрать полином $n_m(\zeta)$ в виде

$$n_m(\zeta) = n^- n_{m0}, \quad (130)$$

где $n_{m0}(\zeta)$ — некоторый полином. При этом условие эквивалентности (128) запишется в виде

$$\frac{a_1 n^+}{a_0 n^+ n^- + b d} = \frac{n_{m0}}{d_m}. \quad (131)$$

Уравнение (131) может иметь множество решений. Например, в ряде случаев возможно управление без обратной связи (при $a_0 = 0$), или управление с обратной связью по ошибке (при

$a_1 = a_0$). Далее излагается метод синтеза регулятора с двумя степенями свободы, основанный на подходе работы [9]. При выполнении (130) он позволяет *гарантировать* выполнение всех требований.

Если полином n^+ не имеет общих множителей с n_{m0} , он должен быть делителем знаменателя в левой части (131). Он не может быть делителем d , поскольку дискретная модель объекта несократима. Следовательно, полином b должен делиться на n^+ . Кроме того, для повышения точности и обеспечения астатизма желательно включать в состав регулятора дискретное интегрирующее звено. Поэтому принимаем

$$b(\zeta) = n^+ (\zeta - 1)^\ell b_0, \quad (132)$$

где ℓ — натуральное число (порядок астатизма), а $b_0(\zeta)$ — некоторый полином. Тогда из (131) после сокращений получаем

$$\frac{a_1}{a_0 n^- + (\zeta - 1)^\ell b_0 d} = \frac{n_{m0}}{d_m},$$

что эквивалентно системе полиномиальных уравнений

$$\begin{aligned} a_1 &= n_{m0} g \\ a_0 n^- + b_0 (\zeta - 1)^\ell d &= d_m g \end{aligned} \quad (133)$$

относительно a_0 , a_1 и b_0 . Здесь $g(\zeta)$ — устойчивый полином, который можно выбирать произвольно. Заметим, что полином a_1 может быть сразу найден из первого уравнений в (133). Второе уравнение всегда разрешимо относительно полиномов a_0 и b_0 , если полиномы n^- и $(\zeta - 1)^\ell$ не имеют общих множителей.

Осталось ответить на вопрос: когда получаемый регулятор будет физически реализуемым? Для дискретных моделей реальных объектов выполняется (120), т.е. $n^-(0) = 0$. В силу устойчивости полиномов d_m и g имеем $d_m(0) g(0) \neq 0$. Тогда из второ-

го уравнения в (133) следует, что $b_0(0) \neq 0$ и с учетом (132) получаем $b(0) \neq 0$, т.е., оба регулятора физически реализуемы. Это говорит о том, что использование переменной ζ позволяет автоматически получать физически реализуемые регуляторы при единственном ограничении (130).

Заметим, что алгоритм решения этой задачи из [9], использующий вычисления в z -плоскости, требует специальных мер для обеспечения физической реализуемости регулятора.

Таким образом, при выполнении условия (130) алгоритм аналитического синтеза регулятора на основе эталонной модели можно записать следующим образом:

Шаг 1. Факторизовать полином $n(\zeta) = n^+(\zeta)n^-(\zeta)$.

Шаг 2. Задать желаемую ДПФ замкнутой системы вида

$$W_m(\zeta) = \frac{n_m}{d_m} = \frac{n^- n_{m0}}{d_m}$$

Шаг 3. Выбрать порядок астатизма системы ℓ .

Шаг 4. Выбрать устойчивый полином $g(\zeta)$.

Шаг 5. Найти решение полиномиального уравнения

$$a_0 n^- + b_0 (\zeta - 1)^\ell d = d_m g, \quad (134)$$

относительно полиномов $a_0(\zeta)$ и $b_0(\zeta)$.

Шаг 6. Построить ДПФ регуляторов

$$C_0(\zeta) = \frac{a_0}{b} = \frac{a_0}{n^+ (\zeta - 1)^\ell b_0}, \quad (135)$$

$$C_1(\zeta) = \frac{a_1}{b} = \frac{n_{m0} g}{n^+ (\zeta - 1)^\ell b_0}. \quad (136)$$

Выбор вспомогательного полинома g , который иногда называется **многочленом наблюдателя** [9], не влияет на ДПФ замкнутой системы от входа r к выходу y . Важно, чтобы он был устойчивым, поскольку его корни являются корнями характери-

стического полинома замкнутой системы. В большинстве случаев достаточно выбирать $g(\zeta) = 1$.

Тем не менее, полином g влияет на другие передаточные функции системы, например, на ДПФ по возмущению, примененному к входу объекта управления (рис. 66).

Передаточная функция замкнутой дискретной системы от входа σ к выходу y равна

$$W_\sigma(\zeta) = \frac{P}{1 + PC} = \frac{bn}{a_0 n + bd}$$

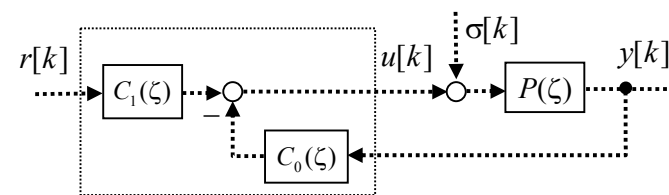


Рис. 66. Дискретная система с возмущением

Используя (135) и (134), получаем

$$W_\sigma(\zeta) = \frac{n(\zeta - 1)^\ell b_0}{d_m g}$$

Следовательно, корни полинома g являются полюсами $W_\sigma(\zeta)$.

Пример синтеза регулятора

Рассмотрим пример синтеза регулятора с двумя степенями свободы. Объект управления (электродвигатель постоянного тока) описывается передаточной функцией

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Требуется построить цифровой регулятор с двумя степенями свободы и фиксатором нулевого порядка, обеспечивающий переходные процессы, соответствующие эталонной непрерывной модели

$$W_{mc}(s) = \frac{\rho}{s + \rho}, \quad \rho = 1,5.$$

Построим дискретную модель объекта управления:

$$P(\zeta) = Z\{F(s)H_0(s)\}\Big|_{z=\zeta^{-1}} = \frac{K(z-\alpha)}{(z-1)(z-\beta)}\Big|_{z=\zeta^{-1}} = \frac{-K\zeta(\alpha\zeta-1)}{(\zeta-1)(\beta\zeta-1)},$$

где

$$K = e^{-T} - 1 + T, \quad \beta = e^{-T}, \quad \alpha = 1 - \frac{T(1-e^{-T})}{1-e^{-T}+T}.$$

Можно показать, что $\alpha < 1$ при всех $T > 0$, тогда

$$d(\zeta) = (\zeta-1)(\beta\zeta-1), \quad n^+(\zeta) = -K(\alpha\zeta-1), \quad n^-(\zeta) = \zeta.$$

Эталонная дискретная модель может быть найдена с использованием метода фиктивного квантования с фиксатором нулевого порядка

$$W_m(\zeta) = Z\{W_{mc}(s)H_0(s)\} = \frac{(1-p)\zeta}{1-p\zeta}, \quad (137)$$

где $H_0(s)$ – передаточная функция фиксатора нулевого порядка, и $p = e^{-\rho T} < 1$. Тогда:

$$n_m(\zeta) = (1-p)\zeta, \quad d_m(\zeta) = 1-p\zeta.$$

Поскольку полином n_m содержит n^- как сомножитель, условие (130) выполнено и $n_{m0}(\zeta) = 1-p$. При выборе $\ell = 0$ и $g(\zeta) = 1$ минимальное решение уравнения (134) имеет вид

$$a_0(\zeta) = -\beta\zeta + 1 + \beta - p, \quad b_0(\zeta) = 1,$$

а ДПФ блоков регулятора вычисляются как

$$C_0(\zeta) = -\frac{-\beta\zeta + 1 + \beta - p}{K(1-\alpha\zeta)}, \quad C_1(\zeta) = \frac{1-p}{K(1-\alpha\zeta)}.$$

При этом будет скомпенсирован нуль дискретной модели объекта в точке $\zeta = 1/\alpha$. При уменьшении T этот нуль стремится к точке

$\zeta = -1$, что соответствует колебательному процессу (рис. 18). Компенсировать его нежелательно, поэтому он должен быть включен в множитель n^- :

$$n^+(\zeta) = -K, \quad n^-(\zeta) = \zeta(\alpha\zeta-1).$$

Для того, чтобы выполнялось условие (130), можно выбрать эталонную модель в виде

$$W_m^*(\zeta) = W_m(\zeta) \cdot \frac{\alpha\zeta-1}{\alpha-1} = \frac{(1-p)\zeta}{(1-p\zeta)} \cdot \frac{\alpha\zeta-1}{\alpha-1},$$

где дополнительный множитель $\alpha-1$ в знаменателе выбран так, чтобы сохранить коэффициент усиления для постоянного сигнала, т.е.,

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} W_m^*(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow 1} W_m(\zeta).$$

Тогда получаем регуляторы

$$C_0^*(\zeta) = \frac{\gamma_1\zeta + \gamma_0}{K(1-\alpha)(1+\mu\zeta)}, \quad C_1^*(\zeta) = \frac{1-p}{K(1-\alpha)(1+\mu\zeta)},$$

где γ_1 , γ_0 и μ определяются решением уравнения (134). На рис. 67 показаны переходные процессы в системах с компенсацией нуля (рис. 67а) и без компенсации (рис. 67б) при $T = 0,5$.

Сплошные линии обозначают сигнал выхода, штриховые – управление. По графикам видно, что компенсация нуля приводит к скрытым колебаниям, которые нежелательны.

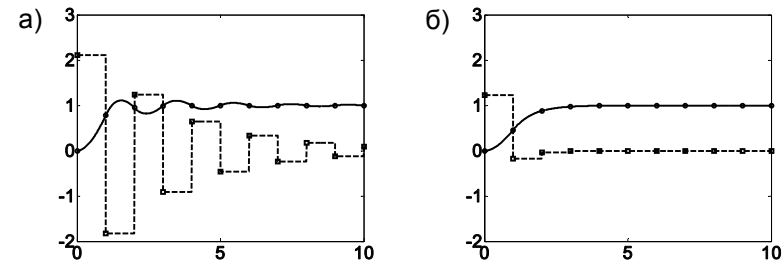


Рис. 67. Переходные процессы а) с компенсацией нуля; б) без компенсации нуля

4.5. Синтез с помощью билинейного преобразования

Билинейное преобразование

Один из наиболее простых методов синтеза цифровых регуляторов основан на использовании билинейного преобразования, с помощью которого внутренняя часть единичного круга отображается на левую комплексную полуплоскость. При этом систему можно рассматривать (в определенном диапазоне частот) как псевдодискретную и использовать классические методы проектирования непрерывных регуляторов [5,6].

Выше было показано, что для приближенного перехода от непрерывной системы к ее дискретной модели может быть использовано билинейное преобразование Тастина

$$s \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}.$$

Обратная подстановка (билинейное w -преобразование)

$$z \leftarrow \frac{1+wT/2}{1-wT/2} \quad (138)$$

позволяет перейти от дискретной системе к псевдодискретной.

Рассмотрим дискретную систему с ДПФ $W(z)$, которая получена в результате квантования модели непрерывного объекта $F(s)$ с экстраполятором нулевого порядка:

$$W(z) = Z\{F(s)H_0(s)\}.$$

При замене (138) ДПФ $W(z)$ преобразуется в рациональную функцию $W^*(w)$ от переменной w , которую можно рассматривать как передаточную функцию некоторой эквивалентной непрерывной системы.

Для анализа и синтеза в частотной области вводится **частотная передаточная функция**

$$W^*(j\lambda) = W^*(w) \Big|_{w=j\lambda} = W(z) \Big|_{z=\frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}},$$

где λ — **псевдочастота**. Учитывая, что частотная характеристика дискретной системы определяется при подстановке $z = e^{j\omega T}$, можно показать, что связь между частотой ω и псевдочастотой λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}.$$

Преимущества метода билинейного преобразования во многом связаны с тем, что при $\omega < 2/T$ частота и псевдочастота практически совпадают, т.е., $\lambda \approx \omega$. Можно показать, что при использовании фиксатора нулевого порядка частотная характеристика $W^*(j\lambda)$ совпадает с $F(j\omega)$ на низких частотах.

Если дискретная модель задана в пространстве состояний

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D,$$

билинейное преобразование дает

$$W^*(w) = C_w(wI - A_w)^{-1}B_w + D_w,$$

где I — единичная матрица соответствующего размера,

$$A_w = \frac{2}{T}I + \frac{4}{T}(A+I)^{-1}, \quad B_w = \frac{4}{T}(A+I)^{-1}B$$

$$C_w = C(A+I)^{-1}, \quad D_w = D - C(A+I)^{-1}B$$

При этом необходимо, чтобы матрица $A+I$ была обратима, иначе передаточная функция $W^*(w)$ будет неправильной (степень ее числителя будет больше степени знаменателя).

Пример. Рассмотрим непрерывный объект с фиксатором нулевого порядка:

$$F(s) = \frac{0,1}{(s+1)(s+0,1)}, \quad H_0(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}.$$

При $T = 0,2$ дискретная модель приведенной непрерывной части имеет вид

$$W(z) = Z\{F(s)H_0(s)\} = \frac{0,00186(z + 0,929)}{(z - 0,980)(z - 0,819)}.$$

Применение билинейного преобразования (138) дает псевдодискретную модель

$$W^*(w) = \frac{-3,652 \cdot 10^{-5} w^2 - 0,00960 w + 0,0997}{(w + 0,997)(w + 0,1)}.$$

Ее частотная характеристика $W^*(j\lambda)$ (сплошная линия на рис. 68) при $\lambda < 2/T$ практически совпадает с частотной характеристикой непрерывной части $F(j\omega)$ (штриховая линия).

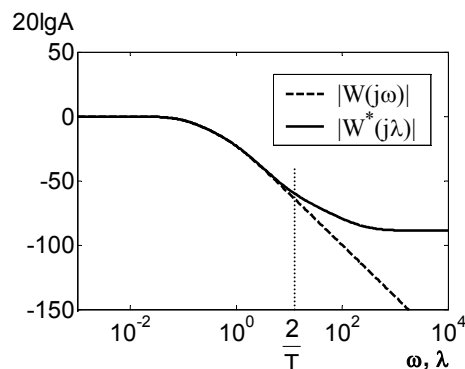


Рис. 68. Логарифмическая частотная характеристика $W^*(j\lambda)$.

В области высоких частот (при $\lambda > 2/T$) логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика (ЛАФЧХ) $W^*(j\lambda)$ имеет нулевой наклон (постоянное значение коэффициента усиления). Построение высокочастотной части ЛАФЧХ подробно описано в [5].

Алгоритм синтеза регулятора

Таким образом, алгоритм синтеза регулятора с использованием билинейного преобразования может быть описан в виде следующей последовательности шагов:

Шаг 1. Построить дискретную модель объекта с экстраполятором $W(z) = Z\{F(s)H(s)\}$.

Шаг 2. Применив w -преобразование (138) к $W(z)$, построить передаточную функцию эквивалентной псевдодискретной системы $W^*(w)$.

Шаг 3. Построить непрерывный регулятор $C_0(w)$ для эквивалентной псевдодискретной системы.

Шаг 4. Применив преобразование Тастина (102) к передаточной функции $C_0(w)$, построить цифровой регулятор.

Такой подход позволяет использовать все методы теории непрерывных систем, однако является приближенным. Во многих случаях синтез на основе билинейного преобразования приводит к тому же результату, что и переоборудование непрерывного регулятора с помощью преобразования Тастина. Однако использование билинейного преобразования позволяет более точно учитывать свойства дискретной систем в области высоких частот.

Использование ЛАФЧХ

В инженерной практике широко используется частотный метод синтеза корректирующего цифрового регулятора с помощью ЛАФЧХ. Ниже излагается общий подход к выбору желаемой ЛАФЧХ для цифровых систем [5].

ЛАФЧХ для частотной передаточной функции (рис. 69) строится в плоскости псевдочастоты. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ, сплошная линия на рис. 69) и логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФЧХ, штриховая линия) определяются зависимостями

$$20 \lg A = 20 \lg |W^*(j\lambda)|, \quad \varphi = \arg W^*(j\lambda).$$

Учитываются два вида ограничений: требуемая точность и запас устойчивости (точнее, показатель колебательности M).

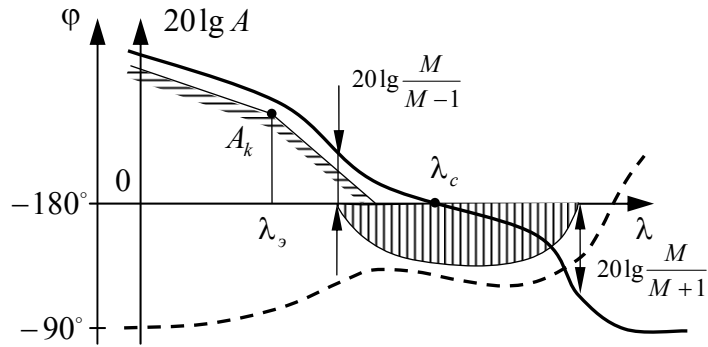


Рис. 69. Запретные зоны для ЛАФЧХ астатических систем

Требования к точности определяются по эквивалентному гармоническому воздействию. Пусть входной сигнал имеет вид

$$r(t) = r_{\max} \sin(\omega t + \psi),$$

где r_{\max} и ω — известные амплитуда и угловая частота сигнала, а ψ — неизвестная фаза. Первая и вторая производные такого сигнала имеют вид

$$\dot{r}(t) = \omega r_{\max} \cos(\omega t + \psi),$$

$$\ddot{r}(t) = -\omega^2 r_{\max} \sin(\omega t + \psi),$$

а их амплитуды равны

$$\dot{r}_{\max} = \omega r_{\max}, \quad \ddot{r}_{\max} = \omega^2 r_{\max}.$$

Предположим, что заданы ограничения на максимальную первую и вторую производные сигнала, \dot{r}_{\max}^* и \ddot{r}_{\max}^* . Тогда **эквивалентная частота** (т.е., частота гармонического воздействия с теми же параметрами) и **амплитуда** вычисляются как

$$\omega_{\mathcal{D}} = \frac{\ddot{r}_{\max}^*}{\dot{r}_{\max}^*}, \quad r_{\max}^* = \frac{(\dot{r}_{\max}^*)^2}{\ddot{r}_{\max}^*}.$$

Если $\omega_{\mathcal{D}} < 2/T$, то частота практически совпадает с псевдопериодом и можно принять $\lambda_{\mathcal{D}} = \omega_{\mathcal{D}}$. При синусоидальном входном сигнале можно выразить амплитуду ошибки через частотную характеристику как

$$e_{\max}^* = \frac{r_{\max}^*}{1 + W^*(j\omega_{\mathcal{D}})} \approx \frac{r_{\max}^*}{1 + W^*(j\lambda_{\mathcal{D}})} \approx \frac{r_{\max}^*}{W^*(j\lambda_{\mathcal{D}})},$$

предполагая, что $|W^*(j\lambda_{\mathcal{D}})| \gg 1$. Поэтому, если задана допустимая максимальная ошибка e_{\max}^* , запретная зона для ЛАФЧХ определяется точкой A_k с координатами

$$A_k : \left(\lambda_{\mathcal{D}}, 20 \lg \frac{r_{\max}^*}{e_{\max}^*} \right).$$

Для астатических систем ЛАФЧХ должна проходить выше запретной зоны, которая определяется двумя пересекающимися в точке A_k прямыми с наклонами 20 дБ/дек и 40 дБ/дек (рис. 69). Построение аналогичных зон для других типов систем рассмотрено в [5].

Для того, чтобы ограничить показатель колебательности M замкнутой системы, строят запретные области для ЛФЧХ, в которые она не должна заходить. Они соответствуют запретным кругам для годографа Найквиста (см. рис. 45б). Как следует из рис. 45б, на фазовую частотную характеристику накладываются ограничения в диапазоне амплитуд от $M/(M+1)$ до $M/(M-1)$. Для любого M и заданной амплитуды A требуемый запас по фазе вычисляется как

$$\eta = \arccos \frac{A^2 + c}{2Ac}, \quad (139)$$

где $c = \frac{M^2}{M^2 - 1}$ — смещение центра запретной круговой области на рис. 45б от мнимой оси.

В целом последовательность построения желаемой ЛАФЧХ состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Используя известные характеристики входного сигнала \dot{i}_{\max}^* и \ddot{i}_{\max}^* , определить частоту и амплитуду эквивалентного гармонического воздействия; построить точку A_k и запретную область для ЛАЧХ.

Шаг 2. Выбрать интервал квантования, соответствующий условию $\lambda_{\vartheta} \ll 2/T$.

Шаг 3. Определить частоту среза λ_c , учитывая требования к быстродействию системы и выбранный интервал квантования.

Шаг 4. Выбрать желаемый показатель колебательности M и построить запретную зону для ЛФЧХ по формуле (139), считая, что наклон ЛАЧХ в районе частоты среза составляет 20 дБ/дек.

Дальнейший синтез сводится к стандартной процедуре коррекции, применяемой в теории непрерывных систем управления: ЛАЧХ корректирующего последовательного регулятора строится как разница между желаемой и исходной ЛАЧХ. Полученный регулятор преобразуется в цифровую форму с помощью преобразования Тастина.

Заключение

Настоящее учебное пособие представляет собой вводный курс, позволяющий познакомиться с теорией цифровых систем управления непрерывными объектами. В нем основное внимание уделено качественным свойствам процессов и явлений в цифровых системах. Для освоения материала на высоком профессиональном уровне читателю необходимо тщательное изучение дополнительной литературы.

Монографии Я.З. Цыпкина [1], Э. Джури [2] и Ю. Ту [3] являются первыми серьезными работами, посвященными системам импульсного управления. Они отражают уровень развития теории середины XX века, однако именно в этот период были заложены основы классических методов: изучены процессы квантования сигналов, дискретизации непрерывных процессов и систем, получены преобразования Лапласа непрерывных сигналов, разработан аппарат дискретного преобразования Лапласа и z -преобразования. В книге Ш. Чанга [4] эти методы были впервые использованы для оптимального синтеза цифровых систем по критериям, учитывающим их поведение в непрерывном времени.

Следующий этап развития теории цифровых систем связан с разработкой методов анализа и синтеза, основанных на использовании дискретных моделей непрерывных объектов. В инженерной практике широкое распространение получили частотные методы, основанные на применении билинейного преобразования и исследовании ЛАФЧХ вспомогательной псевдонепрерывной системы. Наиболее полно метод ЛАФЧХ для цифровых систем изложен в монографии В.А. Бесекерского [5] и коллективной работе [6]. В [6] также разработаны методы статистического анализа импульсных систем и синтеза робастных законов управления при неполной априорной информации.

В трудах Л.Н. Волгина [14] был предложен метод синтеза оптимальных дискретных систем, основанный на использовании диофантовых полиномиальных уравнений. В частности, рассмотрены системы комбинированного управления при детерминированных и стохастических воздействиях.

В 80-е годы XX века бурно развивались методы, использующие пространство состояний в качестве основного математиче-

ского аппарата для описания дискретных систем. Результаты, полученные в этом направлении, подробно изложены в книгах Р. Изерманна [7], Б. Куо [8], а также в монографиях [18,19].

Для знакомства с состоянием теории цифровых систем управления на конец 80-х годов можно рекомендовать учебник К. Острёма и Б. Виттенмарка [9], в котором детально описываются как классические методы, так и подход на основе пространства состояний. За рубежом эта книга неоднократно переиздавалась.

В конце XX столетия в ряде работ были опубликованы результаты, свидетельствующие о том, что синтез оптимальных цифровых законов управления на основе дискретных моделей непрерывных объектов может систематически приводить к неработоспособным системам. Это поставило на повестку дня вопрос о разработке точных методов анализа и синтеза, не использующих упрощений и аппроксимаций. Зарубежные результаты в этой области достаточно полно излагаются в книге Т. Чена и Б. Фрэнсиса [11], которая доступна в Интернете на сайте одного из авторов по адресу

<http://www.control.toronto.edu/people/profs/francis/francis.html>

С помощью рассмотренной в [11] техники «лифтинга» удалось построить эквивалентные дискретные модели для ряда задач оптимизации цифровых систем с учетом их динамики в непрерывном времени.

В книге Е.Н. Розенвассера [10] была предложена концепция параметрической передаточной функции, обладающая широкими возможностями для точного исследования цифровых систем, в том числе систем с запаздыванием. Разработанные на ее основе алгоритмы анализа и синтеза реализованы в пакете макросов *DirectSD* для среды МАТЛАВ. Этот пакет распространяется свободно и может быть загружен с сайта автора

<http://kpolyakov.narod.ru>

В пособии ограниченного объема невозможно отразить все направления в теории цифровых систем управления. За рамками рассмотрения остались такие важные вопросы как статистический анализ и синтез цифровых систем, оптимальные, робастные, нелинейные и адаптивные системы, реализация цифровых регу-

ляторов и т.п. Для их изучения заинтересованным читателям можно рекомендовать учебник [9], а также монографии [6,7,8,18-23].

Приложение

$F(s)$	$f(t)$	$Z\{f(t)\}$	$Z_\varepsilon\{f(t)\}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$Tz \left[\frac{\varepsilon}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right]$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2!(z-1)^3}$	$\frac{T^2 z}{2!} \left[\frac{\varepsilon^2}{z-1} + \frac{2\varepsilon}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-q}$	$\frac{z q^\varepsilon}{z-q}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{(1-q)z}{(z-1)(z-q)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z q^\varepsilon}{z-q}$
$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\sin \beta t$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos \beta t$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$	$\frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - z \cos(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{z q \sin \beta T}{z^2 - 2z q \cos \beta T + q^2}$	$z q^\varepsilon \frac{z \sin \varepsilon \beta T + q \sin(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2z q \cos \beta T + q^2}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{z^2 - z q \cos \beta T}{z^2 - 2z q \cos \beta T + q^2}$	$z q^\varepsilon \frac{z \cos \varepsilon \beta T - q \cos(1-\varepsilon)\beta T}{z^2 - 2z q \cos \beta T + q^2}$

Примечания:

1. Предполагается, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.
2. Через T обозначен интервал квантования.
3. Изображения строятся для последовательности $\{f[k]\}$, где $f[k] = f(kT)$ при целых $k \geq 0$.
4. В таблице используются обозначения $q = e^{-\alpha T}$ и $q^\varepsilon = e^{-\alpha \varepsilon T}$.

Литература

1. **Цыпкин Я.З.** Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963.
2. **Джури Э.** Импульсные системы автоматического регулирования. – М.: Физматгиз, 1963.
3. **Ту Ю.** Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964.
4. **Чанг Ш.** Синтез оптимальных систем автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964.
5. **Бесекерский В.А.** Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976.
6. **Микропроцессорные системы автоматического управления // Бесекерский В.А.** и др. – Л.: Машиностроение, 1989.
7. **Изерман Р.** Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984.
8. **Куо Б.** Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
9. **Острём К., Виттенмарк Б.** Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1987.
10. **Розенвассер Е.Н.** Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. – М.: Наука, 1994.
11. **Chen T., Francis B.A.** Optimal sampled-data control systems. – New York: Springer-Verlag, 1995.
12. **Мирошник И.В.** Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005.
13. **Попов Е.П.** Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1989.
14. **Волгин Л.Н.** Оптимальное дискретное управление динамическими системами. – М.: Наука, 1986.
15. **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002.
16. **Математические основы теории автоматического регулирования.** Изд. 2-е, доп. Под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1977.

17. **Купер Дж., Макгиллем К.** Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989.
18. **Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скорубский В.И.** Системы автоматического управления с микроЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1989.
19. **Мита Ц., Хара С., Кондо Р.** Введение в цифровое управление. – М.: Мир, 1994.
20. **Фомин В.Н.** Методы управления линейными дискретными объектами. – Л.: ЛГУ, 1985.
21. **Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.** Адаптивное управление динамическими объектами. – М.: Наука, 1981.
22. **Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.** Теория нелинейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973.
23. **Видадь П.** Нелинейные импульсные системы. – М.: Энергия, 1974.

Учебное пособие

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Редактор *Е.В. Шорикова*

Корректор *Т.А. Канн*

Верстка *Т.В. Лебедевой, А.Ю. Максимова*

Подписано к печати *xx.xx.2006*
Формат 60x90/16. Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл. печ. л. *XX*. Уч.-изд. л. *XX*. Тир. *XXX*. Зак. *XXX*.
Издательский центр СПбГМТУ.
190008, СПб., ул. Лоцманская, 10.