

Кафедра «Системы автоматического управления»

Г.В. Зырянов

## ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Конспект лекций  
по дисциплине:

Теоретические основы  
автоматизированного управления

## Введение

Автоматизированные системы управления (АСУ) – это человеко-машинные системы, в которых ряд операций, процедур и действий по сбору и передаче информации, переработке ее и формированию управляющих воздействий на объект управления выполняются техническими средствами. При этом принятие окончательных управленческих решений на верхних уровнях управления остается за человеком. Эти важнейшие факторы отличают АСУ от автоматических систем, т.е. технических устройств, которые действуют по заданной программе под наблюдением человека, но без его вмешательства.

Среди технических средств, используемых в АСУ, особое место занимают средства микропроцессорной техники (компьютеры, контроллеры, управляющие вычислительные комплексы и т.п.). При этом выделяют два основных способа их использования в системах управления.

В первом способе компьютер разгружает человека от выполнения нетворческого рутинного труда, связанного с большим объемом простейших операций при обработке больших количеств различных данных: сортировка, выборка по признаку, суммирование и другие математические операции, преобразование одного вида данных в другой, приведение к удобному для использования виду и т.д. Такие системы принято называть автоматизированными системами обработки данных (АСОД).

Во втором способе, кроме выполнения функций в АСОД, человеческий фактор участвует в процессах принятия управленческих решений, в основном при реализации плохо формализованных оптимизационных задач, возникающих на верхних уровнях организационной структуры систем управления сложными, например технологическими процессами и сложными техническими объектами.

Важной задачей при создании АСУ сложными объектами является правильное (оптимальное) распределение функций между человеком и компьютером. При этом в организационной структуре АСУ человеческому фактору обычно отводится место на верхних иерархических уровнях управления. На нижних же уровнях (тактическом и исполнительном) управляющие функции реализуются автоматически с помощью технических средств. При этом на современном уровне развития науки, техники и технологий предпочтение отдается цифровым устройствам, рабочие сигналы которых представлены последовательностями цифровых кодов.

Непосредственное (двунаправленное) взаимодействие в режиме реального времени автоматических управляющих устройств (АУУ), содержащих компьютерные средства, с технологическим объектом управления осуществляется на нижнем (исполнительном) уровне. При этом в локальных (местных) замкнутых контурах управления возникают специфичные динамические режимы, связанные с устойчивостью процессов управления и их качеством в переходных и стационарных режимах. Аналогичные проблемы возникают также и в непрерывных (аналоговых) подсистемах оперативного управления, но дискретизация по времени, присущая цифровым устройствам и сигналам, вносит существенную специфику как в математическое описание сигналов и процессов, так и в методы их исследования. Рассмотрением этих особенностей как при решении задач анализа, так и динамического синтеза занимаются в специальном разделе ТАУ, посвященном цифровым системам управления. Для удобства изучения и лучшего понимания, необходимые для этого минимальные (базовые) сведения по общим вопросам ТАУ и краткое описание основных задач и методов теории непрерывных систем управления приведены в Приложении.

# Часть первая: Основы теории цифровых систем управления

## Лекция №1

### Тема «Общие вопросы организации и реализации ЦСУ»

#### 1.1 Вводные замечания

Развитие науки, техники и технологий (на фоне растущих потребностей человеческого общества), неизбежно ведет к созданию и/или совершенствованию технических объектов и систем (ТС) различного назначения и уровня сложности. При этом большинство из них могут выполнять свои функции только в составе систем управления (СУ). Для этого они (на этапе конструирования и изготовления) оборудуются специальными конструктивными элементами (регулирующими органами РО), воздействуя на которые извне можно изменять состояние  $x(t)$  и измеримые физические переменные (выходы)  $y(t)$  ТС в соответствии с набором требований, условий и ограничений  $C^*$  алгоритма функционирования (АФ).

Обобщенная структура (схема) любой СУ представлена на рис.1.1

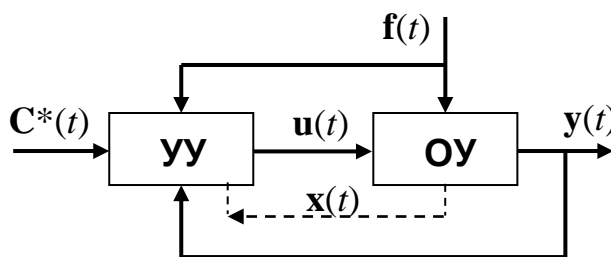


Рис. 1.1 Обобщенная структура системы управления

Здесь **ОУ** – ТС, оборудованная РО для приема управляющих воздействий  $u(t)$ ;  
**УУ** – управляющее устройство (блок, узел, центр), формирующее  $u(t)$ ;  
 $y(t)$  – выход ОУ (вектор физических переменных, указанных в АФ);  
 $u(t)$  – вектор специально организованных управляющих воздействий;  
 $f(t)$  – вектор возмущений со стороны внешней среды;  
 $C^*(t)$  – вектор переменных составляющих цели управления (требования АФ).

Обязательными функциями (атрибутами) любого УУ являются следующие:

- 1) Информационная: Получение информации о текущих значениях меняющихся во времени составляющих  $C^*(t)$ ,  $y(t)$  и  $f(t)$ ;
- 2) Вычислительная: анализ полученной информации и принятие решения о требуемом значении  $u(t)=\varphi(C^*(t),y(t),f(t))$ , где  $\varphi$  – алгоритм управления;
- 3) Исполнительно-преобразовательная: реализация принятого решения – усиление и преобразование сигнала  $u(t)$  к форме, воспринимаемой РО.

СУ называется *автоматической*, если все эти функции УУ реализуются с помощью технических средств (устройств) без непосредственного использования человеческого фактора.

Современные технические средства, используемые для реализации функций УУ в системах управления, чрезвычайно разнообразны и могут отличаться физической природой, принципами работы, а также формой представления переменных на входах и выходах. Часто среди них встречаются такие устройства, у которых выходные и/или входные сигналы являются *прерывистыми* (интервальными) функциями времени и имеют вид последовательностей цифровых кодов (*цифровые сигналы*) или импульсов определенной формы (*импульсные сигналы*). Технические средства, работающие с такими сигналами принято называть устройствами дискретного действия (УДД). К ним относятся: а) цифровые устройства (ЦВУ, АЦП, ЦАП) и б) импульсные устройства (импульсные элементы–ИЭ, импульсные цепи).

Системы управления, содержащие такие устройства и сигналы, называются, соответственно, *цифровыми и импульсными*. Из-за прерывистого во времени (дискретного) характера некоторых рабочих сигналов в таких системах для них часто используют более общее название – *дискретные системы управления* (ДСУ) [6].

Применение импульсных и цифровых устройств и сигналов оправдано стремлением улучшить эксплуатационно-технические характеристики СУ. Функциональное назначение таких устройств может быть различным: датчики обратных связей, задающие, усилительно-преобразовательные и согласующие устройства, корректирующие звенья и т.п. Современным и перспективным видом ДСУ являются *микропроцессорные* системы управления (МП СУ), в которых различные микропроцессорные вычислительные средства (микроЭВМ, программируемые микроконтроллеры и др.) используются для реализации управляющих алгоритмов [2].

Достоинствами ДСУ, в частности ЦСУ, являются их повышенная чувствительность, меньшие инструментальные погрешности, отсутствие дрейфа, более высокая надежность и устойчивость к шумам и возмущениям, меньшие габариты, масса и стоимость. Для цифровых управляющих устройств (регуляторов), по сравнению с аналоговыми, характерна более высокая точность реализации управляющих алгоритмов и гибкость, так как программы их работы можно легко изменять и модернизировать без каких-либо изменений в аппаратуре [4, 5]. Кроме того, цифровые компоненты электронных схем часто оказываются надежнее, прочнее и компактнее, чем аналоговые компоненты того же назначения.

Эти и некоторые другие преимущества все чаще определяют выбор проектировщиков в пользу дискретных и в частности цифровых систем управления [6].

С точки зрения математического описания и аналитических методов исследования, главной особенностью ДСУ является то, что *информационные параметры* некоторых сигналов (значения кода  $N$ , амплитуда  $A$ , ширина  $\tau$  или временное расположение  $\theta$  очередного импульса) могут изменять (обновлять) свои значения только в «разрешенные» *дискретные* моменты времени  $t_k$ . Во многих практически важных случаях их можно считать равноотстоящими на величину *постоянного* шага дискретизации  $T_0$ , то есть когда  $t_k = kT_0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$

Именно по этой причине точное описание свойств ДСУ средствами непрерывного математического аппарата и их исследование методами непрерывной теории в принципе невозможно. Для этих целей разработаны особые методы, объединенные в специальный раздел теории управления [1, 6, 7]. Математической основой этих методов является *дискретный математический анализ* (исчисление конечных разностей, разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа и др.). Наиболее разработанным здесь является раздел теории *линейных дискретных систем управления*.

## 1.2 Особенности организации управления сложными ТС [10]

Современные ТС и, соответственно, ОУ могут существенно различаться назначением, сложностью выполняемых функций, конструктивным исполнением, количеством элементов (компонент), видом и типом их взаимодействий (структурой) и т.п.

♦ В составе ТС, предназначенной для выполнения сложных функций, всегда можно выделить (например, по функциональному признаку) хотя бы несколько *менее сложных* составных частей (подсистем), также выполняющих определенные, но более простые функции. Поступая аналогично по отношению к некоторым из подсистем и ограничивая процесс такого разбиения неделимыми (в смысле применения функционального признака) элементами, можно получить структурное представление ОУ на разных уровнях детализации и в частности – в виде множества элементарных объектов  $\{O_m\}$ , которые могут взаимодействовать между собой.

В таких случаях возможны два принципиально различных подхода (принципа) к организации управления сложным ОУ: а) *централизованный* (радиальный) и б) *децентрализованный* (*распределенный*). При централизованном управлении (рис. 1.2) все управляющие воздействия  $\{u_i\} = \mathbf{u}(t)$ , поступающие на регулирующие органы ОУ, формируются из единого управляющего

центра  $УУ_0$  в соответствии с глобальной целью управления  $Z_0$  и некоторым единым и неделимым (например, оптимальным) алгоритмом управления  $\phi_0$ .

Однако такой подход к организации управления сложным ОУ чаще всего оказывается нереализуемым (гипотетическим) из-за ряда проблем методического, теоретического и практического характера:

- необходимость *полной* информации о математической модели и о текущих значениях координат вектора состояния ОУ  $x(t)$ . Для сложных ОУ получить информацию в таком объеме оказывается невозможным (*информационная проблема*);

- высокая сложность определения оптимального алгоритма управления  $\phi_0$ , обеспечивающего экстремум показателя эффективности  $J$  (*математическая проблема*);

- сложность реализации  $\phi_0$ , связанная с необходимостью выполнения в *реальном времени* большого объема сложных и достаточно точных математических преобразований (вычислений). Ввиду целостности алгоритма  $\phi_0$  и проблем с его декомпозицией, для его реализации может потребоваться вычислительные устройства (ВУ) с рекордной стоимостью и производительностью, что может оказаться невозможным или нецелесообразным;

- сложности реализации двунаправленной передачи больших объемов *оперативной* информации между ОУ и УУ. Эта проблема особенно обостряется, если ОУ удален от управляющей подсистемы или отдельные его части  $\{O_m\}$  рассредоточены в пространстве.

- высокая чувствительность СУ к сбоям и отказам ВУ, на которые возложена функция реализации  $\phi_0$  (низкая надежность и живучесть).

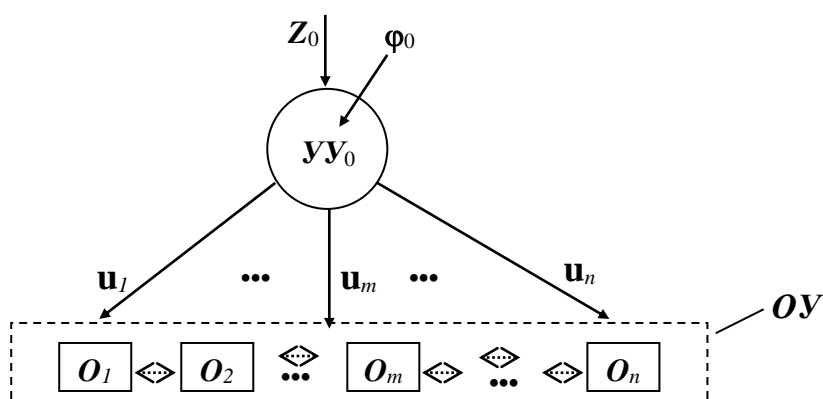


Рис. 1.2. Централизованное (радиальное) управление сложным ОУ

♦ В свете сказанного, централизованное (оптимальное) управление *сложными* объектами (по крайней мере, при нынешнем уровне развития науки, техники и технологий) чаще всего нереализуемо и является гипотетическим вариантом, пределом совершенствования СУ и приближения показателя эффективности управления к оптимуму. Поэтому его применение пока ограничено сравнительно простыми ОУ.

♦ Более конструктивным и технически реализуемым является другой, *децентрализованный* (распределенный) принцип организации управления сложными ТС, когда управляющие функции распределяются между несколькими, определенным образом взаимодействующими друг с другом и с ОУ, узлами (устройствами, блоками, центрами) управления  $\{УУ_i\}$ . При этом каждый из  $УУ_i$  наделяется своей, локальной целью управления  $Z_i$  и способом ее достижения – локальным алгоритмом управления  $\phi_i$ .

В совокупности своей эти узлы управления  $\{УУ_i\}$  образуют *организационную структуру* управляющей части системы управления. При рациональном выборе числа  $N$  узлов управления  $УУ_i$  и правильном назначении локальных целей  $Z_i$ , их достижение (с помощью «правильных» алгоритмов  $\phi_i$ ) может обеспечить достижение глобальной цели  $Z_0$ , но при нескольких отличающемся от глобального оптимума значениях показателя эффективности  $J \neq J^*$ .

Такие СУ с полной или частичной децентрализацией (распределением) функций управления называют *распределенными системами управления* (PCY). Организационная структура управляющей части, т.е. УУ в составе PCY, показана на рис. 1.3.

Децентрализованный подход к организации управления сложными ТС и объектами более приспособлен к реализации, чем централизованное (из одного центра), радиальное управление. Важными аргументами в пользу распределенного управления являются следующие:

1) локальные цели управления  $Z_i$  более просты, чем глобальная цель  $Z_0$  и соответственно, более простыми будут алгоритмы  $\varphi_i$  и средства их достижения. Для реализации множества локальных алгоритмов  $\{\varphi_i\}$  можно применить несколько  $\{BY_i\}$  различной производительности и конструктивного исполнения, образующих в своей совокупности *управляющую вычислительную систему* (УВС) в виде многомашинного вычислительного комплекса или в виде локальной вычислительной сети (ЛВС). В таких случаях будет иметь место *децентрализованная реализация* (распределенная в пространстве) системы управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$ .

В некоторых случаях, при невысокой суммарной сложности управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$ , для них возможна *централизованная реализация* с помощью одного достаточно производительного ВУ. По такой схеме строятся АСУ простыми технологическими и энергетическими установками, системы управления несложными роботами, испытательными стендами и др.

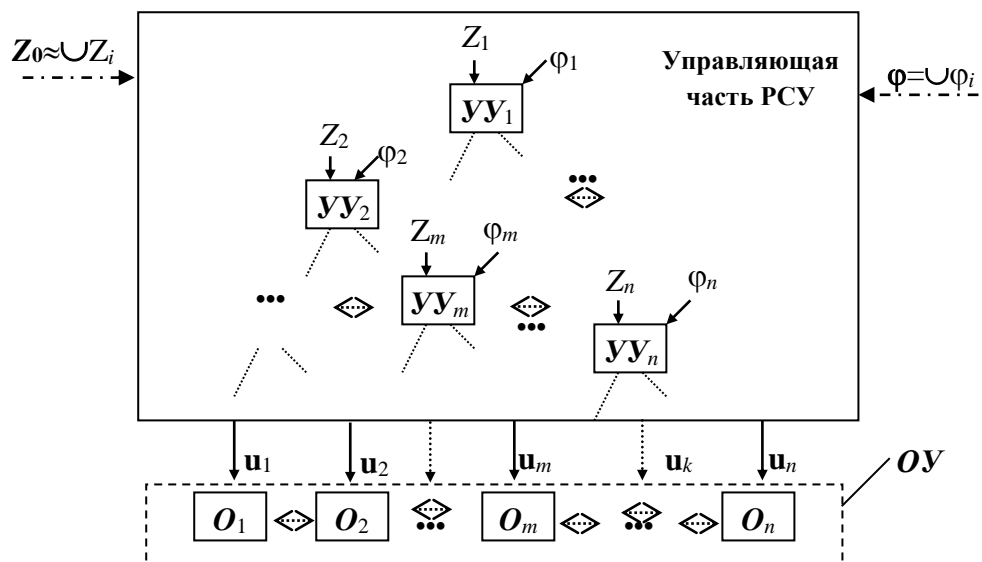


Рис. 1.3. Организационная структура PCY

2) в случае децентрализованной реализации системы управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$  и при разумном их распределении между  $\{BY_j\}$ , некоторые из вычислительных устройств в составе локальных УУ $_i$  могут быть максимально приближены к соответствующим подсистемам (элементарным объектам  $O_m$ ) в составе ОУ с образованием *локальных систем автоматического управления* СУ $_i$ . Очевидно, что это уменьшает проблемы реализации каналов передачи данных.

3) так как СУ $_i$  обладают относительной самостоятельностью (есть цели управления, алгоритмы и средства их достижения), то возрастает устойчивость СУ в целом к локальным кратковременным отказам и сбоям ВУ $_i$ , т.е. увеличивается живучесть всей системы управления.

4) достижение локальной цели  $Z_i$  не требует полной информации о модели и состоянии всего ОУ, а достаточно знать модель и состояние только для элементарного объекта  $O_i$ .

5) децентрализованная реализация системы управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$  упрощает их реализацию и модернизацию, а приближение управляющих средств к управляемым процессам является современной и перспективной тенденцией развития и совершенствования техники управления. Это особенно актуально в случае рассредоточенных в пространстве и географически распределенных объектов (транспортные системы, технологические процессы, энергетические установки и системы).

Несмотря на то, что РСУ имеют более сложную организационную структуру управляющей части (в этом смысле они избыточны) и децентрализованное управление неоптимальное (квазиоптимально, т.к.  $J \neq J^*$ ), их применение дает возможность технической реализации СУ с хорошими характеристиками по стоимости, надежности, живучести и т.д.

♦ Выбор организационной структуры управляющей части СУ (числа управляющих центров  $N$  и способа взаимодействия их между собой и с «элементарными объектами») является важнейшим этапом процесса проектирования РСУ. Эта задача *не решается* аналитическими методами и не имеет однозначного решения даже для конкретной системы. Для ее решения используются рекомендации методов структурного анализа и синтеза СУ, особенности декомпозиции ОУ на подсистемы, опыт проектирования аналогичных СУ, рекомендации специалистов-экспертов. При этом в качестве *первоначального* (ориентировочного) варианта часто может рассматриваться конфигурация схемы многоуровневого представления сложного ОУ.

Возможные варианты организационных структур РСУ многообразны. Для их систематизации и изучения рассматривают различные *типы отношений* между узлами (устройствами) управления  $УУ_i$ . С этой целью определяют два типа отношений (связей) между ними:

а) отношения *равноправного взаимодействия* (без подчинения), когда между  $УУ_i$  осуществляется обмен только *осведомительной* (необязательной для использования) информацией;

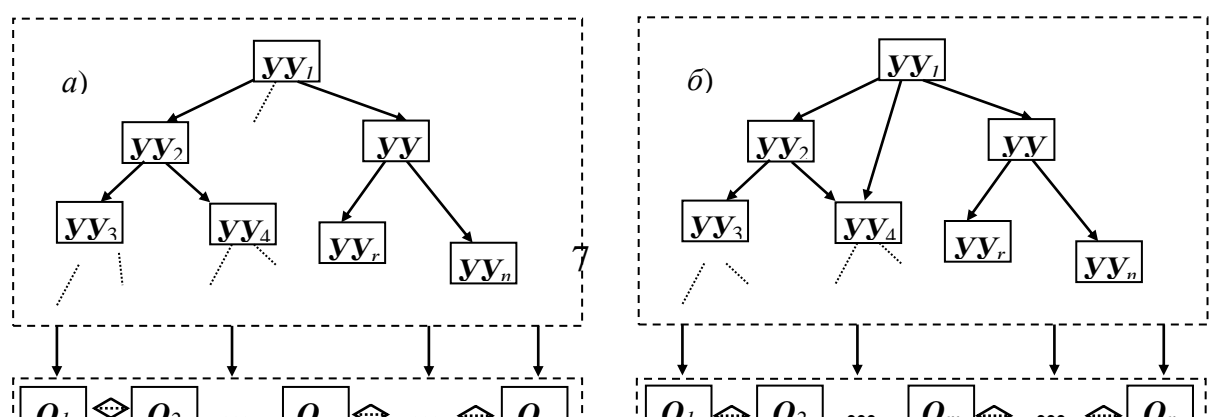
б) отношения *соподчинения*, при которых воздействия со стороны одного  $УУ_i$  на другой  $УУ_j$  имеют *директивный*, т.е. обязательный для исполнения характер: это указания, направленные в общем случае на изменение (корректировку): цели управления  $Z_j$  или/и параметров алгоритма управления  $\varphi_j$ . При таком взаимодействии  $УУ_i$  находятся на *разных*, но соседних уровнях подчинения: верхний и нижний. Узел управления верхнего уровня ( $УУ_i$ ) играет *ведущую* роль по отношению к ведомому (подчиненному)  $УУ_j$  нижнего уровня. Формально, такая пара образует локальную подсистему в составе управляющей части РСУ.

Введенная терминология подчеркивает относительную важность задач управления на соподчиненных уровнях. Такие отношения могут устанавливаться (повторяться) для любых пар  $УУ_i$ , входящих в организационную структуру УУ. При этом ведущее  $УУ_i$  в одной паре может оказаться ведомым в другой паре и/или наоборот.

Организационные структуры управления и РСУ, в которых отсутствуют отношения соподчинения между узлами управления, называются *одноуровневыми* (полностью децентрализованными), а иначе – *многоуровневыми*. В них управление распределено между уровнями, а в пределах уровня – между равноправными  $УУ_i$ . Многоуровневые структуры называют также *иерархическими*. Если в многоуровневой (иерархической) структуре отсутствуют отношения многократного подчинения, то она называется *иерархической с сильными связями* или *древовидной*. При наличии узлов *многократного* подчинения многоуровневая структура называется *иерархической со слабыми связями*.

В приведенной выше классификации организационных структур управления способ размещения осведомительных (информационных) связей не является существенным. Такие связи в пределах уровня называют *горизонтальными*, а между уровнями – *вертикальными*. На рис. 1.4 схематично изображены типовые организационных структуры РСУ (без осведомительных информационных связей):

- а) многоуровневая *древовидная* структура;
- б) многоуровневая иерархическая структура со *слабыми* связями;
- в) одноуровневая, полностью децентрализованная структура.



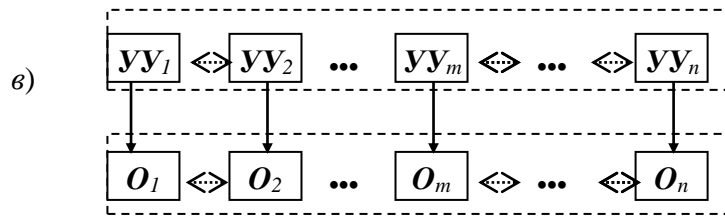


Рис. 1.4. Типы организационных структур РСУ

Для придания некоторой подсистеме управления специальных свойств (адаптивность, повышенная надежность и живучесть), в состав базовой организационной структуры могут вводиться дополнительные узлы и уровни управления. При этом получается многоуровневая иерархическая структура со *слабыми* связями. Так, например, введение дополнительного узла управления  $УУ_a$  с целью управления  $Z_a$  и алгоритмом управления  $\varphi_a$ , позволит изменять параметры  $\{\alpha_i\}$  алгоритма  $\varphi_n$  для  $УУ_n$  в составе базовой структуры для обеспечения локальной подсистеме ( $O_n, УУ_n$ ) свойства адаптации.

Необходимо также обратить внимание на следующие две важные особенности многоуровневой организации распределенного управления.

1. Цели управления  $Z_i$  (и алгоритмы их достижения  $\varphi_i$ ) на верхних уровнях всегда более сложные, чем на нижних уровнях. Для устройств управления самого нижнего (первого), *исполнительного* уровня это, в основном, решение задач регулирования значений управляемых переменных (выходов) ОУ, т.е.  $Z_i: y_i(t) \rightarrow y_i^*(t)$ . Для  $УУ_i$  более высоких уровней цели управления более сложные и связаны с оптимизацией, координацией, принятием решений в условиях неполной информации. Алгоритмы их достижения основаны на численных методах решения экстремальных задач (линейное, нелинейное, выпуклое и целочисленное программирование). Часто алгоритмы управления на верхних уровнях управления могут быть плохо формализованы и для их осуществления используется человеческий фактор. Система управления в таких случаях будет не автоматической, а *автоматизированной*. Благодаря успехам науки управления, человек постепенно вытесняется на более высокие уровни управления.

2. Узлы управления более высоких уровней в большинстве случаев (но не всегда!), решая более сложную задачу, обрабатывают обобщенную (усредненную) за некоторый интервал времени осведомительную информацию, поступающую с нижних уровней. Поэтому скорости изменения управляющих переменных на более высоком уровне оказываются существенно меньшими (обычно на порядок), чем на соседних нижних уровнях. Это дает возможность (в первом приближении) при синтезе алгоритмов управления на некотором  $k$ -м уровне пренебречь инерционностью процессов на более низких уровнях, а составляющие цели управления  $Z_k$  считать неизменными. При переходе на более высокий уровень управления, как правило, степень оперативности (частота повторения) решаемых задач уменьшается. Это находит отражение в названиях некоторых уровней управления в иерархических системах.

♦ Самый нижний (первый), исполнительный уровень – это уровень *оперативного* управления. Скорость протекания процессов определяется здесь целиком инерционными свойствами объекта управления. Здесь решаются локальные задачи управления: регулирования значений выходных координат элементарных объектов  $\{O_m\}$  (слежение, программное управление, стабилизация) в соответствии предписаниями, полученными от узлов управления более высокого уровня. Именно на нижнем уровне происходит непосредственное взаимодействие УУ с ОУ и возникают задачи динамического анализа и синтеза, изучаемые в ТАУ (устойчивость, качество переходных процессов, динамическая точность и др.).



Для локальных УУ<sub>i</sub> цели регулирования достигаются применением принципа управления по отклонению. При этом могут быть использованы типовые законы регулирования, возможно в сочетании с принципом управления по разомкнутому циклу (вариант комбинированного управления). Обобщенная структура *i*-го контура регулирования (без учета взаимодействия с другими элементарными объектами  $O_j$  в составе ОУ) представлена на рис. 1.5, где задающее воздействие  $y^*_i(t)$  формируется некоторым узлом управления более высокого уровня.

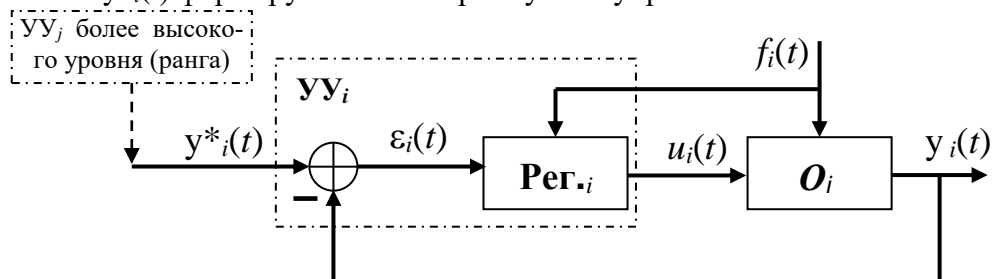


Рис.1.5. Обобщенная структура локальной САР для *i*-го канала

Следующий (второй), более высокий уровень управления – *тактический*, а еще более высокий – *стратегический*.

На *втором* (тактическом) уровне, решаются задачи координации и согласования локальных целей и задач: формирование задающих воздействий и/или изменение параметров алгоритмов управления исполнительного уровня, задачи оперативного контроля и диагностики оборудования и т.п., а на *стратегическом* уровне – глобальная оптимизация режимов функционирования ОУ на основе некоторых обобщенных критериев и показателей качества всей системы.

Остальные (высшие) уровни с точки зрения оперативности управления специальных названий не имеют. Такое деление организационной структуры УУ на уровни, является укрупненным, поэтому каждый из них может содержать и более мелкие подуровни управления.

### 1.3 Особенности реализации управления сложными ТС [10]

Распределенное управление предполагает децентрализованную организационную структуру управляющей части и, в большинстве случаев, и ее децентрализованную реализацию. При выборе схемы реализации УУ (т.е. его физической структуры) необходимо учитывать: а) вид и особенности организационной структуры УУ; б) особенности взаимного пространственно-географического расположения управляемых подсистем (компонентов ОУ); в) сложность и особенности системы управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$ . Кроме того, *желательно* приближение средств обработки информации (вычислительных средств) к источникам ее возникновения и потребления, так как это упрощает реализацию каналов передачи оперативной информации.

Очевидной и основной функцией УУ в составе РСУ является оперативная математическая обработка информации, поступающей в реальном времени, в соответствии с системой управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$ . При этом должны быть выполнены определенные требования к точности и степени оперативности (допустимой задержке на вычисления) результатов этих преобразований. Для реализации этой функции используются разнообразные технические средства в виде вычислительных устройств (ВУ). Это могут быть устройства промышленного изготовления (цифровые вычислительные устройства (ЦВУ) в виде микропроцессорных устройств, микроЭВМ, программируемых контроллеров, ЭВМ и т.п.), а в простых случаях, специализированные (аналоговые) устройства непрерывного действия (АВУ), например, в виде электрических четырехполюсников и операционных усилителей.

Разработка и реализация *физической структуры* управляющей части предполагает выполнение следующих действий:

- выбор способов реализации (непрерывный/дискретный) для каждого из системы управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$ ;
- выбор числа и конкретных типов вычислительных средств  $\{ВУ_i\}$ ;

в) распределение  $\{\varphi_i\}$  между  $\{ВУ_i\}$ ;

г) выбор типов, способов и средств информационного обмена (системы передачи данных).

Выбор физической структуры УУ является сложной, плохо формализуемой задачей, не имеющей однозначного решения. При этом конфигурация (схема, графическое отображение) физической структуры может существенно отличаться и не повторять в деталях конфигурацию организационной структуры УУ из-за множества возможных вариантов выбора состава вычислительных устройств  $\{ВУ_i\}$  и вариантов распределения алгоритмов управления  $\{\varphi_i\}$  между ними. Отметим также, что некоторые высокопроизводительные ЦВУ могут работать в мультипрограммном режиме, разделяя свои ресурсы между несколькими алгоритмами. Кроме того, в отношении некоторых простых алгоритмов управления нижнего, исполнительного уровня возможны два варианта реализации: а) традиционный (аналоговый, непрерывный) и б) современный (дискретный, цифровой). Соответственно этому для них выбираются и тип ВУ (АВУ или ЦВУ). Для алгоритмов управления более высоких уровней другой альтернативы, кроме цифрового варианта реализации, не существует ввиду сложности соответствующих им математических процедур (численное решение экстремальных и оптимизационных задач в реальном времени, методы координации, идентификации, адаптации и др.).

♦ В настоящее время, благодаря успехам в областях микроэлектронных технологий и совершенствования микропроцессорной техники, стало возможным и обоснованным применение микропроцессорных ЦВУ на всех, включая нижний, уровнях управления. Это соответствует так называемому непосредственному (прямому) цифровому управлению (ПЦУ), хотя в отдельных случаях ещё применяется «устаревший» вариант супервизорного управления, при котором часть управляющих устройств исполнительного уровня реализуются традиционным (непрерывным) способом с помощью АВУ.

Для реализации информационной и преобразовательной функций УУ используются другие виды технических устройств из арсенала средств автоматизации:

- 1) информационно-измерительные устройства (датчики);
- 2) усилительно-преобразовательные и согласующие устройства;
- 3) исполнительные устройства.

Часть из них в качестве рабочих сигналов используют импульсные или цифровые последовательности и являются УДД. Причем некоторые из них могут содержать встроенные микропроцессоры и, обладая «интеллектуальными свойствами», непосредственно подключаются к ЦВУ, без дополнительных АЦП или ЦАП.

Таким образом, при децентрализованной реализации УУ, вычислительная часть его (подсистема), предназначенная для реализации системы управляющих алгоритмов  $\{\varphi_i\}$  будет представлять собой некоторое множество ЦВУ, определенным образом взаимодействующих между собой и с ОУ по каналам информационного обмена в виде сети передачи цифровых данных. Это будет либо многомашинный вычислительный комплекс (МВК), либо локальная вычислительная сеть (ЛВС), состоящие из разнотипных ВУ. Требуемый класс и тип ВУ определяется сложностью и степенью оперативности реализуемых с его помощью алгоритмов управления.

При этом на тактическом и стратегическом уровнях управления используются более производительные и универсальные ЭВМ (в смысле особенностей архитектуры, состава периферии, вычислительным ресурсам и ПО): рабочие и инженерные станции, серверы, АРМы операторов и технологов, промышленные компьютеры и многопроцессорные системы.

Для реализации алгоритмов управления нижнего (исполнительного) уровня применяются более простые, специализированные (по архитектуре, составу оборудования, вычислительным ресурсам и конструкции, составу системного и прикладного обеспечения, эксплуатационно-техническим характеристикам) ЦВУ: микроЭВМ, программируемые контроллеры, промышленные логические контроллеры – ПЛК и т.п.

В соответствии с этим, физическая структура вычислительной части УУ представляется в виде распределенной (многомашинной) вычислительной системы (МВС) с иерархической мно-

гоурвневой структурой. Типовой вид ее показан на рис. 1.6. Способ взаимодействия  $\{ВУ_i\}$  между собой и с ОУ будет зависеть от типа выбранной структуры МВС, от места  $ВУ_i$  в этой системе, типа сети передачи данных (СПД) и т.д.

При этом нет единого способа согласованного информационного обмена между  $\{ВУ_i\}$  в составе УВК, УВС или между узлами компьютерной сети, но есть множество рекомендаций, типовых решений и стандартов разного уровня: фирменные, отраслевые, государственные, международные. Обычно они разработаны для цифровых систем автоматизации в сфере промышленного производства (так называемые промышленные сети). Для СУ в аэрокосмической области или для управления подвижными объектами другого типа действуют свои стандарты и рекомендации, хотя некоторые общие идеи, принципы и терминология остаются такими же.

При объединении различных по типу ЭВМ в единую управляющую вычислительную систему (УВС) используют типовые технические решения и рекомендации с применением раз стандартных интерфейсов физического уровня, таких как RS-232C, RS-432, RS-485 и др.

Для связи УВС исполнительного уровня с аппаратными средствами полевого уровня (измерительные приборы (датчик), станции распределенного ввода-вывода, исполнительные устройства (актуаторы)), которые вместе с ОУ образуют так называемый «расширенный» объект управления, в промышленных системах используются стандарты полевых шин (fieldbus), например такие как HART, Profibus DP, Modbus RTU, DeviceNet, ASI, CAN, ВITBUS и др. Наиболее сложные из них (типа Profibus, ВITBUS, CAN, ControNet) могут применяться также для организации информационного обмена между ЦВУ (контроллерного и операторский уровня в АСУ ТП): контроллеры, серверы, рабочие станции, автоматизированные рабочие места операторов, технологов (АРМ), наряду с более универсальными типами промышленных сетей передачи данных (Industrial Ethernet, Foundation Fieldbus HSE).

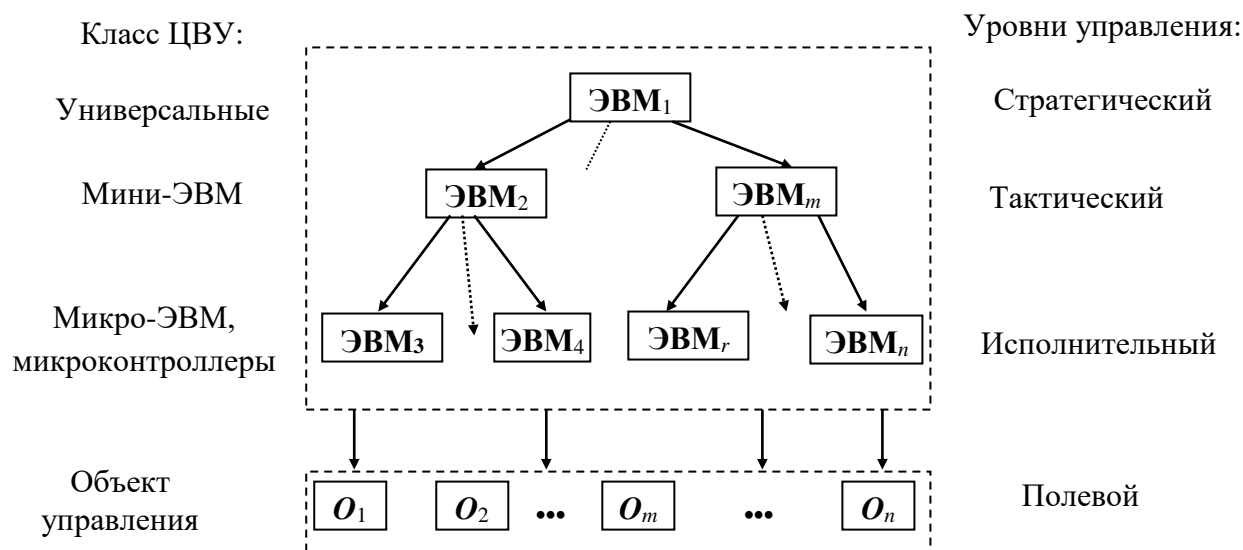


Рис. 1.6. Типовой вид многоурвневой физической структуры управляющей части РСУ

В настоящее время нет крупных промышленных предприятий без АСУТП. Будь то нефтеперерабатывающие комплексы, или небольшие цеха по приготовлению бетонных смесей, или современные научно-экспериментальные лаборатории, в каждом из них большую долю составляют процессы, которые происходят без участия человека. Управление этими процессами возложено на контроллеры. Резкое уменьшение габаритов современных электронных устройств и повышение их функциональной насыщенности во многом изменило идеологию проектирования крупных систем. В настоящее время наблюдается переход от интегрированных систем, в которых один мощный процессор управляет большим количеством пассивных периферийных устройств, к распределенным системам – когда каждый элемент системы является активным устройством. Такой подход дает возможность проектировать систему управления оптимальным

образом, а при необходимости, без особых затрат изменять её конфигурацию. При проектировании системы управления каждый разработчик неминуемо столкнется с проблемой подбора контроллера наиболее подходящего его требованиям. Известны системы автоматизации с количеством обрабатываемых сигналов до тысячи, и конструктивом, предполагающим монтаж на DIN-рейку. Основными компаниями на этом рынке являются: *National Instruments, Allen Bradley, GE Fanuc, BECKHOFF, WAGO, EMERSON, SIEMENS*.

Приведем краткие сведения об одной из широко известных разработок американской компании EMERSON: *Цифровая система автоматизации DeltaV*.

DeltaV является полнофункциональной распределенной системой управления (PCU) технологическим процессом (ТП). Полевые устройства FOUNDATION fieldbus, контроллеры и рабочие станции работают совместно в составе системы, обеспечивая управление каждый на своем уровне. Контроллер в системе DeltaV отвечает за выполнение различных задач. Основная задача – это выполнение алгоритмов управления. Контроллер выполняет также и другие задачи, например, такие как обработка каналов ввода/вывода, обмен данными с другими узлами и диагностика. Компактность и модульность конструкции позволяет с минимальными затратами удовлетворить требования, предъявляемые технологическим процессом. Управляющее оборудование DeltaV снабжено прочной модульной конструкцией, гибкостью монтажа и может быть установлено почти где угодно. Пример подключения устройств полевого уровня в составе цифровой системы автоматизации (ЦСА) Delta-V представлен на рис. 1.7.

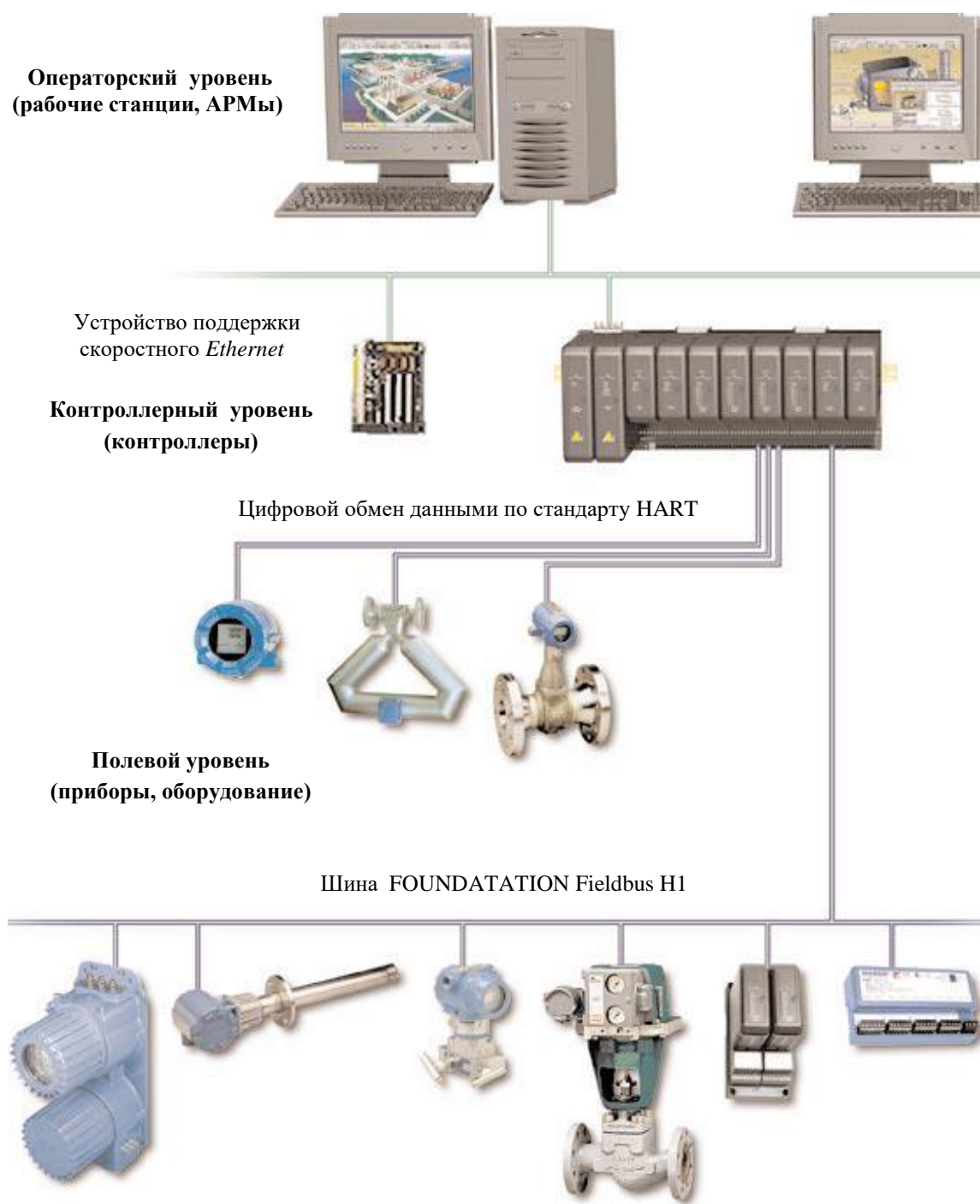


Рис. 1.7. Пример подключения устройств в ЦСА DeltaV

## Лекция №2

### Тема: «Цифровые САР как подсистемы исполнительного уровня ЦСУ»

#### 1.1 Вводные замечания и предварительные сведения (см. Лекция №1)

ЦСАР – это система автоматического управления с простейшей целью управления: регулирование значений выходов УУ в соответствии с заданным законом их изменения во времени ( $y(t) \rightarrow y^*(t)$ ), в которой для реализации алгоритма управления используется ЦВУ (микроЭВМ, программируемый контроллер и т.п.). Объект управления предполагается непрерывным, состоящим из устройств непрерывного действия (УНД) и, в общем случае, многомерным и много-

связным (т.е. имеющим несколько входов и выходов). Для согласования форм представления сигналов по входам-выходам ОУ и ЦВУ, в состав УУ необходимо входят технические средства (устройства) также дискретного действия (УДД): аналого-цифровые преобразователи – АЦП и цифроаналоговые преобразователи – ЦАП. Совместно с ЦВУ они образуют управляющее цифровое вычислительное устройство (УЦВУ): АЦП+ЦВУ+ЦАП=УЦВУ. Предполагается также, что в ЦСАР используется принцип управления (регулирования) по отклонению, который для повышения точности воспроизведения задающего сигнала, может дополняться принципом управления по разомкнутому циклу введением компенсирующих (инвариантных) связей по возмущению и по задающему воздействию.

Учитывая иерархическую природу управления (цель и алгоритм управления формулируются, формируются и вносятся в УУ извне), можно любую ЦСАР формально считать подсистемой исполнительного уровня в составе некоторой более сложной СУ. С учетом сказанного, для обобщенной структуры ЦСАР, без учета компенсирующих связей, будем рассматривать два основных варианта, представленных на рис. 2.1: Схема 1 – с непрерывным сигналом ошибки и Схема 2 – с цифровым сигналом ошибки).

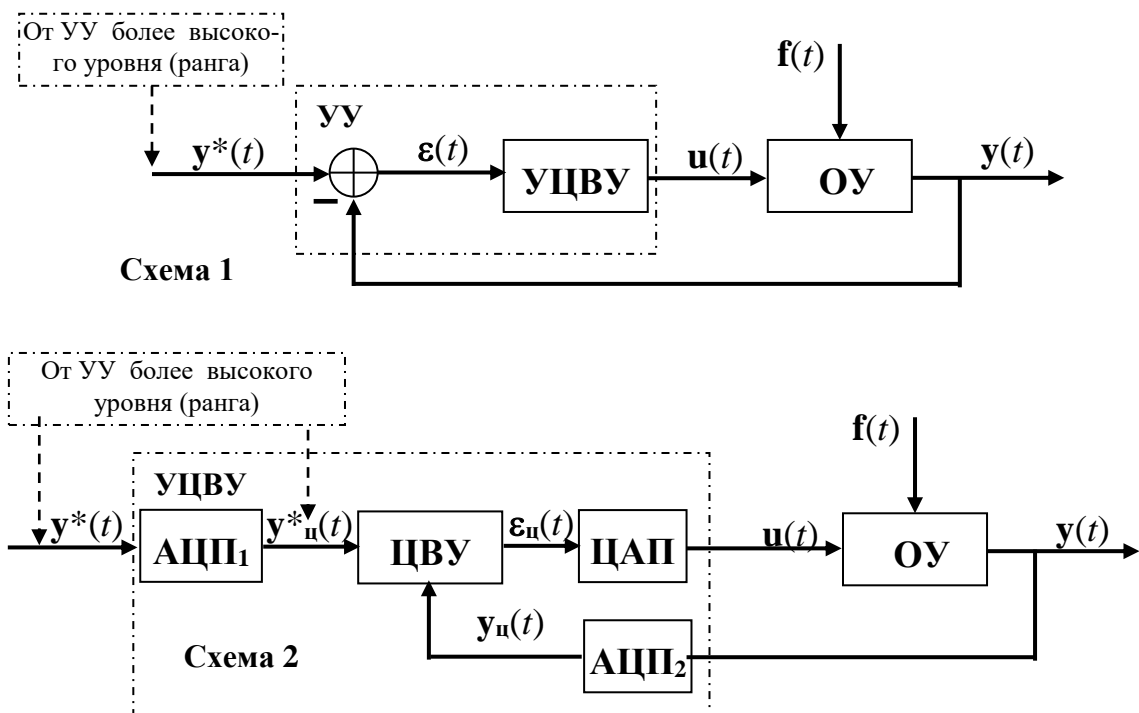


Рис. 2.1. Два основных варианта обобщенной структуры ЦСАР

Если в  $ОУ = \{ОУ_i\}$  перекрестные связи между каналами передачи воздействий пренебрежимо малы (слабые), то аналогичные структуры будут для каждого из  $n$  несвязанных между собой одномерных каналов регулирования в составе ЦСАР. При этом становится возможным (на первых этапах исследования) применение теории одномерных дискретных (цифровых) САР.

## 2.2 Задачи и методы теории ЦСАР

ЦСАР являются современным и наиболее важным типом ДСУ, которые в составе УУ обязательно содержат цифровые устройства в виде АЦП, ЦВУ и ЦАП, у которых часть рабочих сигналов представляют собой последовательности цифровых кодов. Кроме них, УУ может содержать и другие устройства дискретного действия (импульсные элементы и цепи). Общим для них является то, что они, выполняя преобразование входных сигналов, воспринимают не все, а только выборочные (по времени) их значения, игнорируя все остальные. Поэтому обратная связь в ДСУ замыкает контур управления только в дискретные моменты времени, а в промежутках между ними он разомкнут. Это вносит, особенно при значительных «расстояниях»

между моментами замыкания, существенные особенности в поведении и свойства ДСУ, а также в способы математического описания и теоретического исследования. По этой же причине, методы непрерывной теории непосредственно неприменимы, а требуют существенной доработки и модификации. Задачи, которые возникают при исследовании ДСУ, аналогичны задачам непрерывной теории. Это, прежде всего, получение математических описаний (моделей) как для отдельных элементов системы, так и для всей ДСУ в целом. Для конструктивного применения теоретических методов эти модели приводятся к стандартному и удобному для исследования виду. При этом особое внимание уделяется методам линеаризации ММ, поскольку это открывает возможность применения методов линейной теории. Затем решаются типовые задачи анализа в линейной постановке (устойчивость, оценка качества переходных и установившихся режимов, исследование управляемости, наблюдаемости и влияния параметров УУ на эти свойства). При этом рассматриваются методы временной, комплексной и частотной областей. Затем решаются задачи динамического синтеза в различных его постановках в рамках классического и современного (основанного на методах пространства состояний) подходов. Следующий этап исследования – учет влияния нелинейностей как естественных, так и специально вводимых в алгоритм управления – это уже в рамках раздела нелинейной теории. Перечисленные задачи являются общими как для непрерывных, так и для дискретных (в том числе и цифровых) САУ. Однако в дискретной постановке все они существенно усложняются необходимостью учета дискретизации сигналов по времени цифровыми и импульсными устройствами. Для упрощения этих проблем, на практике часто получают ЦСУ переоборудованием (модернизацией) уже существующих, но устаревших непрерывных СУ путем замены непрерывных датчиков на цифровые, а АБУ, реализующие алгоритмы управления – на ЦВУ. При этом инструментальные погрешности реализации алгоритмов управления существенно уменьшаются, а методическую погрешность от квантования по времени правильным выбором алгоритма работы ЦВУ и величины  $T_0$  можно сделать достаточно малой. Необходимые рекомендации на эту тему следуют из методов теории ДСУ. Иногда для применения такого метода предварительно выполняется проектирование непрерывного варианта СУ, который затем служит эталоном (аналоговым прототипом) ЦСУ. Недостаток такого подхода в том, что качество процесса управления потенциально ограничено и не выше, чем в аналоговом прототипе при идеальной реализации алгоритмов управления (т.е. при нулевых инструментальных погрешностях и отсутствии шумов, помех и т.п.).

### 2.3 Структурное представление для устройств дискретного действия

Особенностью теории автоматического управления является то, что в ней вместо реальных устройств и их соединений рассматриваются абстрактные звенья с известными математическими описаниями (модели), которые дают достаточно полное представление об основных особенностях и этапах преобразования входных сигналов устройства в выходные сигналы. Часто эти модельные представления имеют наглядную графическую форму в виде эквивалентных структурных схем (схем замещения). Для устройств непрерывного действия, которые преобразуют входной непрерывный сигнал, описываемый функцией непрерывного аргумента – времени  $f(t)$ , в другой, также непрерывный сигнал, это будут *непрерывные динамические звенья*, т.е. структурные блоки, оператор преобразования которых  $A_i$  задается явно (формулой) или неявно (одним или несколькими дифференциальными или алгебраическими, в общем случае нелинейными, уравнениями). В случае линейного динамического звена, его оператор преобразования может быть задан не во временной, а в комплексной или в частотной области и иметь, соответственно, вид передаточных функций или частотных характеристик. Для теоретического исследования ДСУ аналогичные модельные представления необходимы для каждого из устройств в составе системы.

Особенностью ДСУ является то, что они кроме обычных устройств непрерывного действия (УНД), всегда содержат и такие устройства, выходы (или входы) которых представляют собой прерывистые (цифровые или импульсные) сигналы. Это могут быть, например, импульсные

элементы (ИЭ), импульсные цепи, аналого-цифровые (АЦП) и цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП), цифровые вычислительные устройства (ЦВУ). Для краткости будем называть их *устройствами дискретного действия (УДД)*.

♦ Устройства непрерывного действия (УНД) – это традиционные устройства любого назначения, которые воспринимают и преобразуют в выходные сигналы значения входных сигналов в *любой* текущий момент времени  $t$ . В них используется непрерывный способ передачи и преобразования информации. Если все устройства в составе УУ и ОУ являются непрерывными, то такие СУ называется также *непрерывными*. Их поведение и свойства могут быть описаны средствами непрерывного математического анализа, а методы анализа и синтеза таких систем изучаются в теории непрерывных САУ.

♦ Устройства дискретного действия (УДД) – это специальные (нетрадиционные) технические устройства различного назначения (датчики, усилители, вычислители, преобразователи и т.п.), которые воспринимают и преобразуют значения входных сигналов (входов) только в дискретные (выборочные) моменты времени  $t_k$ . При этом значения информационных параметров выходных сигналов УДД обновляются не непрерывно, а только при  $t = t_k$ . В большинстве практически важных применений  $t_k = kT_0$ , где  $T_0$  – постоянный шаг (период) дискретизации по времени, а  $k=0, 1, 2 \dots$  – *целочисленная переменная (номер шага дискретизации)*. В УДД используется дискретный (с перерывами и паузами во времени) способ передачи и преобразования информации с помощью прерывистых сигналов.

Различают два вида прерывистых (в информационном смысле) сигналов: а) аналоговые (импульсные) и б) цифровые (кодоимпульсные).

Импульсный аналоговый сигнал представляет собой последовательность импульсов некоторой физической величины определенной формы (напряжений, токов, освещенности, температуры, влажности, радиоактивности и др.). Функция формы импульсов  $S(t)$  может быть, например, прямоугольной, а параметрами импульсной последовательности могут быть амплитуда, ширина, временное расположение (фаза) очередного импульса, расстояние между соседними импульсами (частота). Соответственно этому различают амплитудно-, широтно-, фазо- и частотно-модулированный вид импульсного сигнала (АИМ, ШИМ, ФИМ, ЧИМ). При этом под импульсной модуляцией (ИМ) понимается процедура получения импульсного сигнала из непрерывного входа  $f(t)$ . УДД в этом случае называют импульсным элементом (ИЭ) или импульсным модулятором. Различают ИМ первого и второго рода. Модуляция ИМ-I соответствует равномерной дискретизации по времени входного сигнала  $f(t)$ , при которой значения информационного параметра  $\alpha$ , а значит и самого выходного сигнала ИЭ полностью определяются дискретными равноотстоящими по времени значениями входа  $f(kT_0)=f[k]$ , т.е. его решетчатой функцией.

### 2.3.1 Эквивалентные схемы замещения для импульсных УДД

Из-за наличия в составе ДСУ устройств как непрерывного, так и дискретного действия, в них всегда имеют место преобразования непрерывных сигналов в прерывистые (импульсные или цифровые). Они осуществляются специальными техническими устройствами – импульсными элементами (ИЭ) и аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). Часто их называют, соответственно, импульсными и кодоимпульсными *модуляторами*, понимая под модуляцией изменение информационных параметров импульсных или кодовых последовательностей в соответствии с *выборочными* (по времени) значениями непрерывного сигнала  $X(t)$  при  $t = t_k$ .

При импульсной и кодоимпульсной модуляции *всегда* происходит дискретизация непрерывного сигнала *по времени*, т.е. выборка его дискретных (решетчатых) значений. На структурных схемах этому соответствует условное изображение в виде ключа мгновенного контакта «\_\_\_/ \_\_\_», замыкающегося при  $t = t_k$ . При этом если значения информационного параметра  $\alpha$  для импульсной или кодовой последовательности определяются только решетчатой функцией входного сигнала  $X(t=t_k)=X(kT_0)=X[k]$ , то имеет место модуляция первого рода (I), а во всех



остальных случаях – модуляция *второго* рода (II). Первая из них является более простой для математического описания и исследования.

• Импульсный элемент ИЭ является *импульсным модулятором* (ИМ-I или ИМ-II). В зависимости от вида *информационного параметра*  $\alpha$  для импульсной последовательности на выходе ИЭ (амплитуда импульса  $A$ , ширина  $\tau$ , частота следования  $\omega_0$ , фаза  $\theta$ ) различают следующие виды импульсной модуляции: амплитудная (АИМ), широтная (ШИМ), частотная (ЧИМ), фазовая (ФИМ). Соответственно этому меняются и названия типов ИЭ и импульсных систем.

При этом форма импульсов может быть различной и математически описывается финитной функцией  $S(t)$  на интервале времени  $[0, T_0]$ . Примерный вид импульсных сигналов (последовательностей импульсов) для АИМ, ШИМ и ФИМ с прямоугольной формой импульсов и модуляцией I рода при линейном сигнале на входе ИЭ показан на рис. 2.2.

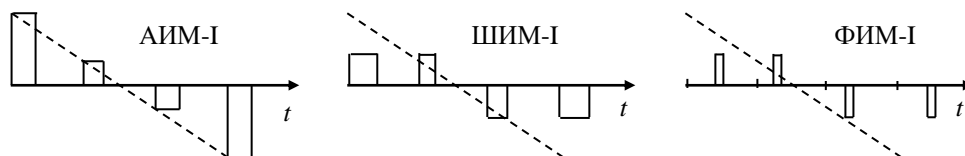


Рис. 2.2. Виды импульсной модуляции I-го рода

Зависимость значений информационного параметра  $\alpha$  от выборочных значений  $X(t_k)$  входного сигнала называется *модуляционной* (статической) характеристикой ИЭ, график которой в общем случае нелинейный. Важно отметить, что из всех видов модуляции *только* АИМ при линейной статической характеристике ИЭ является линейным преобразованием сигнала. Во всех остальных случаях свойство линейности и принцип суперпозиции не выполняются, что значительно усложняет описание и исследование таких импульсных СУ. Для простоты дальнейшего исследования будем полагать далее, что свойство линейности при ИМ выполняется.

### 2.3.2 Эквивалентные схемы замещения для цифровых УДД

Преобразование непрерывного сигнала  $X(t)$  в последовательность цифровых двоичных кодов (кодовых импульсов) осуществляется аналого-цифровым преобразователем (АЦП), который является кодоимпульсным модулятором (КИМ). Формальное отличие КИМ от АИМ с прямоугольной формой импульсов при коэффициенте скважности  $\gamma = 1$  состоит лишь в том, что информационный параметр  $\alpha$  (величина  $N$  цифрового кода) может принимать только целочисленные (разрешенные) значения, соответствующие равноотстоящим на  $\delta_x$  уровням входного сигнала. Поэтому, при формировании кодовой последовательности из непрерывного сигнала  $X(t)$ , кроме дискретизации его по времени *всегда* происходит и дискретизация (квантование) по уровню. Эта особенность цифровых сигналов часто используются как классификационный признак при делении ДСУ на цифровые (ЦСУ) и импульсные системы управления (ИСУ).

Модуляционная (статическая) характеристика АЦП является существенно нелинейной и имеет вид многоступенчатой релейной характеристики, показанной на рис. 2.3, а. При этом, если  $n$  - число двоичных разрядов АЦП, а  $X_m$  - диапазон изменения входного сигнала, то "цена" единицы младшего разряда двоичного кода (шаг квантования входного сигнала по уровню) равна  $\delta_x = X_m / (2^n - 1)$ . При большом (не менее десяти) числе разрядов  $n$  величина  $\delta_x \ll X_m$  и влиянием такой нелинейности (по крайней мере, на первых этапах исследования) можно пренебречь. Тогда модуляционная характеристика АЦП заменяется линейной (линеаризуется по методу секущих) с коэффициентом наклона  $K_1 = \delta_x^{-1}$ . В этом случае исчезает всякое формальное отличие КИМ от АИМ, а значит и формальное различие (с точки зрения вида математического описания и методов анализа) цифровых и амплитудно-импульсных (с прямоугольной формой импульса) ДСУ.

Для большей наглядности и удобства получения математических описаний (моделей) ДСУ для каждого УДД (ИЭ, АЦП, ЦАП, ЦВУ) удобно использовать их *эквивалентные схемы заме-*

щения, учитывающие основные этапы и особенности преобразования сигналов этими устройствами. Так, например, представив процесс ИМ-1 в виде трех последовательно выполняемых действий (этапов): а) выборка дискретного значения входа  $X(t=t_k)=X(kT_0)=X[k]$ ; б) определение значения информационного параметра  $\alpha_k = \varphi(X[k])$ ; в) формирование соответствующего очередного импульса  $S_k(t)$  определенной формы, можно изобразить структурную схему (эквивалентную схему замещения) ИМ-1 (см. рис. 2.4, а). Она имеет вид последовательного соединения трех (по числу этапов преобразования) структурных блоков: абстрактного «ключа», преобразующего непрерывный сигнал  $X(t)$  в дискретный  $X[k]$ ; безынерционного, в общем случае нелинейного звена (БНЗ) с модуляционной характеристикой  $\alpha = \varphi(X)$  и *формирователя импульсов* (ФИ) с функцией формы импульса  $S(t)$  и выходным импульсным сигналом  $X_{и}(t)$ .

При линейной статической характеристике ИЭ ( $\alpha=K_{и} X$ ) и прямоугольной форме импульсов с функцией  $S(t)=A \cdot (1(t) - 1(t-\tau))$ , где  $\tau$  – ширина (длительность), аналитические выражения для выходов ИЭ  $X_{и}(t)$  для разных типов модуляции существенно отличаются:

$$\text{АИМ-1: } A=1, \tau=\tau_0=\text{const}; X_{и}(t)=\sum_{k=0}^{\infty} K_{и} X[k] \bullet S(t-kT_0). \text{ (Выход линейно зависит от } X[k]).$$

$$\text{ШИМ-1: } A=A_0=\text{const}; \tau_k=K_{и} X[k]; X_{и}(t)=\sum_{k=0}^{\infty} A \bullet (1(t-kT_0) - 1(t-kT_0 - K_{и} X[k])).$$

Очевидно, что только АИМ в случае линейной статической характеристики ИЭ выполняет линейное преобразование сигнала. Вид графика функции  $S(t)=A \cdot (1(t) - 1(t-\tau))$  при  $\tau=\gamma T_0$  и  $A=1$  для АИМ-1 показан на рис. 2.3, б. Параметр  $\gamma = \tau/T_0$  называют коэффициентом скважности импульсов. В предельном случае, когда  $\tau=T_0$ , а  $\gamma=1$  формирователь ФИ представляет собой *фиксатор*  $\Phi_0$ , называемый также *экстраполятором нулевого порядка*. Объединение «ключа» и фиксатора принято называть «устройством выборки-хранения» (УВХ). Формально оно соответствует ИЭ-1 при  $K_{и}=1$  и  $\PhiИ=\Phi_0$ , который выполняет ступенчатую аппроксимацию входного сигнала при ширине ступенек равной  $T_0$ , и их уровнях, совпадающими с выборочными значениями сигнала  $X[k]$ .

Структурное представление УВХ показано на рис. 2.4, б.

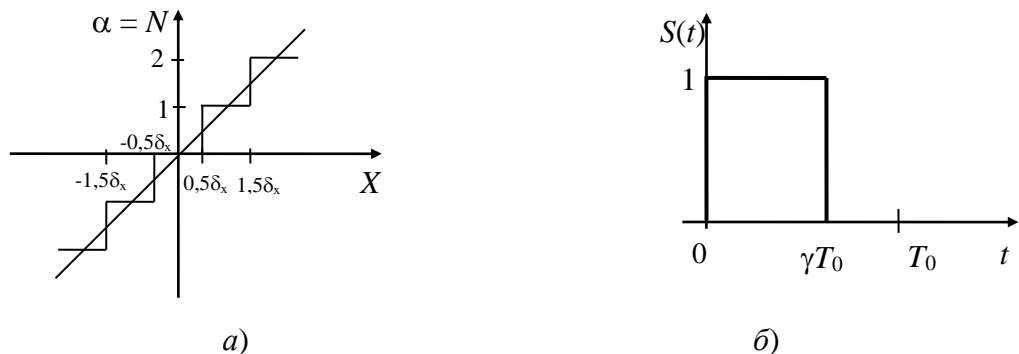


Рис. 2.3. Статическая характеристика АЦП, а) и форма импульса для АИМ-1, б)

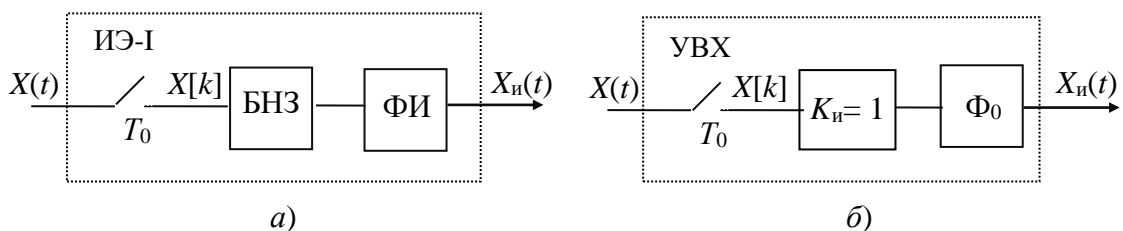


Рис. 2.4. Структурные представления для ИЭ-1 и УВХ

••Аналого-цифровые преобразователи в составе ЦСУ необходимы для согласования формы представления выходов непрерывных звеньев со входами цифровых вычислительных устройств. В процессе такого преобразования можно выделить следующие этапы:

- а) выборка дискретного по времени значения входного сигнала;
- б) двоичное кодирование (определение соответствующего значения цифрового кода за некоторое конечное время преобразования  $\tau_1$ );
- в) запоминание полученного значения кода в регистре данных АЦП.

Эквивалентная схема замещения, учитывающая эту последовательность действий для АЦП с периодическим запуском (величина периода  $T_0$ ), изображена на рис. 2.5. Она имеет вид последовательного соединения «ключа», безынерционного нелинейного звена (БНЗ) со статической характеристикой "многоступенчатое реле", фиксатора  $\Phi_0$  и звена запаздывания на время преобразования  $\tau_1$  в АЦП. При необходимости, это запаздывание (задержку) можно учесть в составе других звеньев, расположенных за АЦП в последовательной цепи прохождения сигнала. Если  $\tau_1 \ll T_0$ , то его не учитывают. В современных АЦП число разрядов  $n \geq 10$ , поэтому БНЗ в схеме замещения можно заменить на линейное звено с коэффициентом передачи  $K_1 = 1/\delta_x$ .

Периодический ключ с периодом  $T_0$  в схемах замещения – это абстрактный структурный элемент, который преобразует непрерывный сигнал  $X(t)$  в *дискретный сигнал*  $X[k]$ . Математической моделью получаемого дискретного сигнала является *решетчатая функция*.

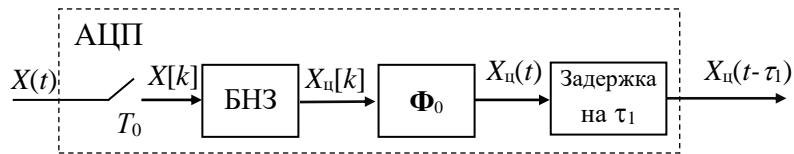


Рис. 2.5. Эквивалентная схема замещения для АЦП

Прерывистый сигнал на выходе ИЭ-1 и АЦП с периодическим запуском полностью определяется решетчатой функцией входного сигнала и не зависит от его значений в промежуточные моменты времени.

••• Для согласования формы представления цифровых сигналов и входов непрерывных звеньев в составе ЦСУ применяются цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП). Процесс преобразования сигнала в ЦАП удобно разбить на три этапа:

- а) периодический прием с периодом  $T_0$  очередного кода  $N_k$  (выборка);
- б) сохранение на время  $T_0$  полученного цифрового кода  $N_k$  (фиксация);
- в) преобразование принятого цифрового двоичного кода  $N_k$  в соответствующий уровень аналогового сигнала (обычно в напряжение).

Статическая характеристика ЦАП в общем случае нелинейная. Часто ее считают линейной с коэффициентом наклона  $K_2 = \delta_y$ , где  $\delta_y$  – величина выходного сигнала ЦАП, соответствующая единице разряда двоичного кода ("цена" младшего разряда). Временем преобразования  $\tau_2$  в ЦАП, ввиду его относительной малости, обычно пренебрегают. С учетом этого, эквивалентная схема замещения ЦАП изображена на рис. 2.6, а. Она представляет собой последовательное соединение «ключа», фиксатора  $\Phi_0$  и безынерционного линейного звена с коэффициентом передачи  $K_2$ .

•••• Цифровое вычислительное устройство (ЦВУ), работающее по циклической программе с периодом повторения во времени  $T_0$ , используется в ЦСУ для реализации алгоритмов управления. При этом на каждом периоде  $T_0$  оно выполняет следующие действия над входным цифровым сигналом (или сигналами, если их несколько):

- а) прием очередного цифрового кода от АЦП или от другого ЦВУ (выборка);

- б) преобразование принятого кода в соответствии с некоторым математическим правилом (оператором преобразования  $\mathcal{A}_k$ ) за время  $\tau_b$  и с некоторой погрешностью, обусловленной конечной длиной разрядной сетки ЦВУ;
- в) запоминание полученного результата до следующего его обновления.

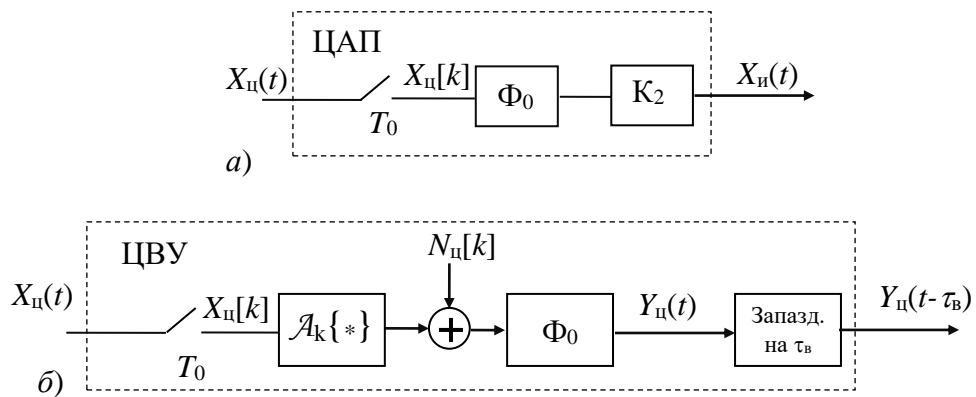


Рис. 2.6. Эквивалентные схемы замещения для ЦАП и ЦВУ

Эти этапы преобразования условно отображены в графическом виде на эквивалентной схеме замещения ЦВУ, представленной на рис. 2.6, б. Здесь погрешности округления учтены аддитивным дискретным шумом  $N_{ц}[k]$ , а конечное время выполнения арифметических операций – звеном запаздывания на время  $\tau_b$ . Если  $\tau_b \ll T_0$ , то запаздывание не учитывают. При высокой разрядности ЦВУ, шумом округления  $N_{ц}[k]$  также пренебрегают. В этих случаях эквивалентная схема замещения ЦВУ соответственно упрощается.

ЦВУ совместно с АЦП и ЦАП образуют *управляющее вычислительное устройство (УВУ)*. Для работы его в *реальном масштабе времени* должно выполняться *обязательное* и очевидное условие:  $\tau_1 + \tau_b + \tau_2 \leq T_0$ . В противном случае УВУ не будет успевать вычислять очередное значение управляющего воздействия за период повторения программы  $T_0$ .

♦ Если ЦВУ принимает для обработки несколько цифровых входных сигналов и/или производит вычисления результатов для нескольких выходов, то дискретизация (выборка) осуществляется по каждому входу, а запоминание результатов – по каждому выходу. При этом оператор преобразования  $\mathcal{A}_k\{*\}$  будет представлять собой матрицу операторов.

### 2.3.3 Расчетные структурные схемы ЦСАР и способы их получения

Из-за наличия УДД и УНД, *исходная* математическая модель ДСУ всегда будет *дискретно-непрерывной* и поэтому точное исследование ее методами непрерывной теории в принципе невозможно. Для теоретического исследования ДСУ ее математическое описание (модель) необходимо преобразовывать к специальному *расчетному виду*, представляющему собой совокупность уравнений и функциональных зависимостей относительно функций дискретного аргумента – *решетчатых функций*  $f_i(kT_0) = f_i[k]$ . Это могут быть формулы, алгебраические и разностные уравнения, а также их различные сочетания.

Структурная схема такой *дискретной модели* будет представлять собой соединение абстрактных *однонаправленных дискретных звеньев*, входы и выходы которых являются *дискретными сигналами* с математическим описанием в виде решетчатых функций  $f_i[k]$ . В составе полученной таким образом *расчетной структурной схемы* могут встретиться как типовые (последовательное, параллельное, встречно-параллельное), так и другие, более сложные, соединения дискретных звеньев.

Для исследования динамических свойств и особенностей цифровых и импульсных систем управления на основе их дискретных математических моделей разработаны специальные методы, составляющие содержание теории ДСУ. Наиболее простым для изучения здесь явля-

ется раздел линейных дискретных систем. Рассматриваемые здесь проблемы и задачи, в основном, те же, что и в теории непрерывных линейных СУ (устойчивость, стабилизация, качество, анализ, синтез, расчет корректирующих устройств и др.). Методы их решения, а также основные понятия и терминология, также аналогичны, но есть и специфика, связанная с применением дискретного математического аппарата. Кроме того, здесь возникают и новые задачи, связанные с получением *расчетных дискретных математических моделей* ДСУ, в состав которых всегда входят как УДД, так и традиционные устройства непрерывного действия УНД:

### Лекция №3

#### Тема: «Расчетные математические модели и структурные схемы ЦСАР»

#### 3.1 Предварительные сведения

Для применения теоретических методов исследования цифровых и импульсных САР необходимо располагать их математическими описаниями (моделям) При этом, ввиду наличия в составе ДСУ устройств двух типов (УНД и УДД), точная математическая модель (ММ) ДСУ всегда будет неоднородной (дискретно-непрерывной). В то же время для использования математических и других, специальных методов теории ДСУ, ММ должна иметь однородный (дискретный) вид относительно функций дискретного аргумента – решетчатых функций  $f_i[k]$ .

Такая форма ММ ДСУ называется расчетной и получение ее из исходной дискретно-непрерывной формы является обязательной, специфичной и важной задачей, которой нет аналога в теории непрерывных СУ.

*Расчетная форма ММ ДСУ*, представляет собой совокупность уравнений и функциональных зависимостей относительно *решетчатых функций*  $f_i(kT_0) = f_i[k]$ . Это могут быть формулы, алгебраические и разностные уравнения, а также их различные сочетания.

Структурная схема такой *дискретной модели* будет представлять собой соединение абстрактных однонаправленных дискретных звеньев, входы и выходы которых являются *дискретными сигналами* с математическим описанием в виде решетчатых функций  $f_i[k]$ . В составе полученной таким образом *расчетной структурной схемы* могут встретиться как типовые (последовательное, параллельное, встречно-параллельное), так и другие, более сложные, соединения дискретных звеньев.

Если дискретная ММ является линейной, то соответствующее ей структурно-графическое представление (схему) всегда можно, используя правила структурных преобразований, привести к некоторому желаемому виду, например к схеме с единичной отрицательной связью (ЕООС).

В общем случае задача дискретизации математической модели смешанного типа точными методами не решается. Для этой цели могут быть использованы специальные приближенные математические приемы различной сложности и точности, основанные, как правило, на аппроксимациях дифференциальных уравнений конечно-разностными схемами.

Однако для ряда распространенных несложных типовых структур ДСАР точное решение задачи дискретизации (расчетная структурная схема и дискретная ММ каждого звена) можно получить простым инженерным методом, основанном на замене УДД их эквивалентными схемами замещения с последующими структурными преобразованиями. Это будет *структурный метод* получения расчетных схем ДСУ и их расчетных математических описаний (моделей).

Два наиболее распространенных вида типовых структур ЦСАР (Система 1 и Система 2), приведены на рис. 3.1 и рис. 3.2. Они используются далее для иллюстрации основных этапов, особенностей и ограничений структурного метода получения расчетных структурных схем ЦСАР.

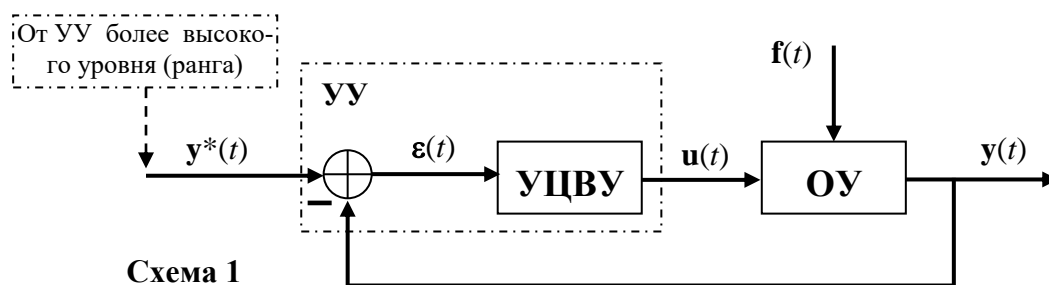


Рис. 3.1. Типовая структура ЦСАР – Схема 1

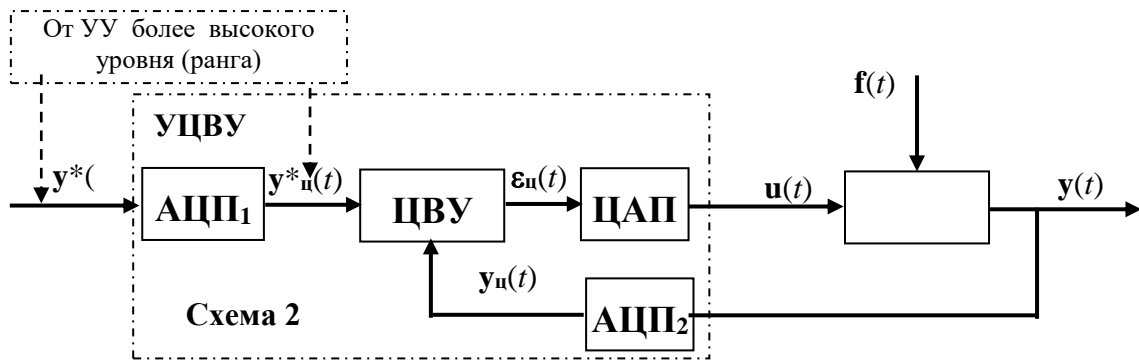


Рис. 3.2. Типовая структура ЦСАР – Схема 2

### 3.2 Описание структурного метода дискретизации ММ ЦСАР. Примеры

Основными этапами структурного метода при получении расчетных структурных схем ДСУ являются следующие:

1. *Замещение.* Все «нестандартные» устройства, т.е. устройства дискретного действия (УДД) в составе исходной структурной схемы заменяются своими эквивалентными схемами замещения. Формирователи импульсов ФИ, а также фиксаторы  $\Phi_0$  объединяются с расположенными следом за ними непрерывными частями НЧ с образованием *приведенных непрерывных частей* (ПНЧ) [3, 6].

2. *Дискретизация выхода.* Выходной сигнал системы рассматривается (*наблюдается*) только в дискретные моменты времени  $t_k = kT_0$ . Формально это соответствует размещению фиктивного (методического) ключа в цепи наблюдения на выходе непрерывной части и не влияет на вид процессов в системе. При необходимости получения информации о значениях выхода непрерывной части НЧ в промежуточные (смещенные) моменты времени  $t_k = kT_0 + \varepsilon T_0$ , в цепь наблюдения (перед ключом!) дополнительно размещается звено временного сдвига (упреждения!) на время  $\tau = \varepsilon T_0$ . При этом параметр  $\varepsilon$  задается некоторым значением из интервала (0; 1).

3. *Структурные преобразования.* Выполняются *допустимые* преобразования полученной выше промежуточной структурной схемы (переносы «ключа» и УВХ с выхода сумматора на его входы и наоборот; перенос ключа и УВХ через безынерционное звено; изменение порядка следования линейных звеньев и др.). Кроме того, последовательно расположенные *фиксатор с ключом на выходе* не меняют дискретного сигнала и *такое* их соединение эквивалентно тривиальному звену с единичным коэффициентом передачи. Для соединения линейных динамических дискретных звеньев справедливы те же правила эквивалентной замены, что и для соединений непрерывных линейных звеньев.

4. *Определение дискретных звеньев.* Выявляются участки (фрагменты) структурной схемы, для которых как входы, так и выходы являются дискретными сигналами. Эти участки структурной схемы *объявляются дискретными звеньями*. Так, например, ПНЧ с ключом на выходе образуют *дискретное звено приведенной непрерывной части* (ДЗ ПНЧ). Аналогично этому последовательно соединенные ПНЧ, звено упреждения на время  $\tau = \varepsilon T_0$  и «ключ» образуют дискретное звено *модифицированной приведенной части* (ДЗ МПНЧ). При этом суть модификации состоит в размещении и учете дополнительного *звена упреждения* в цепи наблюдения.

Результатом выполнения указанных действий будет некоторое соединение *однонаправленных дискретных звеньев*, каждое из которых выполняет преобразование одного дискретного сигнала в другой дискретный сигнал. Такое их соединение и будет представлять собой *искомую расчетную структурную схему ДСУ*.

### 3.2.1 Примеры применения структурного метода

В качестве первого примера рассмотрим типовую структуру ЦСАР с непрерывным сигналом рассогласования (ошибки) – Схема 1 (рис. 3.1). Здесь УЦВУ – это комплекс цифровых устройств, состоящий из аналого-цифрового преобразователя (АЦП), цифрового вычислительного устройства (ЦВУ), работающего по циклической программе с периодом ее повторения  $T_0$  и цифроаналогового преобразователя (ЦАП). При этом АЦП и ЦАП работают не автономно, а под управлением программы ЦВУ, которая на каждом временном интервале длительностью  $T_0$  периодически запускает таймер на отсчет времени, а АЦП – на выполнение очередного кодирования сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$ , при завершении которого, считывает цифровой (обычно двоичный) код ошибки  $\varepsilon(kT_0)$  и преобразует его в цифровой код управляющего сигнала  $u(kT_0)$  в соответствии с принятым законом регулирования  $u[k]=A_k\{\varepsilon[k]\}$ . Далее, вычисленное значение  $u[k]$  через ЦАП передается на усилительно-преобразовательные устройства непрерывного действия в составе расширенного ОУ. Затем запоминается результат вычислений, обновляются данные в памяти для следующего цикла вычислений, а по окончании времени текущего цикла все действия, начиная с запуска таймера повторяются для следующего цикла.

После выполнения первого этапа, на котором АЦП, ЦВУ и ЦАП в составе УЦВУ заменяются своими схемами «замещения», и второго этапа (дискретизация выхода) **Схема 1** примет следующий вид (рис. 3.3). При этом предполагаем, что все «ключи» замыкаются одновременно, задержки на выполнение вычислений и преобразований нулевые, квантование по уровню не учитывается, а внешнее возмущение на ОУ отсутствует.

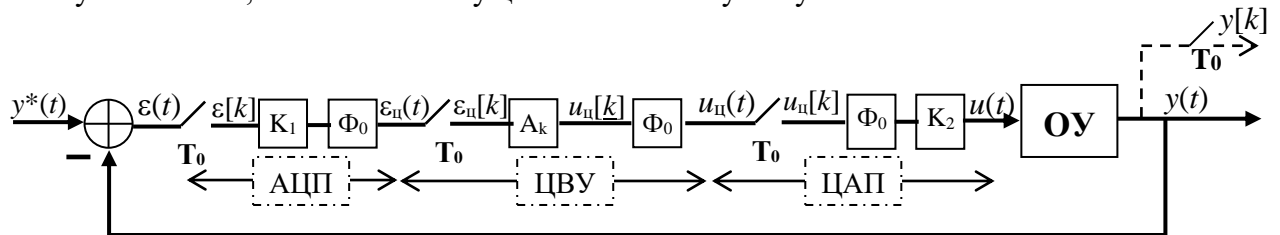


Рис. 3.3. Схема 1 после выполнения этапов «Замещение» и «Дискретизация выхода»

Применяя далее следующие эквивалентные преобразования: а) меняем местами блоки с именами  $K_2$  и  $\Phi_0$  в схеме ЦАП; б) заменяем фиксаторы с ключами на выходе тривиальными звеньями; в) переносим ключ с выхода сумматора на каждый его вход; г) объединяем ОУ и фиксатор на его входе в приведенную непрерывную часть (ПНЧ). В результате этого схема преобразуется к промежуточному (рис. 3.4, а) и окончательному (рис. 3.4, б) виду.

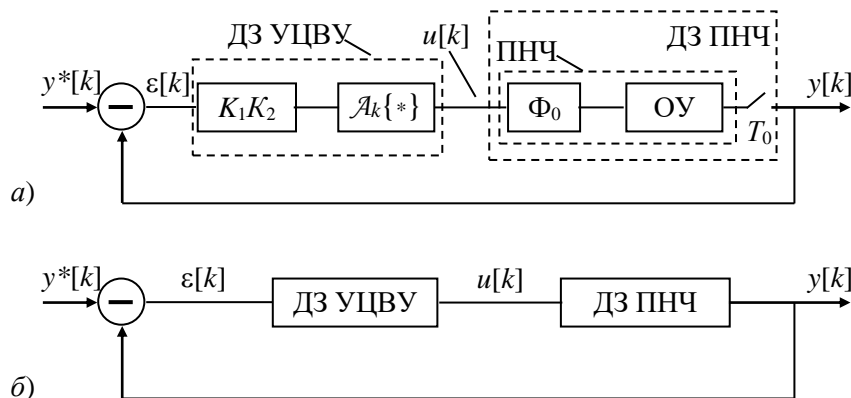


Рис. 3.4. Расчетная структурная схема ЦСАР для первого примера

Аналогичные по смыслу и порядку выполнения действия применяются для ЦСАР с цифровым сигналом рассогласования (Схема 2). Незначительные отличия обусловлены тем, что



УЦВУ принимает для обработки два непрерывных входных сигнала, поступающих на АЦП<sub>1</sub> и АЦП<sub>2</sub>, периодически запуская их на очередной цикл преобразований из программы работы ЦВУ, которое принимает от них коды сигналов, вычисляет значение кода рассогласования (ошибки) и преобразует его в значение кода управляющего сигнала. С учетом этого, ограничимся рассмотрением эквивалентных схем замещения только для УЦВУ (Рис. 3.5)

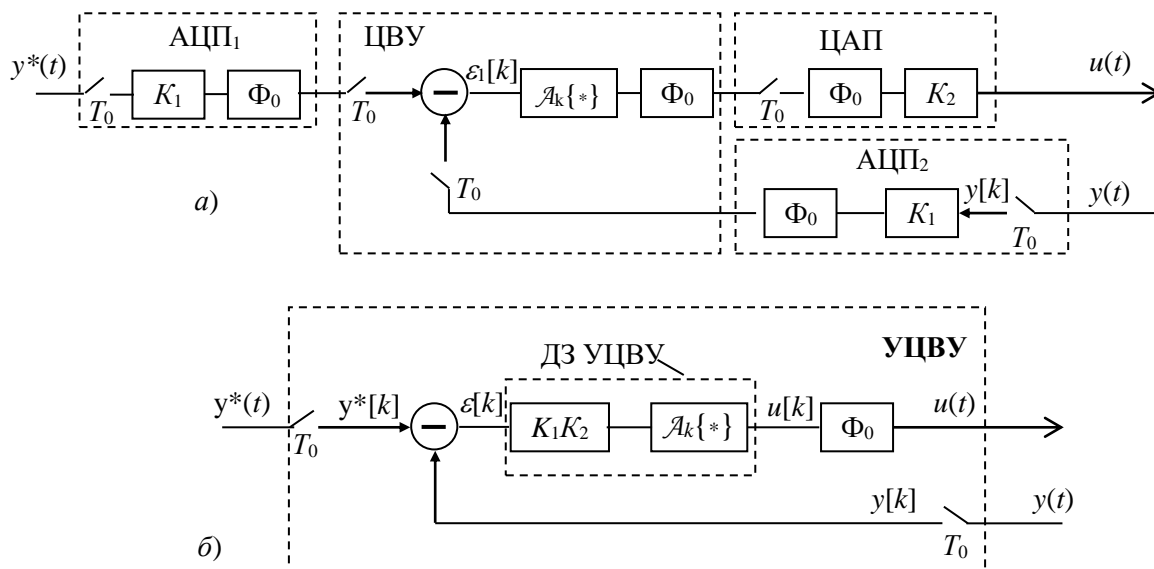


Рис. 3.5. Эквивалентные схемы замещения для УЦВУ с двумя входами

С учетом этого, после дальнейших преобразований (аналогичных первому примеру) получим расчетную схему ЦСАР второго примера (рис. 3.6).

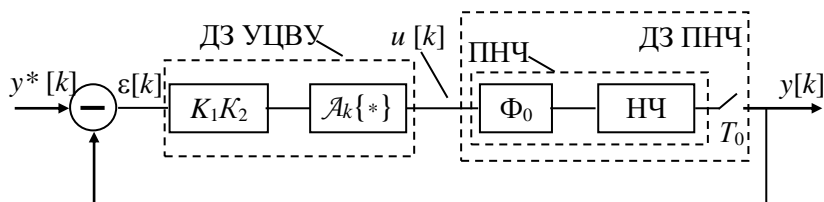


Рис. 3.6. Расчетная структурная схема ЦСАР с цифровым сигналом ошибки (Схема 2)

Здесь обозначено: ПНЧ – приведенная непрерывная часть; ДЗ ПНЧ – дискретное звено приведенной непрерывной части; ДЗ УЦВУ – дискретное звено управляющего вычислительного устройства;  $K_1$  и  $K_2$  – коэффициенты передачи для АЦП и ЦАП в предположении линейности их статических характеристик. Оператор преобразования ЦВУ  $\mathcal{A}_k$  предполагается линейным, задержки на преобразования и вычисления, а также шумы округления не учитываются.

Таким образом, исходные структурные схемы ЦСАР в тех случаях, когда внешние воздействия не поступают непосредственно на входы устройств непрерывного действия, сравнительно просто приводятся к расчетному виду в виде соединения только дискретных звеньев, а их входы и выходы описываются функциями дискретного аргумента, т.е. являются решетчатыми функциями. В остальных случаях, которые нами не рассматриваются, задача дискретизации становится более сложной и для ее решения возможности структурного метода существенно ограничены. Более сложным является получение расчетной схемы ДСУ и в случае нескольких импульсных элементов (или АЦП) при их работе с различными периодами дискретизации.

Чтобы применить теоретические методы исследования ЦСАР необходимо для каждого дискретного звена в составе расчетной структурной схемы располагать его математическим описанием (моделью). Это могут быть либо модели временной области в виде разностных уравнений, либо, в линейном случае, модели комплексной или частотной областей (передаточные функции

и частотные характеристики). Способы их получения и применения для исследования и динамического синтеза ЦСАР будут рассмотрены в следующих лекциях.

#### Лекция № 4

### Тема: «Математическое описание дискретных сигналов и звеньев во временной области»

#### Предварительные сведения

Расчетные структурные схемы дискретных систем управления всегда представляют собой некоторые соединения однонаправленных абстрактных дискретных звеньев (ДЗ). Каждое из них преобразует входной дискретный сигнал в выходной, тоже дискретный сигнал. Получение расчетных схем является начальным этапом теоретического исследования ДСУ. Для дальнейшего исследования свойств ДЗ и их соединений (систем) необходимо располагать соответствующими математическими описаниями (моделями). Аналогично непрерывным моделям, формы записи дискретных математических описаний могут быть различными, заданными как в произвольной, так и в стандартной (общепринятой, канонической) форме [3, 6]. Это могут быть, например, разностные уравнения «вход-выход», дискретные уравнения состояния, суммарные уравнения и т.п.

#### 4.1 Операторы преобразования ДЗ. Виды и способы задания

Рассмотрим некоторое дискретное звено с входом  $f(kT_0) = f[k]$  и выходом  $y[k]$  (рис.4.1). Преобразование  $f[k]$  в  $y[k]$  осуществляется в соответствии с некоторым набором математических правил и операций – оператором преобразования  $\mathcal{A}_k$  звена, определенном на множестве функций дискретного аргумента. Символически это обычно записывают в следующем виде:  $y[k] = \mathcal{A}_k\{f[k]\}$ .

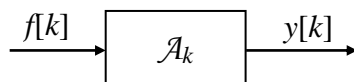


Рис. 4.1. Преобразование сигнала дискретным звеном

Аналогично непрерывным операторам, дискретные операторы преобразования  $\mathcal{A}_k$  принято классифицировать, подразделяя их на следующие типы:

- Одномерные и многомерные.
- Линейные и нелинейные.
- Стационарные и нестационарные.
- Детерминированные и стохастические.
- Безынерционные и динамические.
- Простые и сложные (составные).
- Физически реализуемые и нереализуемые.
- Устойчивые и неустойчивые.

Тип оператора преобразования определяет название и тип соответствующего дискретного звена (ДЗ), и его характерные свойства.

*Многомерные* дискретные звенья имеют несколько входов и/или выходов.

*Линейные* ДЗ преобразуют линейную комбинацию (взвешенную сумму) нескольких сигналов в линейную комбинацию точно таких же преобразований каждого из сигналов, т.е.

$$y[k] = \mathcal{A}_k\{\sum c_i f_i[k]\} = \sum c_i \mathcal{A}_k\{f_i[k]\}.$$

Если это свойство линейности не выполняется, то ДЗ и его оператор преобразования будут *нелинейными*.

*Стационарные* ДЗ во времени не меняют своих свойств, поэтому временной сдвиг входного сигнала (например, запаздывание) приводит к такому же временному сдвигу выходного сигнала:  $\mathcal{A}_k\{f[k-m]\} = y[k-m]$ . В противном случае вид реакции ДЗ будет зависеть не только от вида

входного сигнала, но и от момента начала подачи его на вход звена. Такое дискретное звено будет *нестационарным*.

*Детерминированные* ДЗ преобразуют входной сигнал известного вида в выходной сигнал, значение которого можно предсказать точно в любой момент времени, если точно задан оператор преобразования звена. Для стохастических звеньев некоторые (хотя бы один!) параметры принимают случайные значения, и предсказание выхода ДЗ становится возможным лишь в вероятностном смысле.

*Безынерционные* (статические) ДЗ – это звенья "без памяти". Для таких дискретных звеньев значение выхода в текущий момент времени  $t_k$  получается функциональным преобразованием значения входного сигнала *в тот же самый* дискретный момент времени:  $y[k] = \varphi(f[k])$ . В качестве таких функциональных преобразований здесь могут использоваться любые композиции алгебраических, тригонометрических и других, в общем случае нелинейных математических операций. При этом значения входа (или выхода) в какие-то другие моменты времени в безынерционных преобразованиях не участвуют.

*Динамические* ДЗ отличаются от статических звеньев тем, что значения выхода  $y(t_k)$  в текущий момент времени  $t_k$  в общем случае зависят еще и от значений входа (и, возможно, выхода) в какие-то другие моменты времени.

Как безынерционные, так и динамические операторы преобразования ДЗ могут быть заданы *явно*, с помощью формул, так и *неявно*, в виде одного или нескольких функциональных уравнений. Самым простым (тривиальным) дискретным оператором преобразования безынерционного типа является *единичный* (тождественный) оператор  $\mathcal{A}_k = I$ . Он не изменяет входного дискретного сигнала, т.е.  $y[k] = I\{f[k]\} = f[k]$ . Такое звено можно поместить на любом участке структурной схемы.

Примерами простых дискретных линейных операторов динамического типа являются операторы *сдвигов*, *разностей* и *сумм*. Вид соответствующих им операций, символы (обозначения) и действие этих операторов приведены в табл. 4.1. Среди них *элементарными* динамическими операторами являются операторы прямого ( $E$ ) и обратного ( $E_1$ ) сдвига. Они представляют собой взаимно обратные операторы ( $E_1 = E^{-1}$ ). Их *последовательное* применение эквивалентно единичному оператору ( $E \cdot E_1 = I$ ). Операторы разностей и суммирования, аналогичны операторам дифференцирования и интегрирования в непрерывном анализе и также являются взаимно обратными, то есть  $\nabla^{-1} = \sigma_1$ ,  $\Delta^{-1} = \sigma$ . Кроме того, есть ряд других полезных *формальных* соотношений между приведенными выше линейными операторами. В частности, легко убедиться в том, что  $\Delta = E - I$ ;  $\nabla = I - E_1$ ;  $\nabla = E_1 \Delta$ , а  $\sigma_1 = E \sigma$ . Такие соотношения удобно использовать при эквивалентных преобразованиях сложных операторных выражений. При этом с символами линейных операторов можно формально обращаться как с обычными алгебраическими переменными (перемножать, выносить общим множителем за скобки, рассматривать относительно них операторные полиномы и др.).

Таблица 4.1

**Простые линейные операторы динамического типа**

№ п.п.	Название оператора	Символ	Действие оператора
1	<i>Прямого сдвига</i>	$E$	$E f[k] = f[k+1]$
2	<i>Обратного сдвига</i>	$E_1$	$E_1 f[k] = f[k-1]$
3	<i>Прямой разности</i>	$\Delta$	$\Delta f[k] = f[k+1] - f[k]$
4	<i>Обратной разности</i>	$\nabla$	$\nabla f[k] = f[k] - f[k-1]$
5	<i>Неполного суммирования</i>	$\sigma$	$\sigma f[k] = f[0] + f[1] + \dots + f[k-1]$
6	<i>Полного суммирования</i>	$\sigma_1$	$\sigma_1 f[k] = f[0] + f[1] + \dots + f[k]$

Сложные операторы динамического типа всегда можно выразить некоторым образом через более простые динамические и безынерционные операторы. Обычно для такой цели используются простейшие линейные операторы временного сдвига  $E$  и  $E_1$ . Соответственно этому можно изобразить детализированные (до уровня звеньев временного сдвига) *структурные схемы* для более сложных динамических операторов. Такие детализированные схемы иногда называют схемами моделирования или схемами реализации [1, 8].

Многokrатному применению однотипных дискретных операторов на структурных схемах соответствует *последовательное* соединение соответствующих этим операторам дискретных ДЗ. Аналогично этому, сумме операторов соответствует *параллельное* соединение дискретных звеньев. В качестве примера на рис.4.2 приведены детализированные (до уровня операторов сдвига) структурные схемы для операторов прямой (*a*) и обратной (*в*) разностей, а также для операторов полной (*б*) и неполной (*з*) суммы.

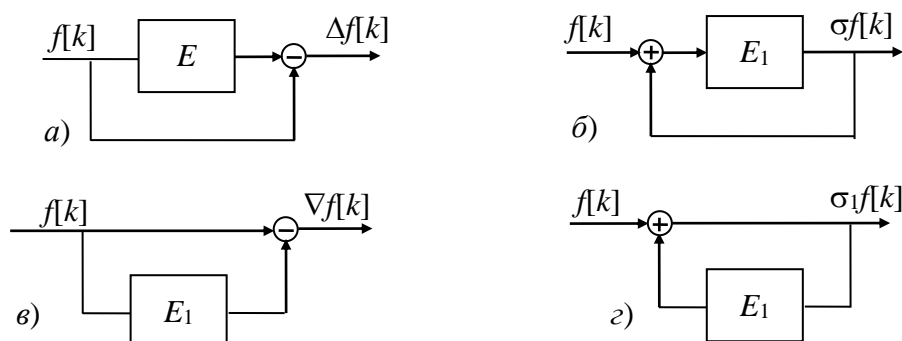


Рис. 4.2. Структурное представление операторов преобразования

Как отмечалось выше, важной особенностью линейных операторов является то, что с их символами можно формально оперировать как с обычными алгебраическими переменными при упрощениях операторных выражений. Так, например, для операций вторых разностей можно записать:

$$\Delta\{\Delta f[k]\} = \Delta^2 f[k] = (E-1)^2 f[k] = (E^2 - 2E + 1)f[k] = f[k+2] - 2f[k+1] + f[k];$$

$$\nabla\{\nabla f[k]\} = \nabla^2 f[k] = (1-E_1)^2 f[k] = (1 - 2E_1 + E_1^2)f[k] = f[k] - 2f[k-1] + f[k-2].$$

Оператор  $\mathcal{A}_k$  для ДЗ может быть задан *явно* (формулой, алгоритмом), либо *неявно* (одним или несколькими функциональными уравнениями). Если при этом искомая функция  $y[k]$  входит в уравнения под знаки операторов разностей или сдвигов, то подобные функциональные уравнения называются *разностными*.

Заметим, что вследствие указанной ранее простой алгебраической связи операторов разностей и сдвигов, уравнение в прямых ( $\Delta$ ) или в обратных ( $\nabla$ ) разностях всегда можно эквивалентно записать, используя операторы сдвига  $E$  или  $E_1$ . При этом за порядок разностного уравнения  $n$  принимается *старшая степень* операторов сдвига  $E$  или  $E_1$ .

Так, например, нелинейное разностное уравнение "вход-выход"  $n$ -го порядка для одномерного ДДЗ, первоначально записанное относительно прямых разностей различных порядков, всегда можно привести к одной из двух форм:

$$\Phi_1(y[k], \dots, y[k+n], f[k], \dots, f[k+m]) = 0; \quad (4.1)$$

$$\Phi_2(y[k], \dots, y[k-n], f[k], \dots, f[k-m]) = 0. \quad (4.2)$$

Первая из этих форм более удобна для теоретического исследования, а вторая – для программирования и численного решения разностных уравнений. Такие формы записи разностных уравнений часто называют рекуррентными, т.к. разрешив уравнение (4.1) относительно  $y[k+n]$  (или (4.2) относительно  $y[k]$ ), получим рекуррентную формулу для расчета *последую-*

щих значений искомой функции через *предыдущие* ее значения при  $k \geq 0$ . Возможны также и другие эквивалентные формы записи разностного уравнения "вход-выход" ДДЗ, которые будут *неявно* задавать тот же самый динамический оператор преобразования звена  $\mathcal{A}_k$ .

Для начала процесса рекуррентных вычислений всегда необходимо задавать *начальные условия*. Это будут  $n$  значений искомой функции выхода  $y[0], \dots, y[n-1]$  (или  $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ ), которым часто задают *нулевые* значения. Физический смысл нулевых начальных условий состоит в том, что ДДЗ до подачи внешнего воздействия находилось в состоянии покоя.

Оператор преобразования ДДЗ может быть также задан неявно с помощью *уравнений состояния*, каноническая форма записи которых имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}[k], f[k]); \\ y[k] &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}[k], f[k]), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{x}[k]$  – это  $n$ -мерный вектор вспомогательных переменных – координат состояния  $\{x_i\}$ , которые часто назначают как выходы *звеньев задержки* на  $T_0$  в детализированной структурной схеме ДДЗ (рис.4.3). Начальными условиями в этом случае будут значения выходов звеньев задержки при  $k=0$ .

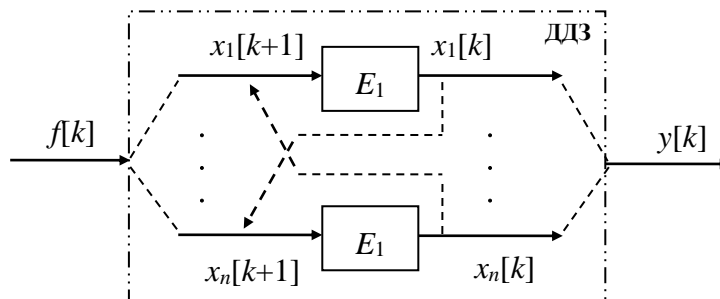


Рис. 4.3. Детализированное структурное представление ДДЗ

#### 4.2. Линейные дискретные динамические звенья. Математические модели, свойства и временные характеристики

Для операторов преобразования линейных дискретных звеньев (ЛДДЗ) выполняется свойство линейности (суперпозиции), и это существенно упрощает как формы их представления (записи), так и методы исследования.

Разностное уравнение "вход-выход" ЛДДЗ (4.1) принято записывать в стандартной форме (с правой частью):

$$a_0 y[k] + \dots + a_n y[k+n] = b_0 f[k] + \dots + b_m f[k+m]. \quad (4.4)$$

Операторная форма записи этого уравнения имеет следующий вид

$$A(E)y[k] = B(E)f[k], \quad (4.5)$$

где  $A(E)$  и  $B(E)$  – полиномы относительно оператора сдвига  $E$  (*операторные полиномы*) с коэффициентами  $a_i$  и  $b_i$  соответственно.

Аналогично можно записать в операторной форме разностные уравнения "вход-выход" относительно операторов обратного сдвига ( $E_1$ ), прямой разности ( $\Delta$ ) и обратной разности ( $\nabla$ ):

$$a) A_1(E_1)y[k] = B_1(E_1)f[k]; \quad б) A_2(\Delta)y[k] = B_2(\Delta)f[k]; \quad в) A_3(\nabla)y[k] = B_3(\nabla)f[k].$$

Переход от формы записи уравнений (4.5) к другой можно выполнить формально, используя алгебраические связи между операторами  $E$ ,  $E_1$ ,  $\Delta$ , и  $\nabla$ :

$$E_1 = E^{-1}; \quad \Delta = E - I; \quad \nabla = I - E_1; \quad \nabla = E_1 \Delta$$

Решение линейного разностного уравнения имеет следующий вид:

$$y[k] = y_1[k] + y_2[k], \quad (4.6)$$

где  $y_1[k]$  – общее решение *однородного* (без правой части) уравнения. Это свободная составляющая реакции ЛДДЗ, обусловленная начальными условиями;

Общее решение однородного уравнения имеет (в простых случаях, когда нет кратных корней) следующий вид:

$$y_1[k] = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k, \quad (4.7)$$

где  $C_i$  – произвольные постоянные, в конкретном случае зависящие от заданных начальных условий;  $z_i$  – *характеристические корни*, то есть корни характеристического полинома

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n. \quad (4.8)$$

$y_2[k] = y_{21}[k] + y_{22}[k]$  – частное решение уравнения с правой частью, соответствующее нулевым начальным условиям. Часть его  $y_{22}[k]$ , имеющая вид вынуждающей функции  $f[k]$ , называется *вынужденной* составляющей реакции ЛДДЗ. При этом другая его составляющая  $y_{21}[k]$  называется *переходной* составляющей выхода (реакции) дискретного динамического звена. Иногда её называют как собственная сопровождающая реакции ДДЗ. Линейное ДДЗ (асимптотически) устойчиво, если  $y_1[k]$  затухает при  $k \rightarrow \infty$ . При  $y_{21}[k] \rightarrow 0$ , ДДЗ устойчиво по входу. Причем из асимптотической устойчивости следует свойство устойчивости по входу (но не наоборот).

♦ Второй распространенной формой неявного задания оператора преобразования  $\mathcal{A}_k$  являются дискретные уравнения состояния, которые для линейного стационарного ДДЗ обычно записывают в *канонической* форме

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}f[k], \\ y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}f[k], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  – матричные коэффициенты соответствующих размеров.

Аналитическое решение уравнений (2.9) дается следующей формулой [6]:

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-m-1} \mathbf{B}f[m] + \mathbf{D}f[k]. \quad (4.10)$$

Здесь первое слагаемое описывает собственное (свободное) движение ЛДДЗ при *ненулевых* начальных условиях, а второе слагаемое – это частное решение уравнений (4.9), соответствующее *нулевым начальным условиям*.

♦ *Важной особенностью* линейных динамических звеньев является то, что их свойства полностью проявляются в *реакциях* на простейшие входные воздействия. Такие реакции ЛДДЗ (при *нулевых начальных условиях!*) принято называть *временными характеристиками*. С их помощью можно судить как о *собственных* динамических свойствах звена в переходных режимах, так и о преобразовательных свойствах звена. Так, например, можно определить реакцию ЛДДЗ на произвольное воздействие  $f[k]$ , поступающее на его вход при  $k \geq 0$ .

В качестве простейших входных воздействий используются такие функции дискретного аргумента, как а) решетчатая функция одиночного импульса  $\delta_0[k]$  и б) решетчатая единичная ступенчатая функция  $1[k]$ . Они формально определяются следующим образом:

$$\delta_0[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}; \quad 1[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}. \quad (4.11)$$

Эти функции связаны между собой следующими очевидными соотношениями:

$$\delta_0[k] = \nabla 1[k]; \quad 1[k] = \sigma_1 \delta_0[k]. \quad (4.12)$$

Реакция ЛДДЗ, находящегося в покое, на  $f[k] = \delta_0[k]$  называется его *весовой функцией*, а реакция на  $f[k] = 1[k]$  – *переходной функцией* ЛДДЗ, т.е.

$$w[k] = \mathcal{A}_k\{\delta_0[k]\} \text{ и } h[k] = \mathcal{A}_k\{1[k]\}. \quad (4.13)$$

Взаимосвязь временных характеристик  $w[k]$  и  $h[k]$  будет такой же, как и для функций  $\delta_0[k]$  и  $1[k]$ , т.е. с помощью операторов обратной разности и полного суммирования:

$$w[k] = \nabla h[k]; \quad h[k] = \sigma_1 w[k]. \quad (4.14)$$

Из физического смысла рассмотренных выше временных характеристик следует, что при  $k < 0$  они должны принимать нулевые значения, т.к. до подачи воздействий на вход ЛДДЗ, оно находилось в состоянии покоя. Формально это записывают так:  $w[k] \equiv 0$  и  $h[k] \equiv 0$  при  $k < 0$ . Эту особенность временных характеристик называют условием физической реализуемости ЛДДЗ. Оно является, по сути, проявлением принципа причинности объективного мира, в котором следствие не может опережать во времени причину своего возникновения.

Понимая «физический» смысл весовой функции, можно найти ее связь с матричными коэффициентами уравнений состояния ЛДДЗ. Для этого в (4.10) достаточно положить  $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$  и  $f[k] = \delta_0[k]$ . Тогда, с учетом определения (4.11) для функции  $\delta_0[k]$  выражение для  $y[k] = w[k]$  примет следующий вид:

$$w[k] = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta_0[k]. \quad (4.15)$$

♦ Для устойчивого (относительно входа) ЛДДЗ весовая функция при бесконечном возрастании  $k$  будет стремиться к нулю (затухает), а ЛДДЗ будет возвращаться в прежнее (невозмущенное) состояние. При этом, в соответствии с (4.14), переходная функция устойчивого звена будет приближаться к некоторому постоянному (в частности и к нулевому) значению.

Зная весовую функцию, можно определить реакцию ЛДДЗ, находящегося в покое при  $k < 0$ , на произвольное внешнее воздействие  $f[k]$ . В таком случае оператор преобразования линейного динамического звена можно задать явно в виде некоторого аналитического выражения (формулы). Чтобы убедиться в этом, для  $f[k]$  при  $k \geq 0$  запишем следующее формальное равенство:

$$f[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0[k-m]f[m]. \quad (4.16)$$

Подставляя это выражение в формулу для выхода  $y[k] = \mathcal{A}_k\{f[k]\}$  для *стационарного* линейного дискретного звена, получим

$$\begin{aligned} y[k] &= \mathcal{A}_k\{f[k]\} = \mathcal{A}_k\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0[k-m]f[m]\right\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_k\delta_0[k-m]f[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-m]f[m] = w[k] \otimes f[k]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Последняя часть (4.17) известна как *дискретная формула свертки* во временной области и представляет собой дискретный аналог интеграла свертки из непрерывного анализа. С учетом условия физической реализуемости для  $w[k]$  и того, что  $f[k] = 0$  при  $k < 0$ , формулу свертки можно записать в более привычном виде:

$$y[k] = \sum_{m=0}^k w[k-m]f[m] = w[k] \otimes f[k]. \quad (4.18)$$

Отсюда и следует, что оператор преобразования  $\mathcal{A}_k$  стационарного ЛДДЗ всегда может быть задан явно в виде формулы свертки (4.18).

По графикам временных характеристик  $w[k]$  и  $h[k]$  можно получить достаточно полные представления об основных свойствах звена: вид переходного процесса ПП (колебательный,

апериодический), устойчивость, время практического затухания ПП, степень колебательности. Для ДСУ параметры графика  $h[k]$  используют для оценки качества переходных процессов (прямые показатели качества). Получить графики  $w[k]$  и  $h[k]$  можно различными способами, в частности решением разностного уравнения «вход-выход» или уравнений состояния с нулевыми начальными условиями при входном воздействии в виде решетчатых функций одиночного импульса  $\delta_0[k]$  или ступенчатого сигнала  $1[k]$ . Более полное исследование свойств ЛДЗ (или линейных ДСУ), в том числе и при ненулевых начальных условиях, можно выполнить с использованием их описаний в виде разностных уравнений и уравнений состояния.

## Лекция №5

### Тема: «Исследование ЛДЗ и ДСАР методами временной области: устойчивость»

#### Предварительные замечания

Для более полного и исчерпывающего исследования линейных дискретных звеньев и их соединений (систем) используются их математические описания во временной области в виде разностных уравнений и уравнений состояния. Сюда относятся вопросы, связанные с устойчивостью, управляемостью, наблюдаемостью и др. Методы временной области основаны на строгих математических методах и широко используются в так называемой современной теории управления, в которой решаются не столько задачи анализа, сколько задачи динамического синтеза (оптимизация, адаптация, идентификация, оценка параметров, управление в условиях неполной определенности, управление нелинейными и многосвязными объектам и др.).

#### 5.1 Математические условия устойчивости ЛДЗ и ЛДС

Как известно, устойчивость динамических звеньев и систем (как непрерывных, так и дискретных) – одно из наиболее важных и практически значимых свойств, поскольку оно является необходимым условием их работоспособности. Смысл и суть его состоит в способности динамических систем возвращаться в прежнее (невозмущенное) состояние после прекращения действия возмущений (как сигнальных, так и по начальным условиям). Ранее (см. лекцию №4), на физическом уровне, были сформулированы определения устойчивости ЛДЗ относительно входов (затухание графика весовой функции) и асимптотической устойчивости относительно начальных условий (затухание свободной составляющей выхода). Для практического использования необходимо этим условиям придать строгую математическую форму.

♦ Пусть ММ ЛДЗ (или ЛДС) задана линейным разностным уравнением «вход-выход» в форме оператора прямого сдвига (5.1):

$$a_0y[k] + \dots + a_ny[k+n] = b_0f[k] + \dots + b_mf[k+m], \quad (5.1)$$

для которого сокращенная (операторная) запись имеет вид

$$A(E)y[k] = B(E)f[k]. \quad (5.2)$$

Здесь  $A(E)$  и  $B(E)$  – полиномы относительно оператора сдвига  $E$  (операторные полиномы) с коэффициентами  $a_i$  и  $b_i$  соответственно.

Решение этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$y[k] = y_1[k] + y_2[k], \quad (5.3)$$

где

$y_1[k]$  – общее решение *однородного* (без правой части) уравнения. Это свободная составляющая реакции ЛДДЗ, обусловленная ненулевыми начальными условиями (при нулевом входе). При этом, если полином  $A(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , называемый характеристическим, не имеет кратных корней, то свободная составляющая  $y_1[k]$  будет иметь следующий вид:

$$y_1[k] = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k, \quad (5.4)$$



где  $C_i$  – постоянные, определяемые из начальных условий, а  $z_i$  – корни полинома  $A(z)$ ;

$y_2[k] = y_{21}[k] + y_{22}[k]$  – это частное решение уравнения с правой частью, соответствующее нулевым начальным условиям. Если  $y_{22}[k]$  ищется в форме вынуждающей функции  $f[k]$ , то это будет вынужденная составляющая реакции ЛДЗ. Тогда  $y_{21}[k]$  – собственная сопровождающая (переходная составляющая), общий вид которой такой же, как для  $y_1[k]$  с формулой (5.4), но константы  $C_i = C_i^*$  будут зависеть от вида вынужденной составляющей реакции звена. При этом некоторые из коэффициентов  $C_i^*$  могут оказаться с нулевыми значениями.

♦ Линейное ДДЗ называется асимптотически устойчивым (относительно начальных условий) если свободная составляющая его выхода затухает, т.е.  $y_1[k] \rightarrow 0$ . При этом, как следствие, переходная составляющая  $y_{21}[k]$  также будет асимптотически затухать до нуля (имеет место устойчивость ДДЗ относительно входа), и полная реакция  $y[k]$  будет стремиться к вынужденной составляющей  $y_{22}[k]$ . Важно отметить, что в общем случае затухание  $y_{21}[k]$  не гарантирует затухания  $y_1[k]$ , так возможны случаи, когда для некоторых слагаемых в (5.4) коэффициенты  $C_i^* = 0$ , а соответствующие значения  $C_i \neq 0$ . Это бывает, когда полиномы  $A(z)$  и  $B(z)$  в (5.2) не являются взаимно простыми, т.е. содержат одинаковые (сокращаемые) множители вида  $(z - z_k)$ , соответствующие одинаковым корням этих полиномов. В таких случаях имеет место неполная управляемость/наблюдаемость ДДЗ, при которой часть «парциальных» (модальных) составляющих выражения для  $y_{21}[k]$ , соответствующие сокращаемым сомножителям, остаются нулевыми при любых входах.

Как следует из (5.4), условие затухания и свободной  $y_1[k]$ , и переходной  $y_{21}[k]$  составляющих будет зависеть только от вида характеристических корней  $z_i$ . Это может быть только тогда, когда модуль (абсолютная величина) каждого корня меньше единицы. Поэтому основное условие устойчивости линейных дискретных динамических систем (или звеньев) имеет вид: «Для устойчивости ЛДЗ и ЛДС необходимо и достаточно, чтобы все характеристические корни  $z_i$  удовлетворяли условию  $|z_i| = \text{mod}(z_i) < 1$ ». На комплексной плоскости это условие означает принадлежность всех характеристических корней единичному кругу (ЕК) с центром в начале координат. Только в этом случае каждая из «парциальных» составляющих свободной реакции вида  $C_i z_i^k$  будет затухать, т.е. стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . В противном случае переходная составляющая реакции ЛДЗ не затухает, и звено будет или неустойчивым, или находится на границе устойчивости. Если хотя бы один из характеристических корней расположен вне единичного круга ЕК: т.е.  $|z_i| = \text{mod}(z_i) > 1$ , то соответствующая парциальная составляющая в (4.7) будет неограниченно возрастать и ЛДЗ будет неустойчивым. Для границы устойчивости нет корней вне единичного круга (ЕК), но есть, хотя бы один корень на границе ЕК. При этом возможны два вида границ устойчивости: а) апериодическая, когда «пограничный» корень вещественный положительный  $z_i = +1$  и б) колебательная, когда пограничный корень или вещественный отрицательный  $z_i = -1$ , или комплексный, для которого  $|z_i| = \text{mod}(z_i) = 1$ . В этих случаях график парциальной составляющей и не затухает и не нарастает (по величине ординат).

Заметим, что если при  $a_n \neq 0$  все остальные коэффициенты  $a_i$  характеристического полинома  $A(z)$  равны нулю, то характеристическое уравнение имеет вырожденный вид:  $a_n z^n = 0$ . При этом все  $n$  характеристических корней одинаковы и равны нулю ( $z_1 = 0$  – корень  $n$ -ой кратности), а переходная (собственная сопровождающая) составляющая выхода будет отсутствовать. Тогда реакция звена на внешнее воздействие (при нулевых начальных условиях!) будет представлена только своей вынужденной составляющей  $y_{22}[k]$ , ординаты которой представляют собой линейную комбинацию ординат вынуждающей функции  $f[k]$ , т.е.

$$y[k+n] = (b_0 f[k] + \dots + b_m f[k+m]) / a_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

В этом случае считают, что ЛДЗ имеет бесконечную степень устойчивости, а процесс в звене имеет конечную длительность [7].

♦♦ Пусть математическое описание (модель) ЛДЗ (или ЛДС) имеет вид линейных уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}f[k], \\ y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}f[k], \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – матричные коэффициенты соответствующих размеров.

Аналитическое решение уравнений (5.6) дается следующей формулой [6]:

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-m-1}\mathbf{B}f[m] + \mathbf{D}f[k]. \quad (5.7)$$

Здесь первое слагаемое описывает собственное (свободное) движение ЛДЗ при *ненулевых* начальных условиях, а второе слагаемое – это частное решение уравнений (5.6), соответствующее *нулевым начальным условиям*. А так как устойчивость ЛДЗ определяется собственным движением, то это свойство будет зависеть только от матрицы  $\mathbf{A}$  и ее элементов.

Условие устойчивости для матрицы  $\mathbf{A}$  *простой структуры* легко получить, представив ее в эквивалентном виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{L}\mathbf{S}^{-1},$$

где  $\mathbf{L} = \text{diag}\{z_i\}$  – диагональная матрица *собственных значений* для  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{S}$  – матрица, столбцами которой являются *собственные векторы* для  $\mathbf{A}$ .

Тогда степени матрицы  $\mathbf{A}^k = \mathbf{S} \cdot \text{diag}\{z_i^k\} \mathbf{S}^{-1}$  в (5.7) при  $k \rightarrow \infty$  будут асимптотически стремиться к нулевой матрице, а собственная составляющая реакции звена будет затухать, когда для каждого из собственных значений  $z_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  выполняется условие  $\text{mod}(z_i) = |z_i| < 1$ .

Напомним, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  – это корни следующего выражения, называемом характеристическим уравнением

$$A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  $\det(\cdot)$  – определитель матрицы;  $A(z)$  – полином  $n$ -ой степени относительно комплексной переменной  $z$ .

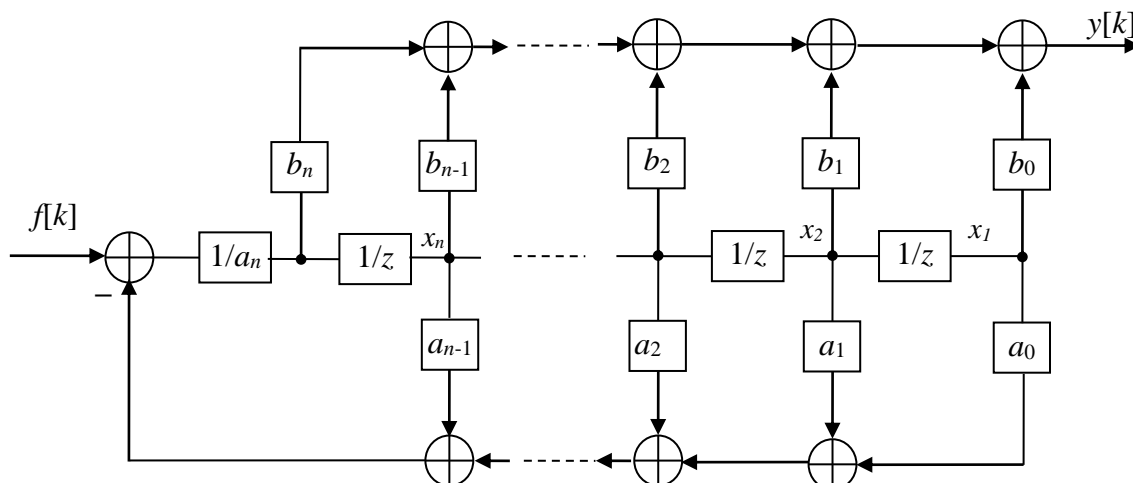
Таким образом, для устойчивости ЛДЗ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  (корни характеристического полинома  $A(z)$ ), были по модулю *меньше единицы*, т.е. принадлежали единичному кругу ЕК комплексной  $z$ -плоскости.

♦ При известном уравнении «вход-выход» в форме (5.1), вид матричных коэффициентов уравнений состояния существенно зависит от способа назначения переменных состояния. При этом есть несколько «канонических» способов, один из которых соответствует так называемой канонической форме управляемости и, приводит к следующему виду матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} 0 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots \\ \dots & \dots & 0 & a_n \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \frac{b_n}{a_n}; \quad (5.8-a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n} & b_1 - a_1 \frac{b_n}{a_n} & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}.$$

Такому назначению переменных состояния соответствует схема реализации на рис. 5.1.



## 5.2 Алгебраические критерии устойчивости ЛДЗ и ЛДС коэффициентного типа

Непосредственная проверка условий устойчивости для полиномов порядка выше второго затруднена. Поэтому математиками были разработаны специальные правила, которые позволяют проверять устойчивость ЛДС косвенно, без нахождения корней полиномов, а непосредственно по их коэффициентам. Такие правила получили название алгебраических критериев устойчивости. В то же время применение обычных алгебраических критериев устойчивости (Рауса–Гурвица, Ляпунова–Шипара и других), известных из теории линейных непрерывных систем [7], невозможно, т.к. условие устойчивости для каждого из корней  $z_i$  полинома  $A(z)$  имеет существенно *другой вид*, чем для непрерывных систем.

Известно обобщение алгебраического критерия устойчивости на дискретный случай – это критерий Шура–Кона, который имеет две формы: табличную (дискретный аналог критерия Рауса, критерий Джури) и аналитическую (дискретный аналог критерия Гурвица). В аналитической форме критерий устойчивости требует составления специальных определителей  $\Delta_k$  разных порядков из коэффициентов  $a_i$  и чередования их знаков. Получаемые при этом условия для коэффициентов полинома  $a_i$  имеют значительно более сложный, чем для непрерывных систем, вид. Со способами составления определителей Шура–Кона можно ознакомиться в учебной литературе по ДСУ [Л.]. В соответствии с этим критерием, для устойчивости ДСУ необходимо и достаточно, чтобы определители  $\Delta_k$  с четными значениями  $k$  были положительны, а с нечетными – отрицательны.

Ввиду сложности нахождения определителей высоких порядков критерий Шура–Кона мало пригоден для ручных вычислений, но идеально подходит для компьютерной реализации. Но для систем не выше третьего порядка условия устойчивости ЛДСУ с помощью можно записать в общем виде, достаточно удобном для практического применения.

- Так, например, для системы *первого* порядка ( $n=1$ ):  $A(z) = a_0 + a_1z$ ;  $\Delta_1 < 0$ , где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_1^2 < 0, \text{ т.е. } a_0 + a_1 > 0 \text{ и } a_0 - a_1 < 0.$$

- Для системы *второго* порядка ( $n=2$ ):  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ , эти условия имеют вид

$$\Delta_1 = a_0^2 - a_2^2 < 0; \quad \Delta_2 = (a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_1)^2 > 0,$$

которые можно привести к эквивалентному виду в форме трех неравенств:

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0; \quad a_2 - a_1 + a_0 > 0; \quad a_2 - a_0 > 0. \quad (5.9)$$

•••Для системы *третьего* порядка ( $n=3$ ):  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$  условия устойчивости, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0; \quad a_3 - a_2 + a_1 - a_0 > 0; \\ a_3(a_3 - a_1) - a_0(a_0 - a_2) > 0; \quad 3(a_3 + a_0) - a_2 - a_0 > 0. \end{aligned}$$

Для дискретных звеньев и систем, порядок которых выше третьего, применение критерия Шура–Кона будет еще более сложным.

При невысоком порядке математической модели дискретного звена задачу исследования устойчивости можно существенно упростить, применяя дробно-линейные подстановки вида

$$z = \frac{1 + 0,5T_0u}{1 - 0,5T_0u} = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (5.10)$$

в характеристическое уравнение  $A(z) = 0$ . При этом будет получено *преобразованное* характеристическое уравнение, левая часть которого будет по-прежнему иметь вид полинома с вещественными коэффициентами относительно переменных  $u$  или  $w$ . Замечательной особенностью таких *дробно-линейных* (билинейных) преобразований, иногда называемых преобразованиями Мёбиуса, является то, что они (при  $T_0 > 0$ ) отображают внутреннюю часть единичного круга комплексной  $z$ -плоскости на *левую* полуплоскость комплексных переменных " $u$ " или " $w$ ". Убедимся в справедливости этого свойства, записав выражение для модуля комплексной переменной  $z$ , полагая  $w = \text{Re } w + j \text{Im } w$ :

$$|z| = \sqrt{\frac{(1 + \text{Re } w)^2 + (\text{Im } w)^2}{(1 - \text{Re } w)^2 + (-\text{Im } w)^2}}.$$

Отсюда следует, что  $|z| < 1$  (точка  $z$  принадлежит единичному кругу) только в том случае, когда числитель подкоренного выражения меньше знаменателя. А это возможно тогда, когда  $\text{Re } w < 0$  (точка  $w$  расположена в левой полуплоскости).

Аналогичное свойство будет выполняться и по отношению к переменной  $u$ , так как  $w = uT_0/2$ , а  $T_0 > 0$ . Но так как левая часть *преобразованного* с помощью (5.10) *характеристического уравнения* сохраняет вид полинома, то вопрос о расположении его корней относительно мнимой оси решается с помощью *обычных*, известных из линейной непрерывной теории алгебраических критериев устойчивости или по критерию Михайлова.

Пример 5.1. Исследовать устойчивость ЛДЗ второго порядка, если характеристическое уравнение имеет вид

$$A(z) = 2z^2 - z + 1 = 0$$

*Решение.* Легко проверить, что условия устойчивости (5.9) выполняются и, следовательно, ЛДДЗ устойчиво. Получим тот же результат, преобразовав с помощью (5.10) это характеристическое уравнение относительно  $w$  переменной:

$$A_1(w) = 3w^2 + 2w + 2 = 0.$$

Известно, что для полиномов с вещественными коэффициентами *не выше второго* порядка положительность коэффициентов является и необходимым, и достаточным условием "левого" расположения корней. В данном примере это условие выполняется и, следовательно, ЛДДЗ устойчиво. Во всех других случаях требуется проверка выполнения некоторых дополнительных условий типа неравенств относительно коэффициентов полинома.

В зависимости от типа исходных данных, необходимых для применения алгебраических критериев устойчивости, их можно разделить на две группы:

- А. Алгебраические критерии коэффициентного типа.
- Б. Алгебраические критерии матричного типа.

Для коэффициентных критериев исходные данные – это коэффициенты *характеристического* уравнения  $A(z)=0$ . Для матричных критериев такими данными является матричный коэффициент  $\mathbf{A}$  в *уравнениях состояния* (5.6) дискретной системы управления. Для применения алгебраических критериев структурная схема ДСУ может быть любой, лишь бы для нее были получены полином  $A(z)$  или матрица  $\mathbf{A}$  [3, 6, 7].

### 5.3 Алгебраические критерии устойчивости ЛДЗ и ЛДС матричного типа

К матричным критериям устойчивости относится критерий Зубова и его различные модификации, исходными данными для которого является матрица  $\mathbf{A}$  в дискретных уравнениях состояния [3]. Для устойчивости ДСУ *необходимо и достаточно*, чтобы пределом последовательных степеней матрицы  $\mathbf{A}$  была нулевая матрица:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

Если это условие выполняется, то все характеристические корни (собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ ) будут принадлежать единичному кругу с центром в начале координат комплексной плоскости (достаточность критерия). Справедливо и обратное утверждение: если все корни  $z_i$  по модулю меньше единицы, то будет выполняться условие (5.11) (необходимость критерия).

Справедливость этих утверждений для линейного дискретного звена была показана ранее (для простых характеристических корней  $z_i, i=1, 2, \dots, n$ ).

К сожалению, проверить факт выполнения или невыполнения предельного равенства (5.11) непосредственно не представляется возможным. В таком виде критерий пригоден только для теоретических исследований, а практическое применение нашли следующие *достаточные* формы матричного критерия Зубова.

а) *Достаточное условие неустойчивости* (или необходимое условие устойчивости). Если *след* матрицы (сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы)  $\text{Sp}\mathbf{A} > n$ , то ДСУ неустойчива. Это следует из свойства квадратной матрицы  $n$ -го порядка, согласно которому след матрицы всегда равен сумме собственных значений матрицы (с учетом их кратности);

б) *Первое достаточное условие устойчивости*. Если найдется такое  $k$ , при котором *норма*  $k$ -ой степени матрицы  $\mathbf{A}$  меньше единицы:  $\|\mathbf{A}^k\| < 1$ , то ДСУ устойчива. При этом норму матрицы можно вычислять, например, по следующему выражению (евклидова норма):

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt[2]{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

в) *Второе достаточное условие устойчивости*. Если найдется такое  $k$ , начиная с которого следы *трех* последовательных степеней матрицы  $\mathbf{A}$  образуют убывающую последовательность:  $\text{Sp}\mathbf{A}^k > \text{Sp}\mathbf{A}^{k+1} > \text{Sp}\mathbf{A}^{k+2}$ , то такая ДСУ устойчива.

Проверка всех этих условий легко программируется и поэтому применима для проверки устойчивости (неустойчивости) систем ДСУ практически любого порядка. Следует помнить, что эти условия являются лишь достаточными и их невыполнение не позволяет судить об устойчивости системы данным методом.

Общим недостатком всех рассмотренных выше алгебраических критериев является то, что они лишь позволяют определить, устойчива или неустойчива данная система. Но исследовать запасы устойчивости или давать рекомендации для их обеспечения с помощью таких критериев практически невозможно.

### 5.3 Исследование управляемости и наблюдаемости ЛДЗ и ЛДС

При изучении свойств ЛДДЗ и их соединений (ЛДДЗ) методами современной теории большое внимание уделяется исследованию их *управляемости* и *наблюдаемости*. При этом под управляемостью понимается возможность перевода ЛДДЗ путем изменением входа  $u[k]$  из *любого* начального состояния  $\mathbf{x}[k_0]$  в произвольное другое состояние  $\mathbf{x}[k]$  за *конечное* время. Аналогично этому, под наблюдаемостью понимается возможность восстановления информации о

начальном состоянии ЛДДЗ  $x[k_0]$  по результатам измерений его выхода  $y[k]$  и входа  $u[k]$  на интервале времени  $[k_0, k]$ .

Если указанные выше свойства не выполняются, то ЛДДЗ *не будет* полностью управляемым и наблюдаемым. В таких случаях можно так назначить переменные состояния (т.е. выбрать базис в пространстве состояний), что в структуре математической модели (ММ) ЛДДЗ окажется возможным *явно* выделить *управляемую* и *неуправляемую* части, причем *каждая* из них может оказаться *наблюдаемой* или *ненаблюдаемой*. На вектор состояния неуправляемой части ММ внешнее воздействие  $u[k]$  не оказывает никакого влияния, а координаты вектора состояния ненаблюдаемой части не участвуют в формировании выхода  $y[k]$ . В соответствии с этим, *новый* вектор координат состояния ЛДЗ  $\tilde{x}$  будет представлять собой *составной* вектор  $\tilde{x} = (\tilde{x}_I, \tilde{x}_{II}, \tilde{x}_{III}, \tilde{x}_{IV})$  (табл. 5.1):

- $\tilde{x}_I$  – вектор состояния управляемой, но ненаблюдаемой части;
- $\tilde{x}_{II}$  – вектор состояния управляемой и наблюдаемой части;
- $\tilde{x}_{III}$  – вектор состояния неуправляемой и ненаблюдаемой части;
- $\tilde{x}_{IV}$  – вектор состояния неуправляемой, но наблюдаемой части.

Таблица 5.1

Составные части ММ ЛДДЗ и их векторы состояния

$\tilde{x} = (\tilde{x}_I, \tilde{x}_{II}, \tilde{x}_{III}, \tilde{x}_{IV})$	Ненаблюдаемая	Наблюдаемая
Управляемая	I. $\tilde{x}_I$	II. $\tilde{x}_{II}$
Неуправляемая	III. $\tilde{x}_{III}$	IV. $\tilde{x}_{IV}$

При этом матричные коэффициенты в преобразованных уравнениях состояния ЛДДЗ будут иметь блочную структуру:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} & A_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & A_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{44} \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \tilde{C} = [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4]; \tilde{D} = D_2. \quad (5.12)$$

Структурное представление ММ ЛДДЗ в случае его *неполной* управляемости и наблюдаемости показано на рис. 5.2.

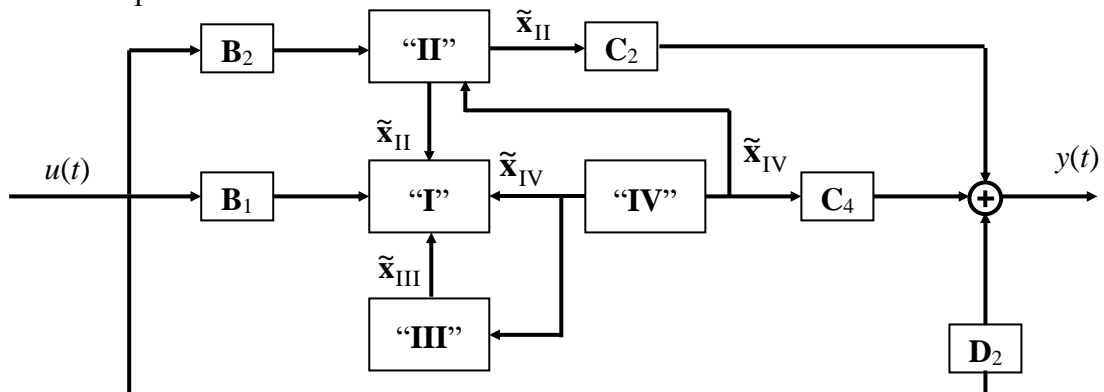


Рис. 5.2. Структурное представление ММ ЛДДЗ

Анализируя пути прохождения сигналов в этой схеме, легко заметить, что связь выхода

ЛДДЗ  $y[k]$  с его входом  $u[k]$  при нулевых начальных условиях, будет определяться только наличием и свойствами части "II" (полностью управляемой и наблюдаемой) в составе ММ ЛДДЗ.

Отсюда следует важный вывод: Передаточные свойства ЛДДЗ и все другие характеристики вход-выход (весовая и переходная функции) полностью характеризуют свойства только управляемой и наблюдаемой (невырожденной) части ММ ЛДДЗ. Очевидно и то, что *несокращаемые* характеристические корни – это собственные значения только матрицы  $\mathbf{A}_{22}$  и они, в общем случае, не исчерпывают всех характеристических корней ЛДДЗ, поскольку составляют лишь *часть* от общего набора собственных значений матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Полное их совпадение будет лишь при отсутствии неуправляемых и ненаблюдаемых частей. В то же время сокращаемые корни будут собственными значениями матриц  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{33}$ ,  $\mathbf{A}_{44}$  и это становится очевидным, если записать характеристическое уравнение для МДЗ с учетом блочного представления матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$ :

$$H(z) = |z\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{A}}| = |z\mathbf{E}_1 - \mathbf{A}_{11}| |z\mathbf{E}_2 - \mathbf{A}_{22}| |z\mathbf{E}_3 - \mathbf{A}_{33}| |z\mathbf{E}_4 - \mathbf{A}_{44}| = 0. \quad (5.13)$$

Поэтому при исследовании устойчивости ЛДДЗ по его характеристикам «вход-выход» необходимо убедиться в отсутствии неуправляемой и ненаблюдаемой частей, либо быть уверенным в том, что эти части устойчивы и им соответствуют устойчивые характеристические корни, т.е. собственные значения матриц  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{33}$ ,  $\mathbf{A}_{44}$ .

Для исследования свойств управляемости и наблюдаемости ЛДДЗ необязательно приводить его ММ к указанной выше специальной форме (5.12) изменением базиса пространства состояний. Эти свойства линейной динамической системы (в нашем случае МДЗ) можно исследовать с помощью алгебраических критериев Калмана, зная матричные коэффициенты уравнений состояния ЛДДЗ в *любом* базисе. Для этого рассматривают две вспомогательные блочные матрицы:

- а) матрица управляемости  $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]$ ;
- б) матрица наблюдаемости  $\mathbf{V} = [\mathbf{C}^T \ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \ \dots \ (\mathbf{A}^T)^{N-1}\mathbf{C}^T]$ .

*Критерий управляемости:* Динамическая система (или ЛДДЗ)  $N$ -го порядка является полностью управляемой, если ранг  $r_u$  матрицы  $\mathbf{U}$  равен  $N$ . В противном случае система имеет неуправляемую часть, порядок которой равен  $N-r_u$ .

*Критерий наблюдаемости:* Динамическая система (или ЛДДЗ)  $N$ -го порядка является полностью наблюдаемой, если ранг  $r_v$  матрицы  $\mathbf{V}$  равен  $N$ . В противном случае система имеет ненаблюдаемую часть, порядок которой равен  $N-r_v$ .

Кроме того, если получен полный, *несокращенный* вариант уравнения «вход-выход» ЛДДЗ, то *достаточным* условием его полной управляемости и наблюдаемости будет отсутствие одинаковых корней у полиномов  $A(z)$  и  $B(z)$  в уравнении (5.2).

• Методы временной области позволяют решать задачи анализа любой сложности, касающиеся вопросов устойчивости, управляемости и наблюдаемости, а также получить количественные оценки для переходных (ПП) и установившихся процессов в ЦСАР при действии на входах воздействий типового вида. Их применение основано на численных процедурах решения разностных уравнений и уравнений состояния при различных значениях параметров закона регулирования и, возможно, параметров ММ ОУ. Оно ориентировано на применение вычислительных средств и соответствующего программного обеспечения. В рамках классической теории ДСАР, качество переходных процессов оценивают обычно по графику переходной функции. Повторяя многократно процедуру анализа для разных сочетаний параметров закона регулирования, можно исследовать их влияние на показатели качества ПП. Располагая графиками этих зависимостей можно использовать их для выбора параметров, решая таким способом задачу параметрического синтеза. Качество работы ЦСАР в стационарных режимах оценивают аналогично, применяя показатель точности в виде некоторого функционала от ошибки воспроизведения входного сигнала типового вида (например, линейного, квадратичного или гармонического).

- В рамках современного подхода в теории ДСАР методы временной области используют

ся для решения задач синтеза законов регулирования, обеспечивающих ДСАР некоторые достижимые (или наилучшие) свойства, применением формальных (аналитических) методов динамического синтеза. Примером таких задач являются а) задача синтеза модального регулятора и б) задача синтеза оптимального (т.е. обеспечивающего экстремум выбранного критерия).



## Лекция №6

### Тема: «Динамический синтез ЦСАР методами временной области»

#### Предварительные замечания

Задача динамического синтеза ЦСАР заключается в выборе структуры и параметров системы, обеспечивающих выполнение заданных требований и ограничений на качество процесса управления, как в переходных, так и в установившихся режимах. Кроме того, при этом должны учитываться ряд инженерных требований и рекомендаций, связанных со сложностью и возможностью последующей технической реализации ДСУ (полоса пропускания; помехоустойчивость; сложность алгоритма управления; величины периода дискретности и коэффициента усиления и др.).

#### 6.1 Постановка и виды задачи динамического синтеза

Возможны несколько вариантов постановки задачи динамического синтеза [7]:

- Синтез ДСУ с произвольной структурой (синтез *оптимальной* системы).
- Синтез ДСУ с фиксированной структурой (*параметрический* синтез).
- Синтез ДСУ с *частично заданной* структурой (синтез корректирующих устройств).

В *первом* случае структурная схема системы не задана, и задача синтеза состоит в отыскании оператора преобразования (математической модели) системы, являющейся «наилучшей» в рассматриваемом классе. Например, таким классом может быть множество всех возможных линейных стационарных ДСУ, для которых выполняется условие физической реализуемости. При этом заданными считаются критерий выбора (функционал, показатель качества), характеристики внешних воздействий, а также набор ограничений. Для решения такой задачи в случае линейной ДСУ обычно используют вариационные методы, позволяющие получить *функциональные уравнения* относительно *весовой* функции или *передаточной* функции ДСУ, которые обеспечивают *экстремум* показателя качества.

При этом найденное *оптимальное* (наилучшее в указанном смысле) решение может оказаться слишком сложным для технической реализации и поэтому далее обычно ставится задача о *приближенной* его реализации и получении *квазиоптимальной* системы. Методологическая значимость такого подхода к синтезу ДСУ состоит в том, что определяется *теоретический предел* возможностей по совершенствованию свойств и характеристик систем рассматриваемого класса. Это должно учитываться при назначении требований к показателям качества ДСУ на этапе составления технического задания на проектирование.

Во *втором* случае структура системы *полностью задана*, но соответствующая математическая модель ДСУ известна с точностью до значений *некоторых* параметров. Их необходимо определить так, чтобы показатель качества (критерий) принимал экстремальное значение, либо его величина была в допустимых пределах. Для нахождения решения соответствующей этому случаю экстремальной задачи используются методы *нелинейного программирования*. В частности, такая задача возникает при определении *оптимальных* значений параметров промышленных регуляторов с типовыми законами регулирования, когда за критерий качества принята, например, квадратичная суммарная оценка.

Примером параметрического, но *неоптимального* синтеза является задача выбора параметров обратной связи по вектору состояния управляемого объекта, обеспечивающей желаемое расположение характеристических корней системы (задача синтеза модального регулятора).

В *третьем*, наиболее часто встречающемся на практике варианте задачи динамического синтеза, задана *первоначальная* схема ДСУ, обычно составленная только из функционально необходимых элементов и устройств. При этом, как правило, требования к качеству работы ДСУ заведомо не удовлетворяются. В таких случаях в состав системы *необходимо* включать специальные *корректирующие* звенья (устройства), обеспечивающих выполнение всех заданных требований и ограничений на качество процесса управления.

Выбор места и способа подключения таких звеньев, а также определение вида и параметров их передаточных функций составляют смысл и содержание задачи синтеза корректирующей

щих устройств. Учитывая сказанное выше, под динамическим синтезом ДСУ далее будем понимать *только* задачу определения корректирующих устройств и рассмотрение основных методов ее решения.

## 6.2 Задача синтеза модального регулятора (модальное управление)

В задаче модального управления решается частная задача выбора регулятора, который обеспечивает желаемое расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы. Как и в непрерывных системах, модами называют компоненты движения  $z_i^k$ , определяемые корнями  $z_i$  характеристического уравнения. Отсюда и возникло название метода.

В методе пространства состояний (МПС) математическая модель (ММ) объекта управления записывается в векторно-матричной форме в виде уравнений состояния:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k] \text{ – уравнение динамики;} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k] \text{ – уравнение выхода.} \quad (6.2)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – матрица динамики (собственная) матрица ОУ;  $\mathbf{B}$  – матрица управляющего воздействия;  $\mathbf{C}$  – матрица выхода;  $\mathbf{D}$  – матрица обхода (для инерционных объектов равна нулю);  $\mathbf{x}[k]$  – вектор состояния объекта, который содержит всю минимально необходимую информацию о поведении объекта в прошлом. Поэтому полная информация (знание) состояния (при известном входе) в текущий момент времени позволяет определить его поведение в будущем;  $\mathbf{u}[k]$  – вектор управляющих воздействий;  $\mathbf{y}[k]$  – вектор выхода ОУ. Для простоты будем полагать ОУ инерционным ( $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ ) и одномерным ( $\mathbf{u}[k]=u[k]$  и  $\mathbf{y}[k]=y[k]$ ).

Одним из наиболее распространенных способов управления таким ОУ является линейный алгоритм, когда управление  $u[k]$  выражается через линейную комбинацию компонентов вектора состояния (принцип Беллмана – управление есть функция состояния):

$$u[k] = -\mathbf{K}\mathbf{x}[k] + g[k], \quad (6.3)$$

где  $g[k]$  – задающее воздействие для ЦСАР.

При этом структурная схема линейной ЦСАР будет иметь вид, приведенный на рис. 6.1.

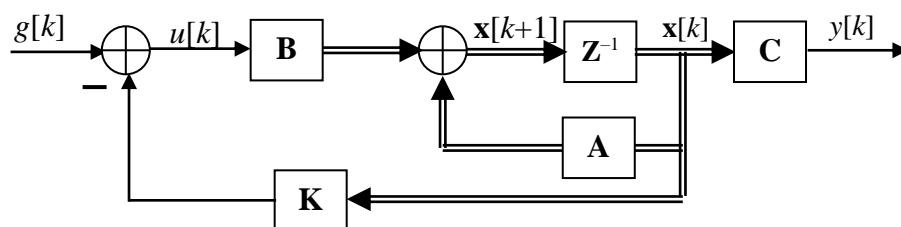


Рис.6.1. Структурная схема линейной ЦСАР с модальным регулятором

На рисунке приняты следующие обозначения:  $\mathbf{Z}^{-1}$  – матрица задержки на один такт,  $y[k]$  – выход системы.

Очевидно, что реализация такого подхода при синтезе ЦСАР возможна, если известны (измеримы) все компоненты вектора состояния системы  $\mathbf{x}[k]$ . Если состояние объекта не измеряемо, то его необходимо оценивать. В детерминированном и стохастическом случаях это осуществляется с помощью, соответственно, наблюдателя и оценщика. Для оценки текущего состояния  $\mathbf{x}[k]$  используются предыдущее и текущие значения входных и выходных переменных. Вопросы построения наблюдателя состояния рассматриваются отдельно.

Перейдем к определению матрицы коэффициентов  $\mathbf{K}$  в алгоритме управления. Известно, что характер переходного процесса в линейной дискретной системе (быстродействие, перерегулирование и т. д.) определяется коэффициентами характеристического полинома замкнутой системы, точнее, его корнями или собственными значениями матрицы динамики замкнутой системы управления.

Вследствие этого задача синтеза ЦСАР МПС ставится как задача выбора таких коэффициентов матрицы управления  $\mathbf{K}$ , которые бы обеспечивали выполнение требований,

налагаемых на корни характеристического полинома замкнутой системы или на собственные

значения матрицы динамики замкнутой системы  $\mathbf{A}^*$ .

Будем определять матрицу  $\mathbf{K}$  таким образом, чтобы замкнутая система с уравнением динамики:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x}[k] + g[k]) = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}g[k] = \mathbf{A}^*\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}g[k] \end{aligned} \quad (6.3)$$

имела желаемый характеристический полином, т.е.:

$$P^*(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}^*) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n. \quad (6.4)$$

Преобразуем уравнение динамики ОУ (6.1) к канонической форме управляемости подстановкой  $\mathbf{x}[k] = \mathbf{Q}\mathbf{x}_R[k]$ :

$$\mathbf{Q}\mathbf{x}_R[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{x}_R[k] + \mathbf{B}u[k];$$

$$\mathbf{x}_R[k+1] = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{x}_R[k] + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u[k] = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_R[k] + \mathbf{B}^*u[k]. \quad (6.5)$$

Матрицы коэффициентов полученной системы конечно-разностных уравнений ОУ в канонической форме управляемости имеют вид:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Учитывая, что характер процессов управления определяется собственным движением замкнутой системы, положим  $g[k] = 0$ . Тогда, если в качестве регулятора с выходной переменной  $u[k]$  выбрать регулятор вида:

$$u[k] = -\mathbf{K}_R \mathbf{x}_R[k], \quad (6.7)$$

где  $\mathbf{K}_R = [k_{R1}, k_{R2}, \dots, k_{Rn}]$ , а входом которого является вектор состояния  $\mathbf{x}_R[k]$ , то получим уравнение собственного движения замкнутой ЦСАР:

$$\mathbf{x}_R[k+1] = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{x}_R[k] + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}u[k] = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_R[k] + \mathbf{B}^*(-\mathbf{K}_R \mathbf{x}_R[k]) = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}^*\mathbf{K}_R)\mathbf{x}_R[k] = \mathbf{A}_R^*\mathbf{x}_R[k], \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{A}_R^* = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}^*\mathbf{K}_R)$  – имеет вид каноническая формы управляемости (матрица Фробениуса):

$$\mathbf{A}_R^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-a_0 - k_{R1}) & (-a_1 - k_{R2}) & \dots & (-a_{n-1} - k_{Rn}) \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Нижняя строка этой матрицы составлена из коэффициентов характеристического полинома, взятых со знаком минус. Следовательно, характеристический полином замкнутой системы (6.8) имеет вид:

$$P_R(z) = \det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}_R^*) = (a_0 + k_{R1}) + (a_1 + k_{R2})z + \dots + (a_{n-1} + k_{Rn})z^{n-1} + z^n. \quad (6.10)$$

Если желаемым полиномом является полином (6.4), то условиями расчета элементов матрицы  $\mathbf{K}_R$  будут:

$$\alpha_0 = a_0 + k_{R1}; \alpha_1 = a_1 + k_{R2}; \dots; \alpha_{n-1} = a_{n-1} + k_{Rn}. \quad (6.11-a)$$

И тогда элементы матрицы регулятора  $\mathbf{K}_R$  соответственно равны:

$$k_{R1} = \alpha_0 - a_0; k_{R2} = \alpha_1 - a_1; \dots; k_{Rn} = \alpha_{n-1} - a_{n-1}, \quad (6.11\text{-}\bar{b})$$

т.е.  $k_{R(i+1)} = \alpha_i - a_i, i=0, 1, \dots, n-1$ .

Подставив в (6.7) выражение для  $\mathbf{x}_R = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , получим  $u[k] = -\mathbf{K}_R \mathbf{x}_R[k] = -\mathbf{K}_R \mathbf{T} \mathbf{x}[k] = \mathbf{K} \mathbf{x}[k]$ , где  $\mathbf{K} = -\mathbf{K}_R \mathbf{T} = -\mathbf{K}_R \mathbf{Q}^{-1}$  – матрица коэффициентов  $\mathbf{K}$  в алгоритме модального управления.

Частным случаем синтезированного алгоритма управления является синтез системы с конечным числом шагов управления. Конечное число шагов управления иногда называется оптимальным по времени управлением. Конечным числом шагов управления называется конечное число  $N=n$  (порядок системы) элементов последовательности:  $u[k], u[k+1], \dots, u[k+N]$ , переводящих эту систему из произвольного начального состояния  $\mathbf{x}[k]$  в конечное состояние  $\mathbf{x}[k+N]=0$ .

Если управляющие переменные  $u[k]$  не ограничены, то время перехода объекта, описываемого уравнением (6.1) из начального состояния в конечное состояние, уменьшается пропорционально уменьшению интервала квантования. При этом, однако, значения управляющих переменных  $u$  на каждом интервале увеличивается. В пределе, когда период квантования  $T_0 \rightarrow 0$ , значение  $u \rightarrow \infty$ , то есть получаем физически нереализуемую систему.

В реальных системах на величину управляющего воздействия  $u[k]$  всегда наложено ограничение:  $|u| \leq u_{\max}$ . Вследствие этого реализация алгоритма управления с конечным числом шагов  $N$  и фиксированным периодом квантования  $T_0$ , в реальной системе с ограничением  $u_{\max}$ , приведет к увеличению длительности переходного процесса, то есть  $N_{\text{м}} > n$ , но при этом характер переходного процесса (апериодический) не изменится.

Условием конечности числа шагов управления является равенство собственных чисел матрицы  $\mathbf{A}^*$  замкнутой системы нулю, что может быть только при  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ .

Тогда характеристический полином замкнутой системы будет иметь вид:  $P(z) = z^n$ .

Используем далее полученные выше зависимости для расчета коэффициентов матрицы управления  $\mathbf{K}_R$ :  $k_{R(i+1)} = \alpha_i - a_i, i=0, 1, \dots, n-1$ .

Так как  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ , то  $k_{R(i+1)} = -a_i, i=0, 1, \dots, n-1$  и уравнение регулятора имеет вид:

$$u[k] = -\mathbf{K}_R \mathbf{x}_R[k] = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \mathbf{x}_R[k]. \quad (6.12)$$

Таким образом, синтез систем методом пространства состояний (МСП), состоит из следующих основных этапов:

1. Получение конечно-разностных уравнений в матричной форме записи.
2. Преобразование их к канонической форме управляемости.
3. Выбор желаемого характеристического уравнения системы.
4. Расчет коэффициентов матрицы управления.
5. Переход от канонических переменных к реальным переменным.

*Справка:* Определение матрицы  $\mathbf{Q}$  для приведения уравнений ММ к каноническому виду.

Преобразование уравнения динамики ОУ (6.1) к канонической форме управляемости подстановкой  $\mathbf{x}[k] = \mathbf{Q} \mathbf{x}_R[k]$  связано с необходимостью определения матрицы  $\mathbf{Q}$ . Известны несколько способов решения этой задачи. Приведем для справки два из них.

Пусть уравнение динамики одномерного ОУ (или системы) имеет канонический вид

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} u[k],$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица размером  $(n \times n)$ ,  $\mathbf{B}$  – матрица столбец.

**Способ I:** Если матрица управляемости  $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  не вырождена. Тогда

$$\mathbf{Q} = \text{colon}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1\mathbf{A}, \mathbf{M}_1\mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{M}_1\mathbf{A}^{n-1}), \text{ где } \mathbf{M}_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{U}^{-1}. \quad (6.13)$$

**Способ II:**  $\mathbf{Q} = [\mathbf{S}_1 \ \mathbf{S}_2 \ \dots \ \mathbf{S}_n]$ , где столбцы  $\mathbf{S}_i, i=n, n-1, n-2, \dots, 1$  определяются по формулам:

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{B},$$



Все приведенные выше для конечного времени наблюдения результаты остаются справедливыми. При этом матрицы  $\mathbf{P}[k]$  сходятся к последовательности неотрицательно определенных матриц при условии, что матрицы  $\mathbf{A}[k]$ ,  $\mathbf{B}[k]$ ,  $\mathbf{Q}[k]$ ,  $\mathbf{R}[k]$  ограничены для  $k > 0$ , а система полностью управляема или экспоненциально устойчива.

Б) Стационарный объект управления и постоянные матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ . При этом уравнение Риккати упрощается и переходит в матричное нелинейное уравнение вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q}. \quad (6.20)$$

В) Если  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  и сохраняются упрощающие предположения п.п. А) и Б), то КФП принимает вид  $J = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^T [k] \mathbf{Q}[k] \mathbf{x}[k]$ ; вектор управления равен

$$\mathbf{u}[k] = -[\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}[k] = -\mathbf{K} \mathbf{x}[k]. \quad (6.21)$$

При этом уравнение динамики замкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{x}[k+1] = [\mathbf{A} - \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}] \mathbf{x}[k], \quad (6.22)$$

а уравнение Риккати

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q}. \quad (6.23)$$

Г) Если на ОУ не поступает внешних воздействий, то поведение объекта описывается однородным уравнением. В этом случае с учетом сделанных ранее упрощений уравнение Риккати – линейное алгебраическое матричное уравнение вида

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (6.24)$$

а минимальное значение функции потерь  $J = \mathbf{x}^T [0] \mathbf{P} \mathbf{x}[0]$ . В этом частном случае решение однородного уравнения  $\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0]$ ,  $\mathbf{x}[0] \neq \mathbf{0}$ .

*Примечание 1:* Приведенные выше результаты получены [11] с помощью второго метода Ляпунова. Такие же результаты можно получить методами вариационного исчисления: а) метод Эйлера–Лагранжа и б) принцип максимума Понтрягина. Кроме того, к этой же задаче можно подойти как к задаче N-шагового процесса принятия решения и использовать метод динамического программирования.

*Примечание 2:* В большинстве практических случаев матрица  $\mathbf{P}$  вычисляется с помощью соответствующей численной итеративной процедуры. Для стационарного ОУ при постоянных матрицах ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ) с постоянными весовыми матрицами ( $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ) в КФП и при  $N \rightarrow \infty$  матрица  $\mathbf{P}$  вычисляются рекуррентно с помощью уравнения Риккати

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{A}^T [k] \mathbf{P}[k+1] \mathbf{A}[k] - \mathbf{A}^T [k] \mathbf{P}[k+1] \mathbf{B}[k] [\mathbf{R}[k] + \mathbf{B}^T [k] \mathbf{P}[k+1] \mathbf{B}[k]]^{-1} \mathbf{B}^T [k] \mathbf{P}[k+1] \mathbf{A}[k] + \mathbf{Q}[k],$$

путем подстановки в него произвольной невырожденной матрицы  $\mathbf{P}[k+1]$ , например,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}$  и получают  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}[k]$ . Повторяя вычисления при  $\mathbf{P}[k+1] = \mathbf{P}_1$ , получают  $\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}_2$  и т.д., пока не будет выполняться с заданной точностью приближенное равенство  $\mathbf{P}[k] \approx \mathbf{P}[k+1]$ . Для нестационарных объектов процедура существенно сложнее.

*Примечание 3:* В случае одномерного объекта вектор его входов будет представлен единственной координатой  $\mathbf{u}[k] = u[k]$ .

*Примечание 4:* Если не все координаты вектора  $\mathbf{x}[k]$  доступны измерению, то вместо них в алгоритме управления используются оценки, получаемые с помощью идентификаторов состояния (наблюдающих устройств) по данным измерения входов и выходов ОУ.

*Примечание 5:* Методы построения детерминированного оптимального регулятора можно применить для синтеза цифровых систем стабилизации и систем программного регулирования, если рассматривать расширенный (за счет формирователя задающего воздействия  $g[k]$ ) ОУ при включении в КФП слагаемых, пропорциональных квадратам дискретных значений ошибок регулирования и их производных [11].



## Лекция №7

### Тема: «Методы комплексной области в теории линейных ЦСАР»

#### Предварительные замечания

Отметим ряд недостатков МПС, ограничивающих их применение в инженерной практике:

- Ориентированы на компьютерные вычисления и/или моделирование.
- Для сложных структур получение ММ в желаемом виде проблематично.
- Проблематично применение для инженерного (многокритериального) синтеза.
- Трудности синтеза регулятора для следящей системы.
- Использование графического материала – минимально.
- Высокий уровень требуемой математической подготовки.
- Абстрактность некоторых из переменных состояния.
- Проблемы с выбором и согласованием критериев синтеза.

Поэтому на практике применяются в основном методы комплексной и частотной областей. Исследование собственных динамических и преобразовательных свойств ЛДЗ, а также их соединений можно значительно упростить, если с помощью специальных *операционных преобразований* из временной области перейти в комплексную область. Получаемые при этом математические уравнения относительно *изображений* решетчатых функций получаются более простыми для решения и последующего анализа. На этом основаны большинство методов исследования в классической теории линейных дискретных систем управления.

Для задач синтеза применение методов комплексной области (МКО) ограничено немногими аналитическими методами, поэтому они применяются, основном в комбинации либо с временными методами, либо с методами частотной области.

В МКО вместо переменных во временной области (решетчатых функций) рассматриваются их изображения в комплексной области (образы), а роль операторов преобразования ЛДЗ выполняют передаточные функции. Вместо разностных уравнений используются более простые для решения алгебраические уравнения относительно изображений.

#### 7.1. Дискретные операционные преобразования. Виды и свойства

Анализ преобразований дискретных сигналов линейными дискретными звеньями существенно упрощается, если для этого использовать *дискретные операционные преобразования*, которые решетчатой функции  $f[k]$  (оригиналу) ставят в соответствие некоторую функцию комплексной переменной (изображение). Известно несколько таких преобразований, но все они тесно связаны между собой, т.к. фактически могут быть получены из одного, базового, заменой переменных определенного вида. В качестве такого базового преобразования обычно используется *дискретное преобразование Лапласа* (ДПЛ,  $D_p$ -преобразование) [1, 6, 7]:

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] e^{-pkT_0}. \quad (7.1)$$

При довольно общих ограничениях на скорость роста ординат функции-оригинала  $f[k]$ , этот ряд сходится к аналитической функции  $F^*(p)$ , которая имеет вид дробно-рационального выражения относительно  $e^{pT_0}$  или  $e^{-pT_0}$ . Формально, эти преобразования можно применить и для смещенных решетчатых функций [6], получаемых из непрерывных функций при значениях  $t = kT_0 + \varepsilon T_0$ . Здесь  $\varepsilon$  – параметр смещения, *назначаемый* из интервала  $(0; 1)$ . Соответствующие им изображения  $F^*(p, \varepsilon)$  называют *модифицированными* преобразованиями, которые будут зависеть еще и от параметра смещения  $\varepsilon$ .

В качестве примера, найдем операционные изображения для некоторых простейших решетчатых функций-оригиналов:



$$a) f[k] = \delta_0[k]; \quad F^*(p) = 1 \cdot e^{-0pT_0} + 0 \cdot e^{-pT_0} + 0 \cdot e^{-2pT_0} + \dots = 1.$$

б)  $f[k] = 1[k]$ ; (единичная ступенчатая решетчатая функция)

$$F^*(p) = 1 \cdot e^{-0pT_0} + 1 \cdot e^{-pT_0} + 1 \cdot e^{-2pT_0} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-pT_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - 1}.$$

в)  $f[k] = e^{-\alpha k T_0}$ ; (решетчатая экспоненциальная функция)

$$F^*(p) = e^{-\alpha T_0} e^{-0pT_0} + e^{-\alpha T_0} e^{-pT_0} + e^{-2\alpha T_0} e^{-2pT_0} + \dots + e^{-k\alpha T_0} e^{-kpT_0} + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-(p+\alpha)T_0}} = \frac{1}{1 - e^{-pT_0} e^{-\alpha T_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - e^{-\alpha T_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - d}, \quad d = e^{-\alpha T_0}.$$

$$г) f[k, \varepsilon] = e^{-\alpha(kT_0 + \varepsilon T_0)} = e^{-\alpha k T_0 - \alpha \varepsilon T_0} = e^{-\alpha k T_0} e^{-\alpha \varepsilon T_0} = e^{-\alpha k T_0} d^\varepsilon;$$

$$F^*(p, \varepsilon) = \frac{e^{pT_0} d^\varepsilon}{e^{pT_0} - d}.$$

В случаях б) и в) при нахождении суммы бесконечного ряда была использована формула для суммы геометрической прогрессии. Для большого набора часто встречающихся решетчатых функций  $f[k]$  такие изображения найдены, и их помещают в специальные справочные таблицы. Часто в таких таблицах дополнительно приводятся также и изображения Лапласа  $F(p)$  для непрерывных огибающих (производящих функций)  $f(t)$ .

Поскольку функция  $f[k]$  получена из  $f(t)$  при  $t = kT_0$ , то между изображениями  $F^*(p)$  и  $F(p)$ , кроме табличной связи, существует и математическая зависимость:

$$F^*(p) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(\xi) \frac{1}{1 - e^{-(p-\xi)T_0}} d\xi. \quad (7.2)$$

Здесь  $\Gamma$  – замкнутый контур интегрирования в комплексной плоскости, охватывающий полюсы одного из сомножителей подынтегрального выражения [6, 7].

Если контур  $\Gamma = \Gamma_1$  охватывает полюсы *первого* сомножителя  $F(\xi)$ , то из (7.2) следует формула, имеющая вид суммы *вычетов* в полюсах изображения Лапласа непрерывной огибающей:

$$F^*(p) = \sum_i \text{Res}_{s_i} \frac{F(s)}{1 - e^{-pT_0} e^{sT_0}}, \quad (7.3)$$

где  $\text{Res}_{s_i}(\cdot)$  – вычет выражения  $(\cdot)$  в полюсе  $s_i$  функции  $F(s)$ .

В том случае, когда контур  $\Gamma = \Gamma_2$  охватывает полюсы второго сомножителя подынтегрального выражения в (3.2), то формула связи изображений дискретного и непрерывного сигналов принимает следующий вид:

$$F^*(p) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(p - jr\omega_0) + \frac{f(0)}{2}, \quad (7.4)$$

где  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  – частота дискретизации сигнала по времени.

Этой формулой связи изображений  $F^*(p)$  и  $F(p)$  обычно пользуются в предположении того, что  $f(0) = 0$  и тогда ее можно получить другим, более простым и понятным способом, не прибегая к формуле вычетов. Рассмотрим его, так как он дает лучшее понимание закономерностей взаимосвязи изображений Лапласа для дискретного и непрерывного сигналов [3].

Для этого формально запишем следующие очевидные равенства:

$$f(kT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kT_0)dt; \quad q^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0); \quad f^*(t) = f(t)q^*(t).$$

Здесь  $q^*(t)$  – периодическая (с периодом  $T_0$ ) последовательность идеальных  $\delta$ -импульсов единичной интенсивности, а  $f^*(t)$  – модулированная (по интенсивности) их последовательность.

Если считать, что  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , то для  $D_p$ -изображения соответствующей решетчатой функции  $f[k]$  можно получить следующие эквивалентные выражения:

$$\begin{aligned} F^*(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)e^{-pkT_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}\delta(t-kT_0)dt \right) = \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_0)dt = \int_0^{\infty} f(t)q^*(t)e^{-pt}dt = L\{f^*(t)\}. \end{aligned}$$

То есть  $D_p$ -изображение  $F^*(p)$  формально совпадает с изображением интегрального преобразования Лапласа для функции  $f^*(t)$  в виде модулированной последовательности  $\delta$ -импульсов.

Поскольку  $q^*(t)$  – периодическая функция времени, то ее можно представить рядом Фурье в комплексной форме:

$$q^*(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{jr\omega_0 t}; \quad C_r = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} q^*(t)e^{-jr\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Тогда, подставляя это выражение в предыдущую формулу и используя свойства преобразования Лапласа (линейность, изображение функции, умноженной на экспоненту), получим

$$F^*(p) = L\left\{ f(t) \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_0 t} \right\} = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(p - jr\omega_0).$$

Ввиду симметричности пределов суммирования, в этой формуле можно вместо выражения  $F(p - jr\omega_0)$  записывать  $F(p + jr\omega_0)$ .

В зависимости от решаемой задачи, используется подходящий вариант формулы связи изображений  $F^*(p)$  и  $F(p)$ . В частности, вариант формулы (7.3) в виде суммы вычетов можно использовать наряду с табличным методом для нахождения  $D_p$ -изображения по известному изображению  $F(p)$ . Формулу (7.4) при  $p=j\omega$  применяют при изучении спектров дискретных сигналов и их связи со спектрами непрерывных сигналов. Эта формула, в частности, наглядно демонстрирует, что  $D_p$ -изображения являются периодическими функциями комплексной переменной  $p$  с периодом, равным  $j\omega_0$  в направлении мнимой оси. Обычно рассматривают только главный период (полосу), содержащий начало координат комплексной плоскости  $p$ .

Полезно напомнить, что вычет некоторой функции комплексной переменной  $\Phi(s)$  в полюсе  $s_i$  кратности  $m_i$  находится по следующей формуле [6]:

$$\text{Res}_{s_i, m_i} \Phi(s) = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i - 1}}{ds^{m_i - 1}} \left( (s - s_i)^{m_i} \Phi(s) \right). \quad (7.5)$$

Громоздкость записи формул  $D_p$ -изображений, а также ряд других неудобств, связанных с их периодической зависимостью от переменной  $p$ , можно устранить путем замены переменных в формулах для  $F^*(p)$ . При этом получаются новые дискретные операционные преобразования и соответствующие им изображения. Основные из них приведены в табл. 7.1. Отсюда очеви-

ден переход от изображения одного типа к другому типу, например,  $D_w\{f[k]\} = D_z\{f[k]\}$  при  $z=(1+w)/(1-w)$ , или  $D_u\{f[k]\} = D_z\{f[k]\}$  при  $z=(2+uT_0)/(2-uT_0)$ .

Таблица 7.1

**Другие типы дискретных операционных преобразований**

№ п.п.	Наименование преобразования	Подстановка
1	$D_q$ - преобразование	$pT_0 = q$
2	$D_z$ - или $Z$ -преобразование	$e^{pT_0} = z$
3	$D_w$ - преобразование	$e^{pT_0} = \frac{1+w}{1-w}$
4	$D_u$ -преобразование	$e^{pT_0} = \frac{1+u\frac{T_0}{2}}{1-u\frac{T_0}{2}} = \frac{2+uT_0}{2-uT_0}$

Чаще других используют  $Z$ -преобразования в соответствии с формулами

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}; \quad F(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon]z^{-k}. \quad (7.6)$$

Таблицы операционных изображений в разных источниках обычно приводят для одного из них [1, 7]. Фрагмент такой таблицы для  $Z$ -изображений, приводится ниже в табл.7.2.

Все названные выше дискретные операционные преобразования имеют ряд полезных свойств, благодаря которым и становится целесообразным их использование, переводящее анализ свойств дискретных сигналов и дискретных звеньев (или их соединений, т.е. систем) из временной области в комплексную. Ниже, на примере  $Z$ -преобразования, приводится список основных свойств таких преобразований [1, 2, 6].

1. Свойство линейности

$$\sum_i C_i f_i[k] \Rightarrow \sum_i C_i F_i(z), \quad (7.7)$$

где  $F_i(z)$  – изображение для  $f_i[k]$ .

Таблица 7.2

**Операционные изображения некоторых функций**

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$	$f(kT_0), k \geq 0$	$F(z)$	$F(z, \varepsilon)$
-	-	$\delta_0[k]$	1	
1(t)	$\frac{1}{p}$	1[k]	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$kT_0$	$\frac{zT_0}{(z-1)^2}$	$\frac{zT_0}{(z-1)^2} + \frac{zT_0\varepsilon}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha kT_0} = d^k$	$\frac{z}{z-d}$	$\frac{z}{z-d} d^\varepsilon; d = e^{-\alpha T_0}$

$K(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{K\alpha}{(p + \alpha)p}$	$K(1 - d^k)$	$\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-d}$	$\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kzd^\varepsilon}{z-d}$
------------------------	---------------------------------	--------------	-----------------------------------	--

2. Изображения смещенных на  $i$  тактов функций

$$\begin{aligned} E^i f[k] = f[k+i] &\Rightarrow z^i F(z) + N_1(z); \\ E^i f[k] = f[k-i] &\Rightarrow z^{-i} F(z) + N_2(z). \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $N_1(z)$  – полином с коэффициентами, зависящими от  $f[0], \dots, f[i-1]$ ;  $N_2(z)$  – полином, коэффициенты которого зависят от  $f[-1], \dots, f[-i]$ .

3. Изображения разностей  $i$ -го порядка

$$\begin{aligned} \Delta^i f[k] &\Rightarrow (z-1)^i F(z) + M_1(z); \\ \nabla^i f[k] &\Rightarrow (1-z^{-1})^i F(z) + M_2(z), \end{aligned} \quad (7.9)$$

где  $M_1(z)$  – полином с коэффициентами, зависящими от  $f[0], \dots, f[i-1]$ ;  $M_2(z)$  – полином, коэффициенты которого зависят от  $f[-1], \dots, f[-i]$ .

4. Изображения сумм  $i$ -го порядка

$$\begin{aligned} \sigma^i f[k] = \Delta^{-i} f[k] &\Rightarrow (z-1)^{-i} F(z) \\ \sigma_1^i f[k] = \nabla^{-i} f[k] &\Rightarrow (1-z^{-1})^{-i} F(z) \end{aligned} \quad (7.10)$$

5. Изображение свертки двух решетчатых функций

$$f_1[k] \otimes f_2[k] = \sum_{k=0}^k f_1[k-m] f_2[k] \Rightarrow F_1(z) F_2(z). \quad (7.11)$$

6. Начальное значение решетчатой функции

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} (1-z^{-1})F(z). \quad (7.12)$$

7. Установившееся значение решетчатой функции (если оно *существует*)

$$f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z). \quad (7.13)$$

8. Формула обратного  $Z$ -преобразования

$$f[k] = \sum_i \text{Res}_{z_i} (F(z) z^{k-1}), \quad (7.14)$$

где  $z_i$  – полюсы изображения  $F(z)$ .

Выражение (7.14) позволяет найти *формулу* для функции-оригинала  $f[k]$  по известному изображению  $F(z)$ . Часто в этом нет необходимости, т.к. для построения графика  $f[k]$  достаточно знать лишь конечное число ее начальных ординат. Найти их можно численным методом, раскладывая  $F(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ . Тогда, согласно формуле (3.6)  $F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots$ , а коэффициенты этого ряда и будут ординатами искомой функции-оригинала.

## 7.2. Передаточные функции ЛДДЗ

Применим перечисленные выше свойства  $D$ -изображений для исследования преобразования дискретных сигналов линейным дискретным динамическим звеном (ЛДДЗ). В связи с этим рассмотрим четыре варианта исходных данных для решения поставленной задачи.

А. Пусть известна весовая функция ЛДДЗ  $w[k]$  и оно находится в состоянии покоя (нулевые начальные условия!) до начала действия на его вход внешнего сигнала  $f[k]$  при  $k=0$ . Тогда,

в соответствии с (4.18), выход дискретного звена  $y[k]$  при  $k \geq 0$  можно определить по формуле свертки:  $y[k] = w[k] \otimes f[k]$ .

Аналогично  $Z$ -преобразованию, свойство 5, ( $D$ -изображение для свертки двух решетчатых функций), справедливо для каждого из приведенных ранее в табл. 7.1  $D$ -преобразований. Тогда  $D$ -изображение выхода ЛДДЗ будет равно произведению  $D$ -изображения весовой функции  $w[k]$  звена на  $D$ -изображение входного воздействия  $f[k]$ :

$$D\{y[k]\} = D\{w[k]\} \cdot D\{f[k]\} \quad (7.15)$$

Здесь  $D\{w[k]\}$  – функция комплексной переменной, устанавливающая простую алгебраическую связь  $D$ -изображений выхода и входа ЛДДЗ при нулевых начальных условиях. Она играет роль коэффициента передачи (оператора преобразования) звена в комплексной области и называется его передаточной функцией [1, 6, 7].

Из (7.15), следует и другое, эквивалентное определение для передаточной функции ЛДДЗ, как отношение  $D$ -изображений выхода и входа при нулевых начальных условиях:

$$D\{w[k]\} = \frac{D\{y[k]\}}{D\{f[k]\}}. \quad (7.16)$$

Формуле (7.15) соответствует простейшая (тривиальная) структурная схема, представленная на рис. 7.1, которая в графическом виде отображает связь  $D$ -изображений выхода и входа ЛДДЗ.

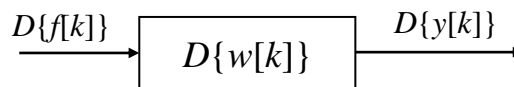


Рис. 7.1. Преобразование сигнала дискретным звеном

При решении конкретной задачи под  $D$ -изображением может пониматься как дискретное преобразование Лапласа ( $D_p$ -преобразование), так и другие дискретные операционные преобразования решетчатых функций, приведенные в табл. 7.1. Так, например, для  $Z$ -преобразования выражение (7.15) примет следующий вид

$$y(z) = W(z)f(z), \quad (7.17)$$

где  $W(z) = D_z\{w[k]\} = Z\{w[k]\}$  – передаточная функция линейного дискретного звена, которую можно определить еще и как отношение  $Z$ -изображений выхода и входа (при нулевых начальных условиях!).

♦ Если конфигурация структурной схемы более сложная и представляет собой соединение одномерных ЛДДЗ с известными передаточными функциями, то ее можно эквивалентно (в смысле равенства передаточных функций) преобразовать к некоторому требуемому, например тривиальному, виду. При этом справедливы все без исключения правила структурных преобразований, известные в теории линейных непрерывных систем. Например, это формулы эквивалентных передаточных функций для всех типовых соединений ЛДДЗ (параллельное, последовательное, встречно-параллельное), правила переноса узлов и сумматоров через дискретные звенья и др.

Б. Рассмотрим другой случай, когда оператор преобразования  $\mathcal{A}_k$  ЛДДЗ задан неявно с помощью уравнения "вход-выход" (2.4), которое запишем (для удобства) в операторной форме

$$A(E)y[k] = B(E)f[k], \quad (7.18)$$

где  $A(E)$  и  $B(E)$  – полиномы относительно оператора прямого сдвига  $E$  (операторные полиномы) с коэффициентами  $a_i$  и  $b_i$  соответственно.

При этом по-прежнему будем считать начальные условия нулевыми, т.е. предполагаем, что звено находилось в покое до начала действия входного сигнала  $f[k]$  в начальный момент времени при  $k = 0$ . Тогда, применяя  $Z$ -преобразование к левой и правой частям уравнения "вход-выход" и учитывая свойства (7.7), (7.8), получим линейное алгебраическое уравнение относительно  $y(z)$ :

$$A(z)y(z) = B(z)f(z). \quad (7.19)$$

Отсюда можно определить изображение выхода  $y(z)$ :

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} f(z) = W(z) f(z). \quad (7.20)$$

Тогда передаточная функция ЛДДЗ  $W(z)$  будет равна отношению операторных полиномов правой и левой частей разностного уравнения при формальной замене в них оператора сдвига  $E$  на комплексную переменную  $z$ :

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.21)$$

Этот результат можно считать еще одним, также *эквивалентным*, определением понятия передаточной функции ЛДДЗ. При этом, очевидно, что знаменатель передаточной функции звена  $W(z)$  является характеристическим полиномом, а ее полюсы  $z_i$  – это характеристические корни. Полагая в (7.21)  $z=(2+uT_0)/(2-uT_0)$ , после алгебраических преобразований можно получить преобразованную передаточную функцию  $W(u)=B_u(u)/A_u(u)$ , знаменатель которой  $A_u(u)$  будет преобразованный (относительно  $u$ ) характеристический полином.

♦ Примечательно то, что его корни  $u_i = (2/T_0)(z_i - 1)/(z_i + 1)$  для *устойчивого* ЛДДЗ будут располагаться слева от мнимой оси (по свойству дробно-линейного преобразования!).

Аналогично поступают в том случае, когда уравнение «вход-выход» звена задано в форме оператора обратного сдвига, или в форме прямых или обратных разностей. При этом используются свойства  $Z$ -преобразования об изображении (при нулевых начальных условиях) прямых и обратных разностей различных порядков. Тогда в обозначениях формул (2.5) для полиномов правых и левых частей разностных уравнений «вход-выход», соответствующая им передаточная функция запишется следующим образом:

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z^{-1})}{A_1(z^{-1})} = \frac{B_2(z-1)}{A_2(z-1)} = \frac{B_3(1-z^{-1})}{A_3(1-z^{-1})}.$$

Таким образом, передаточная функция линейного дискретного звена будет равна отношению операторных полиномов в правой и левой части уравнения «вход-выход» при замене в них символов соответствующих операторов на следующие выражения:  $E \rightarrow z$ ;  $E_1 \rightarrow z^{-1}$ ;  $\Delta \rightarrow z-1$ ;  $\nabla \rightarrow 1-z^{-1}$ .

Из (7.19) – (7.21) следует также, что, зная полиномы числителя и знаменателя передаточной функции ЛДДЗ, несложно записать уравнение "вход-выход" звена в форме оператора сдвига  $E$ . Для этого нужно предварительно получить выражение (7.19), а затем перейти к (7.18).

Часто требуется записать разностное уравнение «вход-выход» в форме оператора обратного сдвига  $E_1$ . Это необходимо, например, для последующего программирования при микропроцессорной реализации дискретного корректирующего устройства. В этом случае выражение для  $W(z)$  нужно сначала записать в виде отношения полиномов по степеням  $z^{-1}$ , поделив для этого числитель и знаменатель на старшую степень переменной  $z$ , а затем поступить так же, как и в предыдущем случае, используя *свойство 2*. Если нужно записать уравнение "вход-выход" в обратных разностях, то далее можно воспользоваться формулой связи операторов обратного сдвига и обратной разности  $E_1 = I - \nabla$ .

Пример 7.1. Записать разностное уравнение "вход-выход" и формулу для вычисления очередного значения выхода при  $k \geq 0$ , если передаточная функция ЛДДЗ имеет следующий вид:

$$W(z) = \frac{2z+1}{z^2-2z+1} = \frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{y(z)}{f(z)}.$$

*Решение.* От передаточной функции  $W(z)$  перейдем к разностному уравнению:

$$(1-2z^{-1}+z^{-2})y(z) = (2z^{-1}+z^{-2})f(z) \Leftrightarrow (I-2E_1+E_1^2)y[k] = (2E_1+E_1^2)f[k].$$

Тогда формула вычисления  $y[k]$ , удобная для программирования, запишется так:

$$y[k] = 2y[k-1] - y[k-2] + 2f[k-1] + f[k-2], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для начала вычислений по этой рекуррентной формуле необходимо задать значения  $y[-1]$ ,  $y[-2]$ ,  $f[k-1]$ ,  $f[k-2]$ , которые часто считают нулевыми.

Уравнение «вход-выход» в форме оператора обратной разности для этого примера запишется следующим образом:

$$\nabla^2 y[k] = 3 f[k] - 4 \nabla f[k] + \nabla^2 f[k].$$

В. Рассмотрим третий случай, когда оператор преобразования  $\mathcal{A}_k$  для ЛДДЗ задан *неявно* с помощью уравнений состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}f[k], \\ y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}f[k], \end{aligned} \quad (7.22)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – числовые матрицы соответствующих размеров.

Полагая, как и ранее, начальные условия нулевыми ( $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ ), перейдем к  $Z$ -преобразованиям в этих уравнениях:

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}f(z), \\ y(z) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}f(z). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Исключив из них  $\mathbf{x}(z)$ , найдем изображение выхода ЛДДЗ:

$$y(z) = \{\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\}f(z) = W(z)f(z),$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Отсюда следует выражение для передаточной функции  $W(z)$ :

$$W(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (7.24)$$

Из этой формулы видно, что корни уравнения  $\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$ , т.е. *собственные значения* матрицы  $\mathbf{A}$ , являются *полюсами* передаточной функции ЛДДЗ.

Г. Определение передаточной функции линейного звена приведенной непрерывной части (ДЗ ПНЧ). Напомним, что ДЗ ПНЧ является обязательным звеном расчетной схемы ЦСАР и представляет собой непрерывное звено с фиксатором на входе и ключом на выходе (рис. 7.1):

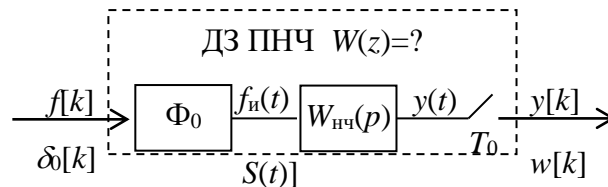


Рис. 7.1. Структурная схема ДЗ ПНЧ

Из рис. 7.1 следует, что при  $f[k] = \delta_0[k]$  выход фиксатора  $f_n(t) = S(t)$ , а  $y[k] = w[k]$  при том, что  $y(p) = W_{\text{нч}}(p)S(p)$ . Следовательно,  $W(z) = Z_c\{W_{\text{нч}}(p)S(p)\}$ , где  $Z_c$  – это  $D_z$ -преобразование, соответствующее (например, по таблице) непрерывному изображению  $y(p) = W_{\text{нч}}(p)S(p)$ . Для фиксатора  $S(p) = L\{1(t) - 1(t - T_0)\} = (1 - e^{-pT_0})/p$  – изображение Лапласа прямоугольной формы импульса длительностью  $T_0$ , часто называемое передаточной функцией фиксатора.

Учитывая, то что  $e^{-pT_0} = z^{-1}$ , передаточная функция ДЗ ПНЧ определится следующей формулой:

$$W(z) = Z_c\{W_{\text{нч}}(p)S(p)\} = (1 - z^{-1}) Z_c\{W_{\text{нч}}(p)/p\}. \quad (7.25)$$

Преобразованную передаточную функцию  $W(u)$  можно определить подстановкой  $z = (2 + uT_0)/(2 - uT_0)$ . Для типового вида  $W_{\text{нч}}(p)$  удобно воспользоваться табличным способом, в котором  $W(u)$  рассматривается как новое преобразование для  $W_{\text{нч}}(p)$ :

$$W(u) = D_{\text{uc}}\{W_{\text{нч}}(p)S(p)\} = D_{\text{uc}}\{W_{\text{нч}}(p)(1 - e^{-pT_0})/p\} = D_{\text{uc}}^*\{W_{\text{нч}}(p)\}. \quad (7.26)$$

Формулу (7.26) часто рассматривают как новое (специальное)  $\tilde{D}_u$ -преобразование для  $W_{\text{нч}}(p)$  и таблицы соответствий для него приводятся в литературе по дискретным системам управления. Достаточно полный список таких соответствий приводится ниже в табл. 7.4.

Таблица 7.4

$\tilde{D}_u$  - изображения для некоторых передаточных функций

$W_{\text{нч}}(p)$	$W(u) = D_u \left\{ \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{нч}}(p) \right\} = \tilde{D}_u \{W_{\text{нч}}(p)\}$
$K$	$K$
$\frac{K}{p}$	$\frac{K(1 - u \frac{T_0}{2})}{u}$
$\frac{K}{p^2}$	$K \frac{\left(1 - u \frac{T_0}{2}\right)}{u^2}$
$\frac{K}{p^3}$	$\frac{K \left(1 - u \frac{T_0}{2}\right) \left(1 - \frac{u^2 T_0^2}{12}\right)}{u^3}$
$\frac{K}{1 + pT_1}$	$\frac{K(1 - u \frac{T_0}{2})}{1 + uT_c}; T_c = \frac{T_0}{2} \frac{1 + d}{1 - d}; d = e^{-\frac{T_0}{T_1}}$
$\frac{K}{p(1 + pT_1)}$	$\frac{K \left(1 - u \frac{T_0}{2}\right) (1 + uT_x)}{u(1 + uT_c)}; T_x = T_c - T_1$
$K \frac{1 + p\tau}{p}$	$\frac{K(1 + u\tau_1)}{u}; \tau_1 = \tau - \frac{T_0}{2}$
$\frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}$	$\frac{1 + uT_1^1}{1 + uT_2^1}; T_1^1 = \frac{T_0}{2} \left( \frac{2\beta}{1 - d_2} - 1 \right); T_2^1 = \frac{T_0}{2} \frac{1 + d_2}{1 - d_2}; \beta = \frac{T_1}{T_2}; d_2 = e^{-\frac{T_0}{T_2}}$

♦ Рассмотрим далее *вторую задачу*, заключающуюся в получении уравнений состояния для ДЗ ПНЧ. При этом если известна передаточная функция ДЗ ПНЧ  $W(z)$ , записанная в форме отношения полинома числителя  $B(z)$  и полинома знаменателя  $A(z)$ , то матричные коэффициенты **A**, **B**, **C**, **D** в уравнениях состояния можно определить по специальным формулам через коэффициенты этих полиномов.

Следует заметить, что такие формулы для матричных коэффициентов как в дискретных, так и в непрерывных уравнений состояния динамических звеньев не являются единственными (однозначными), а их вид существенным образом зависит от способа назначения переменных



состояния. Обычно при этом используются формулы для какой-то одной из общепринятых, канонических форм. Так, например, если передаточная функция ЛДДЗ  $W(z)$  имеет вид дробно-рационального выражения относительно комплексной переменной  $z$ :

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}, \quad (7.27)$$

то искомые матрицы, соответствующие *канонической форме управляемости*, можно получить по следующим формулам (см. Лекцию №5, формулы 5.8-а):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} 0 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots \\ \dots & \dots & 0 & a_n \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \frac{b_n}{a_n}; \quad (7.28)$$

$$\mathbf{C} = \left[ b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n} \quad b_1 - a_1 \frac{b_n}{a_n} \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \right].$$

Если порядок НЧ высокий (например, больше десяти), то определение передаточной функции  $W(z)$  для дискретного звена приведенной непрерывной части (ДЗ ПНЧ) представляет собой сложную задачу даже в тех случаях, когда формирователь импульсов ФИ в составе ПНЧ является фиксатором (рис.7.2). Возникающие трудности связаны с необходимостью определения  $Z$ -преобразований по известным изображениям интегрального преобразования Лапласа. Однако если для НЧ известны матрицы уравнений состояния  $\mathbf{A}_н$ ,  $\mathbf{B}_н$ ,  $\mathbf{C}_н$ ,  $\mathbf{D}_н$ , а формирователь импульсов является фиксатором, то коэффициенты  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  для ДЗ ПНЧ можно определить приближенным численным методом без нахождения передаточной функции  $W(z)$  [6, 8].

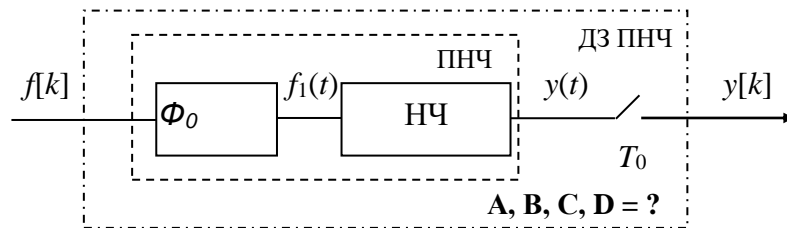


Рис. 7.2. Определение матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  для ДЗ ПНЧ

Пусть  $f_1(t)$  – выход фиксатора, поступающий на вход непрерывной части НЧ, математическая модель которой имеет форму уравнений состояния

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} f_1(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} f_1(t). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Тогда вектор состояния непрерывной части  $\mathbf{x}(t)$  при  $kT_0 \leq t \leq kT_0 + T_0$  определится по формуле общего решения для первого из этих уравнений:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_н(t-kT_0)} \mathbf{x}[k] + \int_{kT_0}^t e^{\mathbf{A}_н(t-\tau)} \mathbf{B}_н f_1(\tau) d\tau \quad (7.30)$$

Полагая в этом выражении  $t = kT_0 + T_0$  и учитывая то, что на интервале изменения  $\tau$ , где  $kT_0 \leq \tau < kT_0 + T_0$ ,  $f_1(\tau) = f[k]$ , получим первое из уравнений состояния ДЗ ПНЧ:

$$\mathbf{x}[k+1] = e^{\mathbf{A}_H T_0} \mathbf{x}[k] + \int_{kT_0}^{kT_0+T_0} e^{\mathbf{A}_H (kT_0+T_0-\tau)} \mathbf{B}_H f[k] d\tau = \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} f[k], \quad (7.31)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_H T_0}; \quad \mathbf{B} = \int_{kT_0}^{kT_0+T_0} e^{\mathbf{A}_H (kT_0+T_0-\tau)} d\tau \mathbf{B}_H = \int_0^{T_0} e^{\mathbf{A}_H \tau} d\tau \mathbf{B}_H. \quad (7.32)$$

Так как выражение для  $y(t)$  в уравнениях (7.29) соответствует безынерционному преобразованию, то при дискретизации аргумента оно сохраняет свой вид и поэтому  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_H$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_H$ .

Для получения численных значений матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в соответствии с (7.32), можно воспользоваться формулами, основанными на разложении матричного экспоненты в степенной ряд:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_H T_0} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_H T_0 + \frac{\mathbf{A}_H^2 T_0^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_H^i T_0^i}{i!}; \quad (7.33)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_H^i \tau^i}{i!} d\tau \mathbf{B}_H = T_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_H^i T_0^i}{(i+1)!} \mathbf{B}_H. \quad (7.34)$$

При практическом использовании этих формул количество слагаемых, учитываемых при суммировании, определяется в процессе вычислений исходя из требуемой точности, когда вес очередного слагаемого (по норме) становится достаточно малым.

♦ Отметим, что передаточная функция  $W(z)$  в той же мере, что и весовая функция, характеризует: а) преобразовательные свойства ЛДДЗ; б) свойство его устойчивости, а также определяет в) условие его физической реализуемости. Ниже приводятся необходимые разъяснения по этим вопросам.

а) Если найти изображение выхода  $y(z)$  по формуле (7.20), то далее по формуле обратного Z-преобразования (см. свойство 8) можно определить оригинал искомой функции  $y[k]$ . При этом аналитическое выражение для решетчатой функции  $y[k]$  можно определить по формуле вычетов или табличным методом в комбинации со свойствами Z-преобразования. Кроме того, необходимые для построения графика значения функции выхода  $y[k]$  можно получить и как коэффициенты разложения  $y(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ , например методом деления полинома числителя на полином знаменателя (или каким-то другим способом).

Пример 3.2. Определение функции-оригинала по изображению.

$$f(z) = \frac{1}{z-d} = \frac{z}{z-d} z^{-1} \Leftarrow f[k] = E_1 d^k = d^{k-1}.$$

*Решение.* Здесь использован табличный метод определения оригинала в сочетании со свойством 2 Z-преобразования об изображении запаздывающей на такт решетчатой функции. Так как несмещенная функция-оригинал  $f_1[k] = d^k$ , найденная по таблице 7.2, равна нулю при  $k < 0$ , то запаздывающая искомая функция  $f[k] = E_1 f_1[k] = d^{k-1}$  должна рассматриваться при  $k \geq 1$ , принимая нулевые значения при  $k < 1$ .

б) Весовая функция ЛДДЗ является оригиналом передаточной функции и поэтому ее можно определить по формуле обратного Z-преобразования:

$$w[k] = \sum_i \text{Res}_{z_i} (W(z) z^{k-1}) = \sum_i C_i z_i^k, \quad (7.35)$$

где  $z_i$  – полюсы дробно-рациональной передаточной функции  $W(z)$ . Отсюда следует, что вид и характер весовой функции, а значит и свойство ее затухания во времени определяется только корнями знаменателя (полюсами) передаточной функции  $z_i$ . Поэтому для устойчивого дискретного звена все корни  $z_i$  должны лежать внутри единичного круга, т.е. должны иметь модули меньше единицы ( $|z_i| < 1$ ).

в) Поскольку ординаты графика  $w[k]$  совпадают с коэффициентами разложения  $W(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ , то условие физической реализуемости (равенство нулю ординат  $w[k]$  при  $k < 0$ ) будет выполняться только в том случае, когда порядок полинома числителя в  $W(z)$  не выше порядка полинома знаменателя. Иначе в разложении в ряд будут ненулевые коэффициенты при *положительных* степенях переменной  $z$ . Физически это условие означает то, что выход реального звена (следствие) не может опережать во времени входной сигнал (причину).

## Лекция №8

### Тема: «Методы комплексной области: Анализ и синтез ЦСАР»

#### Предварительные замечания

♦ Методы комплексной области позволяют выполнить анализ основных динамических свойств линейных ЦСАР и ДСУ, проявляющихся (при нулевых начальных условиях) как в переходных, так и установившихся режимах. При этом, если расчетная структурная схема ДСУ имеет сложный вид, следует, применив правила структурных преобразований (полностью аналогично таковым из теории непрерывных САР) привести ее к каноническому виду с единичной отрицательной обратной связью (ЕООС).

♦ Обычно анализ начинают с исследования устойчивости и влияния параметров регулятора и ОУ на свойство и запасы устойчивости, определив предварительно характеристический полином замкнутой ДСАР. При этом удобно использовать дробно-линейное преобразование и использовать далее преобразованный характеристический полином  $A_u(u)$ , являющийся знаменателем преобразованной ПФ исследуемой ЦСАР. Это дает возможность формально применять методы и результаты теории непрерывных САР (см. лекцию №5).

Методы комплексной области в задаче детерминированного синтеза ЦСАР являются аналитическими и представлены двумя видами задач: а) параметрический синтез (синтез ДСАР с фиксированной структурой) на основе квадратичного ПК ПП и б) синтез корректирующего звена (ДСАР с частично заданной структурой).

#### 8.1 Анализ качества процессов управления в ЦСАР

В линейных ДСУ реакция на внешнее воздействие по любой координате всегда имеет две составляющих: а) переходную и б) вынужденную. При этом процесс управления в системе длится во времени и не может быть произвольным. Прежде всего, он должен быть устойчивым, когда его переходная составляющая затухает. В противном случае ДСУ *в принципе* не сможет обеспечить выполнение поставленной цели управления – изменение управляемой переменной во времени в соответствии с предписанным законом. Но и в случае устойчивой ДСУ условия конкретного применения всегда предъявляют ряд требований (ограничений) как к переходной, так и к установившейся компоненте процесса управления. Совокупность таких требований составляет содержание понятия *качества* ДСУ. В общепринятом смысле, качество – это свойство соответствовать какому-либо образцу, эталону, идеальному варианту. Для систем автоматического управления (регулирования) таким эталоном является *идеальная система*, которая точно воспроизводит требуемый закон изменения управляемой переменной, несмотря на наличие возмущений и других нежелательных факторов. Оценки качества процесса управления является одной из главных задач анализа в ТАУ. Она одинаково важна как для непрерывных, так и для дискретных систем управления [2, 6, 7, 9].

Если ДСУ реально существует, оценить объективно качества ее функционирования на некотором интервале времени можно по результатам наблюдения (измерения) сигнала ошибки. По графику ошибки можно определить некоторые числовые характеристики (функционалы, *показатели качества*), например, наибольшее значение модуля ошибки, среднее или среднеквадратическое ее значение и т.д. Величины этих показателей позволяют оценить степень успешности процесса управления, а значит и качество ДСУ.

На этапе *проектирования* ДСУ конкретный вид внешних воздействий, а значит и график изменения ошибки, заранее (априорно) неизвестен. Поэтому для *сравнения* различных вариантов проектируемой системы принято характеризовать качество процесса управления по её реакциям на некоторые определенные виды воздействий. При этом качество установившихся (стационарных) и переходных (нестационарных) процессов в линейных системах приходится оценивать раздельно, рассматривая, соответственно, типовые, и наиболее неблагоприятные виды внешних воздействий. Для этой цели вводятся в рассмотрение *показатели качества переходных процессов* (ПК ПП) и *показатели качества установившихся процессов* (ПК УП).

При известном задающем воздействии и в предположении НУУ методы комплексной области дают возможность получить выражения для переходной и вынужденной составляющих реакции как по выходу ОУ, так и по ошибке.

Для типовой (канонической) структуры ЦСАР с ЕООС с входным (задающим) сигналом  $g[k]$ , выходом  $y[k]$  и ошибкой  $\varepsilon[k] = g[k] - y[k]$  справедливы следующие выражения:

$$\varepsilon(z) = \Phi_\varepsilon(z)g(z),$$

где  $\Phi_\varepsilon(z)$  и  $g(z)$  – дробно-рациональные выражения с полюсами  $\{z_i\}$  и  $\{z_r\}$ , соответственно.

Тогда  $\varepsilon[k] = \sum_i \text{Res}_{z_i} \{\varepsilon(z)\} + \sum_r \text{Res}_{z_r} \{\varepsilon(z)\} = \varepsilon_n[k] + \varepsilon_b[k]$ , где  $\varepsilon_n[k]$  – переходная составляющая ошибки, зависящая от полюсов системы, а  $\varepsilon_b[k]$  – вынужденная составляющая ошибки, зависящая от полюсов входного воздействия.

## 8.2 Оценка качества переходных процессов в ЦСАР

Сравнительную оценку качества ПП в линейных ЦСАР производят по их реакциям на наиболее неблагоприятный (с точки зрения воспроизведения) вид задающего воздействия – внезапное (ступенчатое) единичной величины. Это либо переходная функция  $h[k]$ , либо – переходная составляющая сигнала ошибки  $\varepsilon_n[k]$ . При этом  $\varepsilon_n[k] = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k$ , которая в этом случае свя-

зана с переходной функцией  $h[k]$  формулой  $\varepsilon_n[k] = h[\infty] - h[k]$ . Рассматривая графики функций  $\varepsilon_n[k]$  и/или  $h[k]$  можно объективно охарактеризовать качество переходного процесса в ЦСАР.

Параметры графиков этих функций называются прямыми показателями качества переходного процесса (ПК ПП). Основными из них, как и для непрерывных систем, являются: а) *перерегулирование*  $\sigma(\%)$  и б) *время регулирования* (время переходного процесса)  $t_p$ .

- Перерегулирование  $\sigma$  определяется как *относительная* величина превышения первого максимума переходной функции  $h[k]$  над уровнем ее установившегося значения  $h[\infty]$  и характеризует склонность системы к колебаниям в переходном процессе (т.е. запас устойчивости системы относительно колебательной границы).

- Время регулирования  $t_p$  определяется как минимальный промежуток времени, за который переходная функция полностью входит в *пятипроцентную* зону от уровня установившегося значения. Этот показатель характеризует свойство системы реагировать на быстрые изменения входа, т.е. ее быстродействие.

Прямые показатели качества переходных процессов имеют простой и наглядный физический смысл, но зависимость их от параметров системы является очень сложной и плохо формализуемой. Причем для ДСУ эта зависимость будет существенно сложнее, чем для непрерывных систем. Поэтому при анализе и синтезе ДСУ чаще применяют другие, *косвенные* показатели, которые характеризуют аналогичные свойства системы, но более просты в определении и использовании. К косвенным показателям относят: а) корневые; б) суммарные и в) частотные.

а). *Корневые* ПК ПП для ДСУ можно формально определить так же, как для непрерывных систем, если рассматривать расположение характеристических корней системы не на плоскости  $z$ -переменной, а на плоскости комплексной переменной  $p$ . Сначала отметим некоторые особенности такого перехода.

Пусть известно характеристическое уравнение дискретной системы  $n$ -го порядка  $A(z)=0$  и его корни  $z_i$ . Тогда переходную (свободную) составляющую ошибки в предположении *некратных* характеристических корней  $z_i$  можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_n[k] = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k. \quad (8.1)$$

С учетом того, что  $z = e^{pT_0}$ , запишем характеристическое уравнение системы в виде  $A(e^{pT_0}) = A^*(p) = 0$ . Поскольку  $z = e^{pT_0}$  – это периодическая функция переменной  $p$  с перио-

дом  $j\omega = j2\pi/T_0$  в направлении мнимой оси, то «квазиполином»  $A^*(p)$  также будет периодической функцией с тем же периодом. Поэтому корни для  $A^*(p)$  будут располагаться периодически в *горизонтальных* полосах шириной  $\omega_0$ . Полоса, содержащая начало координат называется *главной*, а остальные полосы – *дополнительные*. Корню  $z_i$  соответствует не только корень  $p_i$  в основной полосе, но и корень  $p_{ir}$  в каждой дополнительной полосе с номером  $r$ :

$$p_{ir} = p_i + jr\omega_0; \quad r=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.2)$$

Вещественные части всех этих корней одинаковы, а мнимые отличаются на величины, кратные  $\omega_0$ . Для исследования свойств ДСУ достаточно рассматривать только *главный* период и соответствующую ему *главную* полосу с номером  $r=0$ , для которой  $|\operatorname{Im} p| \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0}$ .

Пусть  $p_i = \alpha_i + j\beta_i$  – характеристический корень в главной полосе, соответствующий корню  $z_i = \exp(p_i T_0)$ . Найдем выражения, связывающие  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  с модулем и аргументом корня  $z_i$ . Для этого запишем следующие очевидные соотношения:

$$z_i = |z_i| e^{j\varphi_i} = e^{(\alpha_i + j\beta_i)T_0} = e^{\alpha_i T_0} e^{j\beta_i T_0} \quad (8.3)$$

Тогда  $|z_i| = e^{\alpha_i T_0}$ ;  $\varphi_i = \beta_i T_0$ , откуда  $\alpha_i = \frac{\ln |z_i|}{T_0}$ ;  $\beta_i = \frac{\varphi_i}{T_0}$ .

Из этих формул следует, что корень  $z_i$  может быть различного типа:

- 1)  $\alpha_i < 0$ , если  $|z_i| < 1$  – устойчивый корень;
- 2)  $p_i = \alpha_i$ , если  $\varphi_i = 0$  – вещественный положительный корень,  $\varphi_i = 0$ ;
- 3)  $p_i = 0$ , если  $z_i = 1$  – положительный единичный корень;
- 4)  $p_i = \pm j\pi/T_0$ , если  $z_i = -1$  – отрицательный единичный корень;
- 5)  $p_i = \alpha_i \pm j\pi/T_0$ , если  $z_i = -a$  – вещественный отрицательный корень,  $\varphi_i = \pm\pi$ ;
- 6)  $p_i = -\infty$ , если  $z_i = 0$ , – корень в начале координат;
- 7)  $p_i = j\beta_i$ , если  $|z_i| = 1$  – корень на единичной окружности,  $\varphi_i \neq 0$ .

Основными корневыми ПК ПП, как и для непрерывных систем, являются следующие параметры области локализации (расположения) характеристических корней ДСУ в *левой части главной полосы* в плоскости  $p$ :

- а)  $\eta$  – наименьшее *расстояние* от корней  $p_i$  до мнимой оси;
- б)  $\mu = \operatorname{tg} \psi$ , где  $2\psi$  – наименьший угол при вершине углового сектора, содержащего все характеристические корни  $p_i$ .

Параметр  $\eta$  характеризует время затухания составляющей переходного процесса, соответствующей *самому близкому* к мнимой оси устойчивому корню  $p_i$ . Этому корню в  $z$ -плоскости соответствует устойчивый корень  $z_i = \exp(p_i T_0)$  с *наибольшим* значением модуля, а сама эта парциальная составляющая в (8.1) имеет вид

$$\varepsilon_{\text{ни}}[k] = C_i e^{p_i T_0 k} = e^{(-\eta + j\beta_i)T_0 k} = e^{-\eta T_0 k} e^{j\beta_i T_0 k} = C_i z_i^k.$$

Отсюда очевидно, что от параметра  $\eta$  зависит лишь время затухания процесса. Поэтому он является показателем *быстродействия*, хотя часто его называют *степенью устойчивости*. Зная величину *коэффициента быстродействия*  $\eta$  можно *приближенно* оценить время затухания до *пятипроцентного* уровня от начального значения переходной составляющей процесса, используя известную из теории непрерывных систем *приближенную* оценочную формулу. Для ДСУ она будет иметь следующий вид:  $t_p \approx \frac{3}{\eta} = \frac{3T_0}{\min_i |\ln |z_i||} = \max_i \frac{3T_0}{|\ln |z_i||}$ .

Параметр  $\mu = \operatorname{tg}(\psi) = \max_i \left| \frac{\varphi_i}{\ln |z_i|} \right|$  называют *коэффициентом колебательности* (не путать с

показателем колебательности  $M$ ). Он характеризует *запас устойчивости* ДСУ относительно колебательной границы. Если все корни  $p_i$  вещественные (запас устойчивости максимальный), то

$\mu = 0$ , а если среди  $p_i$  есть пара мнимых корней, то  $\mu = \infty$  и ДСУ находится на границе устойчивости. Для грубой оценки величины перерегулирования по коэффициенту колебательности  $\mu$  можно воспользоваться приближенной формулой  $\sigma(\%) \approx 100e^{-\frac{\pi}{\mu}}$ . Тогда при  $\mu=0$  перерегулирование  $\sigma=0$ , а для  $\mu=\infty$  величина  $\sigma=100\%$ .

б). Суммарные (дискретные аналоги интегральных) ПК ПП для ДСУ. Использование нескольких показателей качества переходных процессов (ПК ПП), часть из которых характеризует свойство быстродействия, а другие – запас устойчивости, неудобно для сравнительного анализа при выборе вариантов параметров регулятора в составе ДСУ. С этой точки зрения предпочтительнее использовать скалярный показатель (функционал качества), который бы одним числом позволял оценить свойства ДСУ в переходном процессе. В роли таких ПК ПП могут применяться суммы ординат некоторой функции от переходной составляющей ошибки  $\varepsilon_n[k]$  при ступенчатом входном сигнале.

В том случае, когда все ординаты  $\varepsilon_n[k] = h[\infty] - h[k]$  положительны, то для этой цели вполне пригодна линейная оценка  $J_1$ . Но если переходная составляющая ошибки  $\varepsilon_n[k]$  является знакопеременной функцией, то более объективной является квадратичная оценка  $J_2$ . Обе эти оценки являются дискретными аналогами интегральных оценок качества переходных процессов в непрерывных системах и определяются по следующим формулам [7]:

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_n[k] ; \quad J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_n^2[k]. \quad (8.4)$$

Иногда применяют обобщенную (улучшенную) квадратичную оценку  $J_3$ , учитывающую не только значения ошибки  $\varepsilon_n[k]$ , но и значения ординат первой разности от нее:

$$J_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \varepsilon_n^2[k] + (\tau \Delta \varepsilon_n[k-1])^2 \}. \quad (8.5)$$

Обычно параметры регулятора выбирают таким образом, чтобы обеспечить минимальные значения таких оценок. Для нахождения аналитических зависимостей этих оценок от параметров системы с передаточной функцией  $\Phi(z)$  удобно воспользоваться Z-изображением для  $\varepsilon_n[k]$ :

$$E_n(z) = Z\{ \varepsilon_n[k] \} = Z\{ h[\infty] - h[k] \} = \{ \Phi(1) - \Phi(z) \} / (1 - z^{-1}). \quad (8.6)$$

Это всегда будет дробно-рациональное выражение от  $z$  в виде отношения двух полиномов  $C(z) = c_0 + c_1 z^1 + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$  и  $D(z) = d_0 + d_1 z^1 + \dots + d_n z^n$ . Тогда можно применить следующие формулы для  $J_1$  и  $J_2$ :

$$J_1 = E_n(1); \quad n=1: J_2 = \frac{c_0^2}{d_1^2 - d_0^2}; \quad (8.7)$$

$$n=2: J_2 = \frac{(c_0^2 + c_1^2)d_2(d_0 + d_2) - 2c_0c_1d_2d_1}{[(d_2^2 - d_0^2)(d_0 + d_2) - (d_1d_2 - d_0d_1)d_1]d_2}. \quad (8.8)$$

Формула для  $J_1$  справедлива при любом  $n$  и следует непосредственно из выражения, определяющего Z-преобразование (в форме ряда!) для  $\varepsilon_n[k]$  при подстановке в него значения  $z=1$ , а выражения для  $J_2$  при конкретных значениях  $n=1$  и  $n=2$  получены с помощью формулы Парсеваля и «стандартного» табличного интеграла. При  $n>2$  выражения для  $J_2$  будут иметь существенно более сложный вид.

Значение  $J_2$  можно также определять по формулам табличного интеграла, применяемого для аналогичных целей в теории непрерывных систем управления при вычислении интегральных квадратичных оценок. Для этого следует воспользоваться  $D_w$ -изображением переходной со-

ставляющей ошибки  $E_n(w)$ , используя дробно-линейную подстановку  $z = \frac{1+w}{1-w}$  в выражении для  $E_n(z)$ . В общем случае формула для квадратичной суммарной оценки запишется следующим образом:

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} e_n^2[k] = \frac{1}{j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{E(w)E(-w)}{(1+w)(1-w)} dw.$$

Если записать выражение  $\frac{E_n(w)}{1+w} = \frac{c_0 + c_1w + \dots + c_mw^m}{d_0 + d_1w + \dots + d_nw^n}$ , то для заданной величины  $n$  зависи-

мость значения интеграла от коэффициентов числителя и знаменателя можно определить из справочной таблицы. Например, при  $n=3$  эта зависимость имеет вид

$$J_2 = \frac{c_2^2 d_0 d_3 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}.$$

При вычислении  $J_3$  дополнительно требуется еще знать  $Z$ -изображение для первой разности  $\Delta \varepsilon_n[k-1] = \nabla \varepsilon_n[k]$ , которое затем используется, как и в предыдущем случае, в формуле Парсеваля. Это изображение определяется формулой

$$Z\{\Delta \varepsilon_n[k-1]\} = Z\{\nabla \varepsilon_n[k]\} = \{\Phi(1) - \Phi(z)\}. \quad (8.9)$$

### 8.3. Анализ качества установившихся процессов в ЦСАР

Для сравнительной оценки качества работы различных вариантов ЦСАР в установившемся режиме рассматривают *вынужденную* составляющую ошибки (или функционал от нее) при воздействии на вход системы детерминированных (неслучайных) *типовых* дискретных сигналов. Такими сигналами могут быть [6, 7]:

А. Полиномиальный или степенной.

Б. Гармонический.

В. Медленноменяющийся сигнал с ограничением производных.

♦ В методах комплексной области наиболее удобен для применения только сигнал А).

А. *Оценка точности ДСУ при полиномиальных воздействиях.* Рассматривается ДСУ с передаточной функцией по ошибке  $\Phi_\varepsilon(z)$ . Типовое входное воздействие  $X[k]$  изменяется по закону

$X[k] = \sum_{i=0}^l a_i (kT_0)^i$ , где  $l$  – порядок сигнала. Для оценки точности воспроизведения такого сигнала в установившемся режиме используется *ряд ошибок*, представляющий собой разложение *вынужденной* составляющей ошибки  $\varepsilon_b[k]$  в ряд по прямым разностям входного сигнала:

$$\varepsilon_b[k] = C_0 X[k] + C_1 \Delta X[k] + C_2 \Delta^2 X[k] + \dots \quad (8.10)$$

Возможны также и другие формы записи ряда ошибок. Особенностью полиномиального воздействия  $l$ -го порядка является то, что разность  $l$ -го порядка является величиной *постоянной*, а все разности более высоких порядков будут тождественно равны нулю. Поэтому ряд ошибок будет конечным и содержит не более  $l+1$  слагаемых. Коэффициенты этого ряда  $C_i$  называются *коэффициентами ошибок*. Они равны коэффициентам разложения  $\Phi_\varepsilon(z)$  в ряд по степеням  $(z-1)$  и вычисляются через производные различных порядков от  $\Phi_\varepsilon(z)$  при значении

$z=1$ :  $C_i = \frac{\partial \Phi_\varepsilon^i(1)}{\partial z} \frac{1}{i!}$ . Чем меньше значения  $C_i$ , тем выше точность ДСУ. Если  $C_0=0$ , то ДСУ называется *статической*, а в противном случае – *астатической*. Порядок астатизма  $\nu$  равен *индексу* первого *не равного нулю* коэффициента ошибок. Так, например, если  $\nu=2$ , то  $C_0=C_1=0$ , а  $C_2 \neq 0$ .



Закон изменения во времени *вынужденной* составляющей ошибки зависит от соотношения порядка сигнала  $l$  и порядка астатизма  $\nu$ :

$$\varepsilon_b[k] = \begin{cases} 0, & \text{если } l < \nu; \\ \text{const}, & \text{если } l = \nu; \\ \text{полином порядка } l - \nu & \text{при } l > \nu. \end{cases} \quad (8.11)$$

Для структуры с единичной отрицательной обратной связью порядок астатизма  $\nu$  относительно задающего сигнала равен количеству множителей вида  $(z-1)$  в *знаменателе* передаточной функции разомкнутой системы, а первый *не равный нулю* коэффициент ошибки  $C_\nu$  равен обратной величине коэффициента усиления (добротности) разомкнутой системы. Это необходимо учитывать при синтезе ДСУ на этапе выбора коэффициента усиления.

Обсуждая вопрос точности в установившихся режимах, полезно отметить следующий очевидный, но малоизвестный результат [7, 9]. Вынужденная ошибка будет тождественно равна нулю, если знаменатель  $D(z)$  изображения входного сигнала  $X(z)=R(z)/D(z)$  будет являться сомножителем в составе числителя передаточной функции системы по ошибке. При этом среди полюсов ошибки  $E(z)$  не будет полюсов входного воздействия, а значит, не будет и вынужденной составляющей ошибки во временной области. Структурная схема системы при этом может быть произвольной. Фактически, такое свойство является обобщением понятия астатизма. В частности, оно справедливо для входного сигнала полиномиального вида, когда порядок сигнала  $l = \nu - 1$ . В этом случае  $z$ -изображение входного сигнала системы  $X(z) = R(z)/(z-1)^\nu$ . Тогда  $D(z) = (z-1)^\nu$  и согласно выражению (8.11) вынужденная составляющая ошибки  $\varepsilon_b[k]=0$ .

Для дискретных систем управления ряд ошибок в форме (8.10) не является единственным. Возможно также разложение вынужденной составляющей ошибки в ряд по обратным разностям входного дискретного сигнала:

$$\varepsilon_b[k] = C_0^\circ X[k] + C_1^\circ \nabla X[k] + C_2^\circ \nabla^2 X[k] + \dots,$$

где  $C_i^\circ$  определяются как коэффициенты разложения передаточной функции  $\Phi_\varepsilon(z)$  в ряд по степеням выражения  $(1-z^{-1})$ . Из свойств  $Z$ -преобразования известно, что умножение на такой множитель изображения  $X(z)$  соответствует применению оператора обратной разности  $\nabla$  во временной области к решетчатой функции времени  $X[k]$ . Для определения этих коэффициентов удобно в выражении для  $\Phi_\varepsilon(z)$  перейти к переменной  $s = 1-z^{-1}$ , а затем к функции  $\Phi_\varepsilon(s)$  применить формулу  $C_i^\circ = \frac{\partial \Phi_\varepsilon^i(0)}{\partial s} \frac{1}{i!}$ . Если сигнал  $X[k]$  получен из  $X(t)$  дискретизацией по времени при  $t = kT_0$ , то ряд ошибок для  $\varepsilon_b[k]$  целесообразно записывать относительно *производных* этого непрерывного сигнала в следующей форме:

$$\varepsilon_b[k] = C_0^* X[k] + C_1^* X'[k] + C_2^* X''[k] + \dots,$$

где коэффициенты ошибок  $C_i^*$  определяются по формуле  $C_i^* = \left. \frac{\partial \Phi_\varepsilon^*(p)}{\partial p} \frac{1}{i!} \right|_{p=0}$ .

Здесь  $\Phi_\varepsilon^*(p) = \Phi_\varepsilon(e^{pT_0})$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке, полученная из  $\Phi_\varepsilon(z)$  подстановкой  $z = e^{pT_0}$ .

#### 8.4. Комплексная область: Аналитические методы синтеза ЦСАР

В методах комплексной области возможны две разновидности аналитических методов синтеза ЦСАР: а) параметрический оптимальный синтез ЦСАР; б) неоптимальный синтез ПФ корректирующего звена.

### 8.4.1. Параметрический оптимальный синтез ЦСАР

В детерминированной постановке параметрическая оптимизация ЦСАР сводится к выбору «варьируемых» параметров таким образом, чтобы значение показателя (критерия) качества было минимальным. За критерий качества обычно принимают суммарные ПКПП, являющиеся дискретными аналогами интегральных ПКПП в теории непрерывных САР. Структурная схема ЦСАР фиксирована и вид ПФ ЛДДЗ в ее составе заданы с точностью до значений неопределенных параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . Если формулы зависимостей показателя качества  $J$  от параметров  $\{\alpha_i\}$  найдены, то искомые значения параметров определяются из необходимого условия экстремума функции  $J(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

За критерий качества может быть выбран, например, один из суммарных ПКПП (см. п.8.2):

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{\Pi}^2[k].$$

### 8.4.2. Аналитический метод неоптимального синтеза

Рассмотрим кратко только один из методов этой группы, в котором передаточная функция последовательного корректирующего звена  $W_k(z)$  определяется по результатам решения специально составленных *полиномиальных уравнений*. В литературе он известен как *метод порядковых отображений* [7].

Запишем передаточную функцию замкнутой ДСУ, расчетная схема которой показана на рис.8.1:

$$\Phi(z) = \frac{W_k(z)W_0(z)}{1 + W_k(z)W_0(z)}. \quad (8.12)$$

Здесь  $W_0(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  – передаточная функция *неизменяемой* части системы,  $W_k(z)$  – передаточная функция дискретного корректирующего устройства, определяющая закон управления.

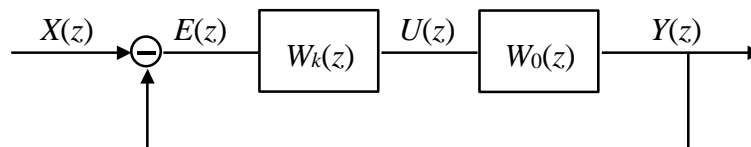


Рис. 8.1. Расчетная структурная схема ЦСАР

Предположим, что задана *желаемая* передаточная функция  $\Phi(z) = \Phi_{ж}(z)$ . Найдем из (8.12) соответствующую ей передаточную функцию  $W_k(z)$ :

$$W_k(z) = \frac{1}{W_0(z)} \frac{\Phi_{ж}(z)}{1 - \Phi_{ж}(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{\Phi_{ж}(z)}{1 - \Phi_{ж}(z)}. \quad (8.13)$$

Анализ этой формулы позволяет сделать следующие важные выводы:

1. *Разность порядков* знаменателя и числителя  $r_{ж} = n - m$  для  $\Phi_{ж}(z)$  должна быть не меньше такой же разности  $r_0 = n_0 - m_0$  для  $W_0(z)$ , т.е.  $r_{ж} \geq r_0$ . Иначе в  $W_k(z)$  порядок числителя окажется больше порядка знаменателя.

2. Функция  $\Phi_{ж}(z)$  должна среди своих нулей обязательно содержать все те корни полинома  $P(z)$ , которые расположены вне единичного круга, иначе они окажутся полюсами  $W_k(z)$  и при

неточной их реализации нарушится условие устойчивости замкнутой системы. Кроме того, неустойчивым будет и само корректирующее устройство.

3. Функция  $1-\Phi_{ж}(z)$  должна среди нулей обязательно содержать все те корни полинома  $Q(z)$ , которые по модулю больше единицы, иначе они окажутся нулями  $W_k(z)$  и при неточной их реализации замкнутая ДСУ окажется неустойчивой.

Перечисленные выше требования являются основными. *Первое* из них представляет собой условие осуществимости  $W_k(z)$ , а *второе* и *третье* – это условие «грубости» системы к малым вариациям параметров корректирующего устройства. Оно требует, чтобы передаточная функция  $W_k(z)$  не содержала нулей и полюсов, близких к тем полюсам и нулям передаточной функции неизменяемой части  $W_0(z)$ , которые по модулю больше единицы. Любые другие условия и ограничения будут дополнительными. В частности, это могут быть, например, требования заданного порядка астатизма, конечной длительности переходного процесса и др.

Сначала рассмотрим случай, когда числитель и знаменатель передаточной функции неизменяемой части  $W_0(z)$  содержат любые, в том числе и неминимально-фазовые множители, т.е. не все их корни принадлежат единичному кругу. Кроме того, для замкнутой системы не будем требовать выполнения каких-либо специальных свойств (порядок астатизма, конечная длительность переходного процесса и пр.), кроме физической осуществимости.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы  $\Phi_{ж}(z)$  в виде  $\Phi_{ж}(z)=B(z)/A(z)$ , где порядок числителя, по меньшей мере, на единицу меньше порядка знаменателя. Тогда передаточная функция системы по ошибке имеет вид

$$\Phi_e^*(z) = 1 - \Phi_{ж}(z) = \frac{A(z) - B(z)}{A(z)} = \frac{C(z)}{A(z)}. \quad (8.14)$$

При этом передаточная функция разомкнутой системы  $W(z)$  будет равна

$$W(z) = \frac{\Phi_{ж}(z)}{1 - \Phi_{ж}(z)} = \frac{B(z)}{C(z)}. \quad (8.15)$$

Если передаточная функция неизменяемой (заданной) части системы  $W_0(z)=P(z)/Q(z)$ , то передаточная функция последовательного корректирующего устройства определится выражением

$$W_k(z) = \frac{W(z)}{W_0(z)} = \frac{B(z) Q(z)}{C(z) P(z)}. \quad (8.16)$$

Потребуем сначала, чтобы числитель  $B(z)$  для  $\Phi_{ж}(z)$  содержал все нули, а числитель  $C(z)$  для  $\Phi_e^*(z)$  содержал все полюсы  $W_0(z)$ . Тогда корректирующее устройство с передаточной функцией  $W_k(z)=M(z)/N(z)$  не будет компенсировать (отсутствуют алгебраические сокращения) ни одного сомножителя в составе  $W_0(z)$  и при этом

$$B(z)=P(z)M(z); \quad C(z)=Q(z)N(z). \quad (8.17)$$

Пусть порядок характеристического полинома системы (знаменатель  $A(z)$  в выражении для  $\Phi_{ж}(z)$ ) равен  $n$ . Тогда условие физической осуществимости для передаточной функции  $\Phi_{ж}(z)$  запишется в следующем виде:

$$n_B = n_P + n_M \leq n - 1. \quad (8.18)$$

Но так как для  $\Phi_e^*(z)$  порядок числителя равен порядку знаменателя, то

$$n_C = n_Q + n_N = n. \quad (8.19)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае, когда  $W_k(z)$  не компенсирует ни одного множителя в передаточной функции  $W_0(z)$ , порядок замкнутой системы  $n \geq n_Q$ . Заметим также, что в соответствии с условием физической осуществимости для  $W_k(z)=M(z)/N(z)$ , разность порядков знаменателя и числителя для передаточной функции  $\Phi_{ж}(z)$  должна быть не меньше разности порядков знаменателя и числителя для  $W_0(z)$ , т.е.

$$n - n_B \geq n_Q - n_P. \quad (8.20)$$

Характеристический полином  $A(z)$  для замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью может быть получен как сумма полиномов числителя и знаменателя передаточной функции  $W(z)$ :

$$A(z) = P(z)M(z) + Q(z)N(z). \quad (8.21)$$

Полагая характеристический полином  $A(z)$  известным (*заданным*), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z$  в левой и правой частях равенства (8.21). В результате этого получим  $n+1$  уравнение относительно  $n_M+n_N+2$  неизвестных коэффициентов полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$ . Для математической разрешимости задачи, количество неизвестных коэффициентов в полученной системе уравнений должно быть *не меньше* количества коэффициентов в характеристическом полиноме  $A(z)$ , т.е. должно выполняться условие

$$n_M + n_N + 2 \geq n + 1 \quad \text{или} \quad n_M + n_N + 1 \geq n. \quad (8.22)$$

Подставляя сюда  $n$  из (8.18) и (6.19), получим соотношения для выбора порядков полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$ :

$$n_M \geq n_Q - 1; \quad n_N \geq n_P. \quad (8.23)$$

При известных порядках  $n_P$  и  $n_Q$ , значения  $n_M$  и  $n_N$  выбираются из неравенств (6.12), например, по их нижним границам, а порядок  $n$  характеристического полинома  $A(z)$  определяется далее по формуле (8.19) как  $n = n_Q + n_N$ .

Так, например, если  $n_Q=2$ ,  $n_P=1$ , то принимая  $n_M=1$  и  $n_N=1$ , получим  $n=3$ , а полиномы  $N(z)$  и  $M(z)$  отыскиваем в виде  $N(z) = n_0 + n_1z$ ;  $M(z) = m_0 + m_1z$ . После определения коэффициентов этих полиномов из полиномиального уравнения (6.10), получим искомую передаточную функцию корректирующего звена

$$W_k(z) = \frac{m_0 + m_1z}{n_0 + n_1z}. \quad (8.24)$$

Полученное решение обеспечивает системе свойство грубости и оставляет неизменными все нули не скорректированной системы и порядок ее астатизма, т.к.  $W_k(z)$  *не компенсирует* каких либо сомножителей в составе передаточной функции неизменяемой части системы. Порядок скорректированной системы при этом будет равен *сумме* порядков передаточных функций  $W_k(z)$  и  $W_0(z)$ . Свойства ДСУ в переходном режиме обеспечиваются выбором коэффициентов характеристического полинома  $A(z)$ , исходя, например, из желаемого расположения его корней или в соответствии с рекомендациями метода *стандартных коэффициентов*.

Обычно к системе, кроме условий физической реализуемости и грубости предъявляются еще и ряд других, дополнительных требований. Например, это может быть астатизм заданного порядка или конечная (минимальная) длительность переходного процесса. При этом должны учитываться специфические особенности динамических свойств неизменяемой части системы. Рассмотрим особенности процедуры динамического синтеза в этом случае.

Представим полиномы числителя и знаменателя  $P(z)$  и  $Q(z)$  в форме произведения *двух* множителей каждый:

$$P(z) = P_-(z)P_+(z); \quad Q(z) = Q_-(z)Q_+(z). \quad (8.25)$$

Множители, *отмеченные* знаком «-» учитывают те характерные особенности неизменяемой части, которые нельзя (или нежелательно) компенсировать корректирующим звеном. Они обязательно должны входить в состав полиномов  $B(z)$  и  $C(z)$  в числителях передаточных функций  $\Phi_{ж}(z)$  и  $1 - \Phi_{ж}(z)$ , аналогично тому, как это было сделано в предыдущем случае (см. (8.17)). Знаком «+» отмечены оставшиеся части выражений для  $P(z)$  и  $Q(z)$ . Эти множители подлежат компенсации и войдут соответствующим образом в числитель и знаменатель выражения для  $W_k(z)$ . Порядки каждого из множителей в (8.25) обозначим как  $n_{P-}$ ,  $n_{P+}$ ,  $n_{Q-}$ ,  $n_{Q+}$ .

Тогда формулы, аналогичные (8.17)–(8.23) запишутся в следующем виде

$$B(z) = P_-(z)M_1(z); \quad C(z) = Q_-(z)N_1(z). \quad (8.26)$$

$$n_B = n_{P_-} + n_{M_1} \leq n - 1. \quad (8.27)$$

$$n_C = n_{Q_-} + n_{N_1} = n. \quad (8.28)$$

$$A(z) = P_-(z)M_1(z) + Q_-(z)N_1(z). \quad (8.29)$$

$$n_{M_1} + n_{N_1} + 1 \geq n. \quad (8.30)$$

$$n_{M_1} \geq n_{Q_-} - 1; \quad n_{N_1} \geq n_{P_-}. \quad (8.31)$$

Определим передаточную функцию корректирующего звена для этого случая:

$$W_k(z) = \frac{B(z) Q(z)}{C(z) P(z)} = \frac{P_-(z)M_1(z) Q_-(z)Q_+(z)}{Q_-(z)N_1(z) P_-(z)P_+(z)} = \frac{Q_+(z)M_1(z)}{P_+(z)N_1(z)}. \quad (8.32)$$

Если необходимо обеспечить переходный процесс *конечной длительности*, то характеристический полином в (8.29) выбирается в виде  $A(z)=z^n$ . При этом ДСУ будет иметь бесконечную степень устойчивости.

Если не скорректированная система уже имеет порядок астатизма  $\nu_1$ , то полином  $Q^-(z)$  следует записать в виде  $Q^-(z) = Q_{1-}(z)(z-1)^{\nu_1}$ .

Если скорректированная систем должна иметь порядок астатизма  $\nu_0 > \nu_1$ , то необходимо принять  $N_1(z) = (z-1)^{\nu_0 - \nu_1} N_2(z)$ . Тогда передаточная функция корректирующего звена в соответствии с (8.32) примет вид:

$$W_k(z) = \frac{Q_+(z) M_1(z)}{P_+(z) N_1(z)} = \frac{Q_+(z) M_1(z)}{P_+(z) (z-1)^{\nu_0 - \nu_1} N_2(z)}. \quad (8.33)$$

Эта формула остается справедливой и в том случае, когда исходная система была статической ( $\nu_1=0$ ).

**Пример 8.1.** Рассмотрим ДСУ, для которой передаточная функция неизменяемой части  $W_0(z)$  (см. рис. 8.1) имеет вид:

$$W_0(z) = \frac{1,84(z + 0,718)}{(z-1)(z-0,368)}.$$

Здесь  $P(z) = 1,84(z + 0,718)$ ;  $Q(z) = (z-1)(z-0,368)$ .

Требуется определить передаточную функцию корректирующего устройства так, чтобы ДСУ имела порядок астатизма  $\nu_0=1$  и конечную длительность переходного процесса.

*Решение.* В соответствии с описанным выше методом порядковых отображений, назначим

$$P_-(z) = P(z) = 1,84(z + 0,718); \quad P_+(z) = 1; \quad Q_-(z) = (z-1); \quad Q_+(z) = z - 0,368.$$

Тогда  $n_{P_-} = 1$ ;  $n_{Q_-} = 1$ ;  $n_{M_1} = 0$ ;  $n_{N_1} = 1$ ;  $n = n_{Q_-} + n_{N_1} = 2$ .

Неизвестные полиномы  $M_1(z)$  и  $N_1(z)$  будем искать в следующем виде  $M_1(z)=m_0$ ;  $N_1(z)=n_0 + n_1z$ .

Подставим их в уравнение (6.18), в котором полагаем  $A(z)=z^2$ .

В этом случае уравнение  $A(z) = P_-(z)M_1(z) + Q_-(z)N_1(z)$  запишется так:

$$z^2 = 1,84(z + 0,718)m_0 + (z-1)(n_0+n_1z).$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z$  в левой и правой частях этого равенства, получим следующие три уравнения относительно неизвестных коэффициентов  $m_0, n_0, n_1$ :

$$\text{а) } 1,84 \cdot 0,718 m_0 - n_1 + n_0 = 0; \quad \text{б) } 1,32 m_0 - n_0 = 0; \quad \text{в) } n_1 = 1.$$

Отсюда находим значения  $m_0 = 0,316$ ;  $n_0 = 0,418$ ;  $n_1 = 1$ . Следовательно

$$W_k(z) = \frac{Q_+(z) M_1(z)}{P_+(z) N_1(z)} = \frac{0,316(z-0,368)}{z+0,418}.$$

При этом передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi_{ж}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{P_-(z)M_1(z)}{A(z)} = \frac{0,582(z+0,718)}{z^2} = 0,582z^{-1} + 0,418z^{-2}.$$

Соответствующая ей весовая функция скорректированной системы будет равна нулю при значениях  $k > 2$ , что свидетельствует о конечной длительности процесса.

## Лекция №9

### Тема: «Спектры сигналов и частотные характеристики ЛДДЗ»

#### Предварительные замечания

Методы временной и комплексной областей основаны на применении формул, уравнений и других аналитических выражений и их преобразований. Они совершенно не используют графическую форму представления информации, которая традиционно используется в инженерной деятельности и положена в основу «ручных» методов расчета. Этим «недостатком» нет у методов частотной области, в которых используются графики частотных спектров сигналов и частотных характеристик динамических звеньев и их соединений. Они позволяют исследовать основные свойства как непрерывных, так и дискретных линейных САР, а также решать задачи расчета (синтеза) корректирующих звеньев, обеспечивающих выполнение требований к динамическим свойствам САР и ряду других ограничений.

В этих методах вместо функций времени и их изображений Лапласа рассматриваются соответствующие им графики частотных (и псевдочастотных) спектров, а вместо операторов преобразования и передаточных функций – графики частотных передаточных функций и характеристик. Переход к псевдочастоте  $\lambda$  (от частоты  $\omega$ ) позволяет эффективно применять логарифмические характеристики для синтеза корректирующих звеньев столь же просто, как и для непрерывных САР.

#### 9.1 Частотные спектры дискретных сигналов и частотные характеристики ЛДДЗ

Рассмотрим ЛДДЗ, которое преобразует входной дискретный сигнал  $f[k]$  в выходной  $y[k]$  в соответствии с математическим правилом – оператором звена  $A_r$ :

$$y[k] = A_r\{f[k]\} = w[k] \otimes f[k], \quad (9.1)$$

где  $w[k]$  – весовая функция звена.

Применив к (9.1) разные виды дискретных операционных преобразований, получим связь соответствующих изображений в комплексной области с помощью передаточных функций.

Описание этих преобразований в комплексной области имеет вид:

$$a) y(z) = W(z)f(z); \quad б) y(e^{pT_0}) = W(e^{pT_0})f(e^{pT_0}) \text{ или } y^*(p) = W^*(p)f^*(p); \quad в) y(u) = W(u)f(u).$$

Аналогично непрерывному случаю, подстановкой  $p=j\omega$  в  $y^*(p) = W^*(p)f^*(p)$ , получим

$$y^*(j\omega) = W^*(j\omega)f^*(j\omega), \quad (9.2)$$

где  $f^*(j\omega)$  и  $y^*(j\omega)$  – комплексные спектры входного и выходного сигналов соответственно;

$W^*(j\omega)$  – частотная передаточная функция ЛДДЗ, которая устанавливает связь комплексных спектров входного и выходного сигналов.

Формально, комплексный спектр решетчатого сигнала – это одностороннее дискретное преобразование Фурье, получаемое из  $D_p$ -преобразования подстановкой  $p=j\omega$ , где  $\omega$  – вещественная переменная, которой придают смысл угловой частоты гармонических колебаний.

Любое комплексное  $X^*(j\omega)$ , зависящее от  $\omega$ , можно записать в показательной форме:

$$X^*(j\omega) = M^*_x(\omega)e^{-j\varphi^*_x(\omega)},$$

где  $M^*_x(\omega) = \text{Mod}(X^*(j\omega))$  – модуль, а  $\varphi^*_x(\omega) = \text{Arg}(X^*(j\omega))$  – аргумент комплексного числа.

Графики зависимостей  $M^*_x(\omega)$  и  $\varphi^*_x(\omega)$  называются, соответственно амплитудным и фазовым частотным спектром дискретного сигнала  $x[k]$ . Тогда из (9.2) следуют два равенства:

$$M^*_y(\omega)/M^*_f(\omega) = \text{Mod}(W^*(j\omega)) = M^*(\omega) \text{ – амплитудно-частотная характеристика ЛДДЗ,}$$

$$\varphi^*_y(\omega) - \varphi^*_f(\omega) = \text{Arg}(W^*(j\omega)) = \varphi^*(\omega) \text{ – фазо-частотная характеристика ЛДДЗ.}$$

♦ Из свойства периодичности функций  $e^{pT_0}$  и  $X^*(p)$  с периодом  $j2\pi/T_0$  непосредственно следуют свойства периодичности графиков спектров дискретных сигналов и всех частотных характеристик ЛДДЗ от частоты с периодом  $\omega_0=2\pi/T_0$ . Это создает большие неудобства при их рассмотрении и использовании при расчетах. Кроме того, теряет смысл применения логарифмического масштаба по оси частот и соответствующих логарифмических частотных амплитудных и фазовых частотных характеристик. Однако известно, что свойства периодических функций полностью проявляются на любом периоде (например, на главном, когда  $-\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2$ ). Кроме того, поскольку амплитудные спектры и АЧХ являются четными, а фазовые частотные спектры и ФЧХ – нечетные функции частоты  $\omega$ , то можно ограничиться только неотрицательной частью главного периода:  $0 \leq \omega \leq \omega_0/2 = \pi/T_0$ .

Известно, что спектры непрерывных сигналов непериодические. А чтобы сделать частотные методы исследования дискретных систем формально похожими на методы непрерывной теории, целесообразно и удобно главный период изменения  $\omega$  отобразить (преобразовать) в бесконечный интервал изменения новой абстрактной вещественной переменной  $\lambda$ :  $-\infty \leq \lambda \leq \infty$ .

При этом желательно, чтобы это преобразование обладало следующими свойствами:

- а)  $\omega = 0 \rightarrow \lambda = 0$ ;    б)  $\omega = \pi/T_0 \rightarrow \lambda = \infty$ ;    в)  $0 < \omega < 2/T_0 \rightarrow \omega \approx \lambda$ .

Перечисленным свойствам вполне удовлетворяет тригонометрическое преобразование с помощью функции тангенса:

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}. \quad (9.3)$$

Переменную  $\lambda$  в этом случае называют *абсолютной псевдочастотой* (далее, для краткости, – *псевдочастотой*). Она, в отличие от  $\omega$ , не имеет физического смысла, но при расчетах дискретных систем формально выполняет точно такую же роль, как и  $\omega$ . Примерный вид графика зависимости  $\lambda$  от  $\omega$  изображен на рис. 9.1.

Построенные в зависимости от  $\lg(\lambda)$  графики  $L_w(\lambda) = 20 \lg |W(j\lambda)|$  и  $\varphi_w(\lambda) = \arg(W(j\lambda))$  (псевдочастотные ЛАХ и ЛФХ) формально будут похожи на аналогичные логарифмические частотные характеристики для непрерывных звеньев. В частности, точно так же будут проявляться их асимптотические свойства.

Перестроение графиков с использованием формулы (9.3) выполняют только в тех случаях, когда графики  $M^*(\omega)$  и  $\varphi^*(\omega)$  уже получены, например, по результатам экспериментов или компьютерных расчетов. При ручных построениях асимптотических логарифмических псевдочастотных характеристик (ЛПЧХ) такой подход нецелесообразен ввиду его трудоемкости.

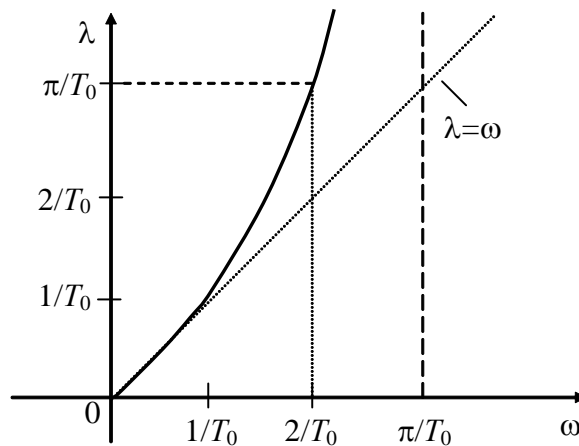


Рис. 9.1. Связь частоты  $\omega$  и псевдочастоты  $\lambda$



Более удобным является построение ЛПЧХ по преобразованной (с помощью  $D_u$ -преобразования) передаточной функции  $W(u)$ . Легко показать, что в этом случае при подстановке  $u = j\lambda$  и  $p = j\omega$  между переменными  $\omega$  и  $\lambda$  будет иметь место соотношение (9.3).

Для этого воспользуемся формулами взаимосвязи переменных  $z$ ,  $p$  и  $u$ :

$$z = e^{pT_0} = \frac{2 + uT_0}{2 - uT_0}. \quad (9.4)$$

Подставляя сюда значения этих переменных, которые используются при построении частотных ( $p = j\omega$ ) и псевдочастотных ( $u = j\lambda$ ) характеристик, получим зависимости между  $\omega$  и  $\lambda$ :

$$z = e^{j\omega T_0} = \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0} = e^{j2 \arctg \frac{\lambda T_0}{2}} \Rightarrow \omega = \frac{2}{T_0} \arctg \frac{\lambda T_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}. \quad (9.5)$$

Отсюда следует, что последняя из приведенных здесь зависимостей дает нам искомую связь псевдочастоты  $\lambda$  и частоты  $\omega$ . В том случае, когда известна передаточная функция  $W(z)$ , то расчет и построение ЛПЧХ целесообразно проводить в следующей последовательности:

а) с помощью подстановки (9.4) определяется *преобразованная* передаточная функция  $W(u)$ . Для упрощения последующих действий рекомендуется предварительно представить выражение для  $W(z)$  в виде произведения возможно более простых сомножителей;

б) передаточная функция  $W(u)$  представляется в форме произведения типовых множителей *стандартного* вида:  $K$ ;  $u^{\pm 1}$ ;  $(1 \pm uT)^{\pm 1}$ ;  $(1 \pm 2\xi Tu + u^2 T^2)^{\pm 1}$ ;

в) логарифмические псевдочастотные характеристики (ЛПЧХ) ЛДДЗ строятся по методике, разработанной для непрерывных динамических систем и звеньев. При этом формальное отличие состоит только в обозначениях переменных: вместо  $p \rightarrow u$ , а вместо  $\omega \rightarrow \lambda$ .

Отметим некоторые специфические особенности ЛПЧХ, которые позволяют контролировать правильность их построения:

1) Если порядок знаменателя  $W(z)$  выше порядка ее числителя, то в выражении для  $W(u)$  *обязательно* появятся множители вида  $(1 - 0,5uT_0)$ , соответствующие неминимально-фазовым звеньям. Они будут вносить отрицательные фазовые сдвиги, аналогично устойчивым апериодическим звеньям первого порядка.

2) Если  $z = -1$  не является нулем или полюсом  $W(z)$ , то высокочастотная асимптота ПЧЛАХ располагается горизонтально на уровне  $20 \lg |W(-1)|$ , а фазовая характеристика стремится к уровню, кратному  $-\pi$ .

**Пример 9.1.** Пусть  $W(z) = \frac{KT_0}{z-1}$ . Тогда  $W(u) = \frac{K(1-0,5uT_0)}{u}$ , а соответствующие ЛПЧХ можно строить, как суммы логарифмических псевдочастотных характеристик, построенных для безынерционного, интегрирующего и неминимально-фазового форсирующего звена первого порядка (рис. 9.2).

Псевдочастотные характеристики (ПЧХ) широко используются для решения различных задач анализа и синтеза линейных ДСУ, например:

а) определение амплитудных и фазовых искажений, вносимых отдельными ЛДДЗ или их соединениями;

б) анализ устойчивости и показателей качества регулирования для структур с обратными связями;

в) синтез корректирующих звеньев по заданным требованиям к запасам устойчивости, быстродействию и точности ДСУ.

С переходом к псевдочастоте  $\lambda$ , методы решения перечисленных выше задач (при известном  $T_0$ ) по форме мало отличаются от соответствующих методов теории непрерывных систем. Возможные особенности, как правило, связаны с наличием неминимально-фазовых множителей в формулах для  $W(u)$  ЛДДЗ, частоты сопряжения которых непосредственно связаны с величиной периодом дискретности  $T_0$ .

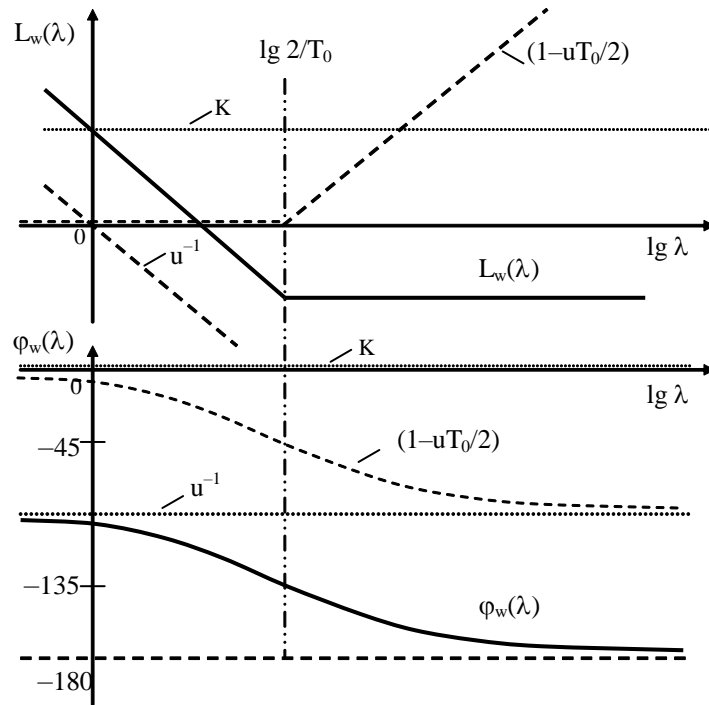


Рис. 9.2. Пример построения ЛПЧХ

## 9.2 Частотные характеристики ДЗ ПНЧ

Частотные методы анализа и синтеза линейных ДСУ используются столь же широко, как и для непрерывных систем. При этом необходимо уметь рассчитывать те или иные частотные характеристики (ЧХ) для всех звеньев *расчетной* схемы ДСУ, и *в первую очередь* – для дискретного звена приведенной непрерывной части ДЗ ПНЧ. Метод их расчета существенно зависит от типа частотных характеристик и от вида исходных данных. В связи с этим рассмотрим несколько характерных случаев.

◆ При известной передаточной функции  $W(z)$  для ДЗ ПНЧ расчет любых ЧХ осуществляется точно так же, как и для всех других дискретных звеньев в составе расчетной схемы. Напомним, что при расчете *обычных* частотных характеристик по передаточной функции  $W(z)$  используется подстановка  $z = e^{j\omega T_0}$ , где переменная  $\omega$  имеет физический смысл циклической частоты гармонических колебаний, назначаемая из диапазона  $[0; \pi/T_0]$ . Вне этого диапазона частотные характеристики можно продолжить с учетом свойств «четности-нечетности» и периодичности, но такой необходимости, как правило, не возникает. Ввиду сложной зависимости модуля и аргумента частотной передаточной функции  $W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T_0})$  от переменной  $\omega$ , такой метод при «ручных» расчетах не используется.

◆ Если для ДЗ ПНЧ известны матричные коэффициенты уравнений состояния **A**, **B**, **C**, **D**, определенные, например, по формулам (7.33), (7.34), то расчет частотных характеристик следует выполнять, используя формулу

$$W^*(j\omega) = C[e^{j\omega T_0} \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (9.6)$$

♦ В том случае, когда передаточная функция  $W(z)$  и матричные коэффициенты  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  неизвестны, или их определение затруднено, то для компьютерных расчетов удобно воспользоваться следующей формулой:

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{пнч}}(j(\omega - r \frac{2\pi}{T_0})), \quad (9.7)$$

которая связывает частотные передаточные функции (т.е. комплексные спектры весовых функций) ДЗ ПНЧ и ПНЧ. Здесь  $W_{\text{пнч}}(p) = S(p)W_{\text{нч}}(p)$  – передаточная функция приведенной непрерывной части, где  $S(p)$  – изображение Лапласа для функции формы импульса  $S(t)$ . В частности, если формирователь импульсов является фиксатором ( $\Phi И = \Phi_0$ ), то  $S(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p}$ .

Число слагаемых, учитываемых в формуле (3.60), определяет точность получаемого результата. Для непрерывной части НЧ с явно выраженными инерционными свойствами этот ряд быстро сходится и достаточно высокая точность достигается уже при  $|r| \approx 6 \div 7$ .

При расчетах ДСУ от частоты  $\omega$  обычно переходят к псевдочастоте  $\lambda$ . Получаемые при этом псевдочастотные характеристики можно определять различными способами. Напомним кратко смысл основных из них:

а) используется подстановка  $u = j\lambda$  в выражение для преобразованной передаточной функции  $W(u)$ .

б) используется подстановка  $z = \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0}$  в выражение (7.24) для  $W(z)$ :

$$W(j\lambda) = \mathbf{C} \left[ \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (9.8)$$

в) используется формула пересчета значений аргумента  $\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}$  при *перестроении*

графиков АЧХ и ФЧХ. В результате этого из графиков зависимостей  $M^*(\omega)$  и  $\varphi^*(\omega)$  получают графики для  $M(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$ .

Если требуется построить *асимптотические* ПЧЛХ для ДЗ ПНЧ, то сначала следует получить преобразованную передаточную функцию  $W(u)$  и представить ее в виде произведения элементарных множителей стандартного вида, совпадающих (с точностью до обозначения переменной) с передаточными функциями типовых звеньев, изучаемых в теории непрерывных систем. При «ручных» расчетах при переходе от  $W(z)$  к  $W(u)$  с помощью дробно-линейной подстановки, для упрощения аналитических преобразований *рекомендуется*  $W(z)$  представлять в виде произведения более простых выражений, а затем выполнять такие подстановки в каждом множителе отдельно. Далее может быть использована стандартная методика построения *асимптотических* характеристик.

Если передаточная функция непрерывной части  $W_{\text{нч}}(p)$  имеет высокий порядок, то получение соответствующих передаточных функций  $W(z)$  и  $W(u)$  для ДЗ ПНЧ «ручным» методом может оказаться трудноразрешимой проблемой даже тогда, когда  $\Phi И = \Phi_0$ . Именно для этого случая был разработан и долгое время успешно *применялся приближенный* метод построения логарифмических псевдочастотных характеристик (ЛПЧХ) для ДЗ ПНЧ, основанный на идеях *обособленного*  $D_u$ -преобразования [6, 9]. Несмотря на то, что в наше «компьютеризированное» время этот метод почти не используется, его методологическая значимость остается весьма важной. Более того, с его помощью иногда удается обнаружить грубые ошибки компьютерных расчетов при построении ЛПЧХ ДЗ ПНЧ.

Метод применим тогда, когда НЧ является инерционной, а шаг дискретизации  $T_0$  достаточно мал. В этом случае существует некоторый диапазон частот  $0 \div \omega_{\text{п}}$ , в котором  $\omega \approx \lambda$ , а ча-

стотные характеристики дискретного звена и непрерывной части в этом диапазоне также примерно одинаковы:  $W^*(j\omega) \approx W_{\text{нч}}(j\omega)$ . При этом величина  $\omega_{\text{п}}$  обязательно должна удовлетворять условию Котельникова-Шеннона  $\omega_{\text{п}} < \pi/T_0$  и часто принимается равной  $2/T_0$ .

Согласно методу обособленного  $D_u$ -преобразования, логарифмические псевдочастотные характеристики для ДЗ ПНЧ с фиксатором  $\Phi_0$  строятся *раздельно* для низкочастотного (I) и высокочастотного (II) диапазонов. При этом за границу диапазонов принимается частота  $\omega_{\text{п}}$ .

Для построения ЛПЧХ в этих диапазонах используются две различные приближенные формулы:

I. При построении ЛПЧХ в *первом* (низкочастотном) диапазоне, где выполняется условие  $\lambda \approx \omega < \omega_{\text{п}}$ , используется *приближенное* выражение для преобразованной передаточной функции ДЗ ПНЧ

$$W(u) \approx W_{\text{нч}}(u). \quad (9.9)$$

Очевидно, что для этого частотного диапазона ЛЧХ непрерывной части и ПЧЛХ ДЗ ПНЧ, построенные на совмещенной плоскости с общей осью  $\lg(\lambda)$  и  $\lg(\omega)$  будут совпадать.

II. Для расчета и построения ЛПЧХ во *втором* (высокочастотном) диапазоне при значениях  $\lambda > \omega_{\text{п}}$  используется другое приближенное равенство:

$$W(u) \approx \tilde{D}_u \left\{ \frac{K_x}{p^v} W_B(p) \right\}, \quad (9.10)$$

где  $v$  – это коэффициент кратности наклона "среднечастотной" *асимптоты* ЛАХ для  $W_{\text{нч}}(p)$  на частоте  $\omega = \omega_{\text{п}}$ ;  $K_x = 10^{L_x/20}$ , где  $L_x$  – ордината точки пересечения "средней" асимптоты с вертикальной осью координат плоскости ЛАХ;  $W_B(p)$  – часть выражения для  $W_{\text{нч}}(p)$ , содержащая "малые" постоянные времени, для которых частоты сопряжения *больше*, чем  $\omega_{\text{п}}$ . При этом предполагается, что формула для  $W_B(p)$  имеет вид произведения множителей, соответствующих аperiодическим и форсирующим звеньям первого порядка.

Выбор величины  $\omega_{\text{п}}$  является неоднозначным и противоречивым: чем меньше значение этой частоты, тем точнее будет приближенное выражение (9.10), но тем сложнее окажется процедура определения  $\tilde{D}_u$ -изображения в этой формуле и наоборот, чем больше величина  $\omega_{\text{п}}$ , тем проще решается эта проблема ценой снижения точности получаемого решения.

Справедливость приближенного равенства (9.9) вытекает из следующих рассуждений. В соответствии с (3.60), для частотной передаточной функции ДЗ ПНЧ можно записать выражение

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{ПНЧ}}(j(\omega - r \frac{2\pi}{T_0})). \quad (9.11)$$

Если частота среза для ПНЧ меньше величины  $\omega_0/2 = \pi/T_0$ , то спектры соседних слагаемых в этой сумме «слабо» перекрываются и поэтому при рассмотрении частотных характеристик ДЗ ПНЧ в полосе частот  $0 \div \omega_{\text{п}} < 2/T_0$  можно ограничиться единственным слагаемым, соответствующим  $r = 0$ . А так как *при этом* частотная передаточная функция фиксатора

$W_{\Phi_0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_0}}{j\omega} \approx T_0$ , то с учетом  $\lambda \approx \omega < \omega_{\text{п}}$ , получим  $W(j\lambda) \approx W_{\text{нч}}(j\lambda)$ . Это соответствует выражению (9.9) при  $u = j\lambda$ .

В ряде случаев более удобна *модификация* метода обособленного преобразования, в которой низкочастотная часть ЛПЧХ (до значения псевдочастоты  $\lambda = 2/T_0$ ) строится точно так же, как и в основном методе (т.е. совпадает с ЛЧХ непрерывной части), а высокочастотная часть (при  $\lambda > 2/T_0$ ) строится приближенно более простым способом. При этом предполагается, что непрерывная часть либо не содержит колебательных и форсирующих звеньев, либо их частоты

ты сопряжения  $\omega_{ci}$  принадлежат низкочастотной области, а соответствующие им постоянные времени  $T_i > T_0/2$ .

Обычно в этой модификации метода рассматривают следующие два распространенных на практике случая:

а) на частоте  $\omega = 2/T_0$  асимптотическая ЛАХ НЧ имеет наклон  $-20$  дБ/дек. Тогда для построения ЛПЧХ во втором (высокочастотном) диапазоне вместо (3.63) используется формула

$$W(u) = \frac{K_x (1 - u \frac{T_0}{2})(1 + u(\frac{T_0}{2} - T_\Sigma))}{u(1 + u \frac{T_0}{2})}; \quad (9.12)$$

б) при  $\omega = 2/T_0$  асимптотическая ЛАХ НЧ имеет наклон  $-40$  дБ/дек. Тогда для тех же целей (ВЧ диапазон) формула для  $W(u)$  принимается в виде:

$$W(u) = \frac{K_x (1 - u \frac{T_0}{2})(1 - u T_\Sigma)}{u^2}. \quad (9.13)$$

В этих приближенных формулах  $T_\Sigma$  – это сумма тех "малых" постоянных времени в знаменателе  $W_{нч}(p)$ , значения которых меньше величины  $T_0/2$ .

### 9.3. Связь спектров дискретных и непрерывных сигналов.

#### Условия их информационной эквивалентности

В тех случаях, когда дискретный сигнал  $f[k]$  получен дискретизацией по времени с шагом  $T_0$  непрерывного сигнала  $f(t)$ , то в соответствии с формулой (7.4) связь их комплексных спектров имеет следующий вид [6]:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - r\omega_0)). \quad (9.14)$$

Из этой формулы следует, что спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя  $1/T_0$  равен бесконечной сумме спектров непрерывного сигнала, *смещенных* по оси частот на величины, кратные частоте дискретизации  $\omega_0$ .

Характерной особенностью спектров дискретных сигналов является их периодическая зависимость от частоты  $\omega$  с периодом  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Это следует из свойства периодичности выражения

$e^{j\omega T_0}$  и из формулы (9.14). При этом амплитудные спектры являются четными, а фазовые – нечетными функциями частоты  $\omega$ . Типичный их вид показан на рис. 9.3. С учетом этого, спектры дискретных сигналов можно рассматривать только на половине *главного периода*, т.е. при  $\omega \in [0, \frac{\omega_0}{2}]$ .

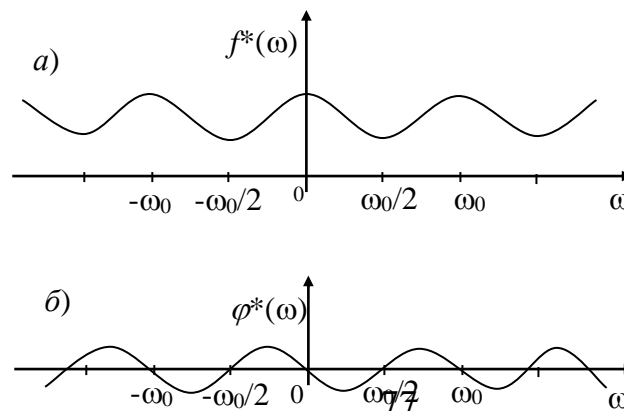


Рис. 9.3. Спектры дискретного сигнала

При изучении связи спектров дискретного и непрерывного сигналов существенное значение имеет соотношение граничной частоты спектра непрерывного сигнала  $\omega_s$  и частоты дискретизации  $\omega_0$ .

В том случае, когда выполняется следующее условие для этих частот

$$\omega_s \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0}, \quad (9.15)$$

то спектры соседних слагаемых в формуле (9.14) не перекрываются по частотным диапазонам и поэтому на главном периоде, где  $\omega \in \left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$ , будет выполняться *точное* равенство следующего вида

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} F(j\omega). \quad (9.16)$$

При этом дискретный и непрерывный сигналы будут эквивалентны в смысле содержащейся в них информации. Только в этом случае с помощью *идеального полосового фильтра нижних частот (ИФ)* из спектра дискретного сигнала  $f[k]$  можно, удалив (отфильтровав) все его высокочастотные составляющие, *точно* восстановить непрерывный сигнал  $f(t)$ . Поэтому неравенство (9.15) называют условием *информационной эквивалентности* Котельникова–Шеннона, которое играет важную роль в теории передачи сигналов и в теории информации. Картинки амплитудных спектров для трех отдельных слагаемых в этом случае показаны на рис. 9.3. Там же изображена амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра  $M_{\text{ИФ}}(\omega)$ .

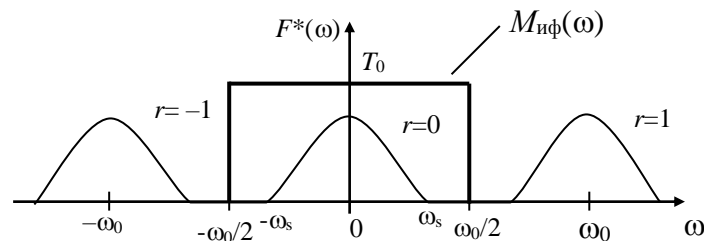


Рис. 9.3. Условие информационной эквивалентности

Из сказанного выше следует, что если  $T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_s}$ , то последовательное соединение ключа, выполняющего дискретизацию сигнала по времени, и идеального фильтра нижних частот (ИФ), выполняющего функцию восстановления сигнала, эквивалентно безынерционному звену с коэффициентом передачи  $K_{\text{и}}=1$  (рис. 9.4).

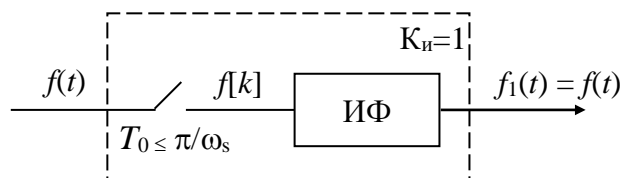


Рис. 9.4. Точное восстановление сигнала

Во всех других случаях, когда условие (9.15) не выполняется, спектры соседних слагаемых в (9.14) при  $r = 0, \pm 1, \pm 2$  и т.д. будут перекрываться по частотным диапазонам. В результате

этого на главном периоде изменения частоты, где  $\omega \in \left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$ , равенство (9.16) не выполняется. Тогда даже с помощью идеального фильтра ИФ *принципиально невозможно* точно восстановить непрерывный сигнал и  $f_1(t) \neq f(t)$ . Иначе, *невыполнение* условия Котельникова–Шеннона при дискретизации непрерывного сигнала по времени приводит к *невозполнимой* потере информации, которая будет тем существеннее, чем больше значение периода дискретности  $T_0$ . Картинки амплитудных спектров дискретного сигнала и отдельных его слагаемых в формуле (9.14) для этого случая показаны на рис. 9.5. Именно такая ситуация имеет место в действительности, так как граничная частота спектра  $\omega_s$  для непрерывного сигнала *теоретически* не ограничена, т.е. равна бесконечности. Практически  $\omega_s$  назначается как граница *полосы существенных частот*, содержащей основную, например, 95%-ную долю энергии сигнала  $f(t)$ .

Восстановить точно непрерывную производящую функцию  $f(t)$  из дискретного сигнала  $f[k]$  невозможно и по другой причине: идеальный фильтр нижних частот ИФ относится к физически нереализуемым звеньям, т.к. его весовая функция  $w_{\text{иф}}(t) \neq 0$  при  $t < 0$ .

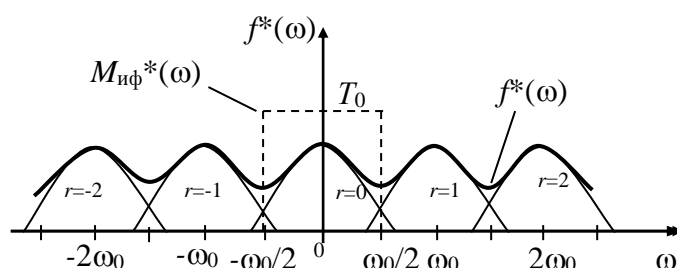


Рис. 9.5. Условие восстановления не выполнено

Чтобы убедиться в этом, запишем формулу частотной передаточной функции ИФ и определим соответствующую ей весовую функцию как обратное преобразование Фурье.

$$W_{\text{иф}}(j\omega) = \begin{cases} T_0, & -\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}; \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_0}{2}. \end{cases} \quad (9.17)$$

$$w_{\text{иф}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{иф}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} T_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{\omega_0 t}{2}}. \quad (9.18)$$

В этой формуле переменная  $t \in (-\infty, \infty)$ , *поэтому* идеальный полосовой фильтр с П-образной АЧХ и нулевой фазовой характеристикой физически не реализуем и является всего лишь теоретической абстракцией.

В реальных системах функции фильтра нижних частот по восстановлению непрерывного сигнала из дискретного сигнала приближенно выполняют формирователи импульсов (ФИ). Для АИМ – это линейные непрерывные звенья, передаточные функции которых совпадают с изображением Лапласа функции  $S(t)$ , описывающей форму импульса. В частности, таким формирователем может быть экстраполятор нулевого порядка – фиксатор  $\Phi_0$ . Покажем это, рассмотрев изображение Лапласа для последовательности амплитудно-модулированных импульсов  $Y_1(t)$  на выходе ФИ с формой импульса  $S(t)$ :

$$Y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)S(t - kT_0);$$

$$Y_1(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)S(p)e^{-pkT_0} = f^*(p)S(p);$$

Здесь  $f^*(p)$  – это  $D_p$ -изображение для дискретного сигнала  $f[k]$ , полученного из непрерывной огибающей  $f(t)$  в результате дискретизации по времени с шагом  $T_0$ . Отсюда следует, что передаточная функция формирователя импульсов (ФИ)  $W_{\text{фи}}(p)=S(p)$ . Если ФИ – это  $\Phi_0$ , то его передаточная функция определится следующей формулой:

$$W_{\text{фи}}(p) = L\{1(t) - 1(t - T_0)\} = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p};$$

Чтобы оценить различие свойств фиксатора  $\Phi_0$  и идеального фильтра ИФ, исследуем амплитудные и фазовые частотные характеристики  $\Phi_0$ :

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T_0}}{j\omega} = \frac{e^{j\omega \frac{T_0}{2}} e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} e^{-j\omega \frac{T_0}{2}}}{j\omega} = \\ &= e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} \frac{e^{j\omega \frac{T_0}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_0}{2}}}{j\omega} = T_0 \frac{\sin \frac{\omega T_0}{2}}{\frac{\omega T_0}{2}} e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} = M^*(\omega) e^{j\varphi^*(\omega)}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где  $M^*(\omega) = T_0 \frac{\sin 0,5\omega T_0}{0,5\omega T_0}$  – амплитудно-частотная, а  $\varphi^*(\omega) = -0,5\omega T_0$  – фазовая частотная

характеристика фиксатора  $\Phi_0$ . Легко заметить, что они отличаются от частотных характеристик идеального фильтра нижних частот. Причем фазовая частотная характеристика фиксатора *точно* такая же, как у звена *запаздывания* на время  $\tau = 0,5T_0$ . График АЧХ фиксатора  $\Phi_0$  изображен на рис. 9.6. Отрицательные полуволны этого графика можно заменить положительными (показаны точечными линиями), если в этих же частотных диапазонах значения фазовых сдвигов изменить (увеличить) на 180 градусов.

Как следует из рисунка, если граничная частота  $\omega_s$  для амплитудного спектра непрерывного сигнала  $F(\omega)$  не превосходит величины  $2/T_0$ , то в этой полосе частот различиями в амплитудно-частотных характеристиках идеального фильтра ИФ и фиксатора  $\Phi_0$  можно пренебречь, а учитывать только фазовую частотную характеристику фиксатора  $\varphi^*(\omega) = -\omega \frac{T_0}{2}$ .

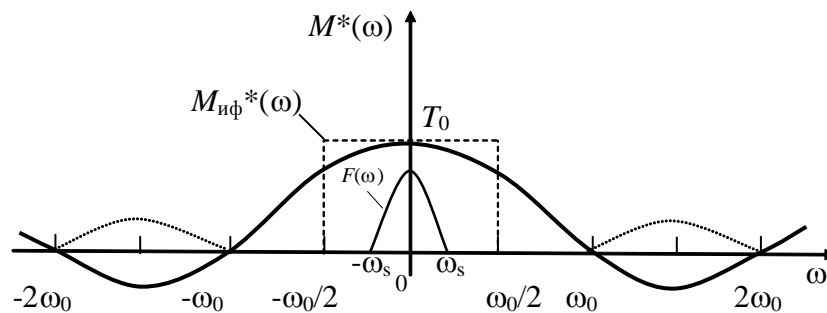


Рис. 9.6. Частотные свойства фиксатора  $\Phi_0$

Тогда действие последовательно включенных ключа и фиксатора  $\Phi_0$  («устройство выборки и хранения» – УВХ) относительно сигнала  $f(t)$  будет *приближенно* эквивалентно действию звена *запаздывания* на время  $\tau = 0.5T_0$  (рис. 9.7).



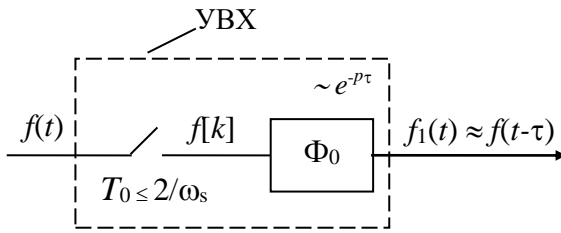


Рис. 9.7. Запаздывание сигнала в УВХ

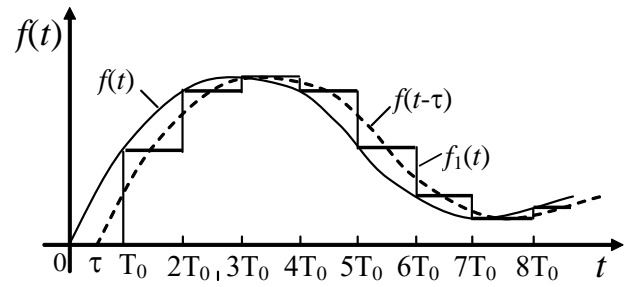


Рис. 9.8. Графики сигналов в УВХ

На рис.9.8 показаны графики этих сигналов для реального случая, когда шаг дискретизации по времени  $T_0 > 2/\omega_s$  и сигнал на выходе фиксатора (в составе УВХ) имеет вид ступенчатой аппроксимации входного сигнала  $f(t)$ .

Таким образом, при  $T_0 < 2/\omega_s$  УВХ можно заменить непрерывным линейным звеном *запаздывания* на время  $\tau = 0,5T_0$ . Этот результат является весьма важным и полезным при получении *приближенных непрерывных моделей* для цифровых и импульсных систем управления.

## Лекция №10

### Тема: «Частотные методы исследования устойчивости и оценки качества ЦСАР»

#### Предварительные замечания

К числу основных задач анализа и синтеза в теории ЦСАР относятся: а) исследование и обеспечение устойчивости САР; б) исследование и обеспечение качества процессов управления. Для того чтобы любая САР была работоспособной (т.е. выполнялись требования и ограничения, заложенные в алгоритм функционирования ОУ), САР должна быть не только устойчивой, но и иметь запасы устойчивости (быть грубой к малым изменениям параметров ОУ и регулятора). Кроме того САР должна обеспечивать выполнение ряда ограничений на вид и характер процесса управления в переходных и в установившихся режимах – это то, что определяет понятие качества управления и характеризует степень его успешности (эффективности). Для решения этих задач анализа и синтеза используются различные группы методов, в том числе и методы частотной области. Отличительной особенностью которых является использование графической формы представления данных (графиков), полученных либо экспериментально, либо в результате компьютерных расчетов по сложным формулам. Напомним сначала основные условия устойчивости, рассмотренные в предыдущих лекциях.

♦ Линейная ДСУ (ЦСАР) *асимптотически* устойчива, если выполняется *любое* из следующих, математически эквивалентных условий:

1) *все* корни характеристического уравнения  $A(z) = 0$  дискретной линейной системы (*характеристические корни*)  $z_i$  по модулю меньше единицы:  $|z_i| < 1$ . Иначе говоря, они располагаются *внутри* единичного круга на  $z$ -плоскости.

2) все корни *преобразованного* (с помощью дробно-линейной подстановки) характеристического уравнения  $A_1(u) = 0$  принадлежат левой полуплоскости комплексной переменной  $u$ , т.е.  $\text{Re } u_i < 0$ ;

3) свободная (переходная) составляющая процесса в системе (по любой координате) с течением времени стремится к нулю;

4) реакция системы на внешнее воздействие (при нулевых начальных условиях) с течением времени стремится к вынужденной составляющей;

5) весовая функция системы  $w[k]$  при возрастании  $k$  стремится к нулю;

6) переходная функция системы  $h[k]$  стремится к постоянному значению.

Каждое из перечисленных выше условий является не только *необходимым*, но и *достаточным*, т.к. в случае их нарушения система оказывается либо неустойчивой, либо будет находиться на границе устойчивости.

В принципе, возможно исследование (анализ) устойчивости линейной ДСУ путем *непосредственной* проверки какого-либо из перечисленных выше условий. Такие методы называют *прямыми*, а все прочие относят к *косвенным* методам. Необходимую информацию о характеристических корнях или о временных реакциях ДСУ (решениях разностных уравнений) для *конкретно* заданных структур и численных значений параметров можно получить, применяя современные компьютерные средства и специализированные пакеты прикладных программ. Более того, стал практически возможным и динамический синтез ДСУ на основе прямых методов, представляющий собой процедуру *направленного перебора* множества конкретных вариантов с выбором подходящего (или лучшего) среди них. По сути – это современный вариант старинного метода "проб и ошибок", называемый методом "генерации вариантов и проверки гипотез". Для большинства сложных и нелинейных ДСУ именно такой подход к динамическому синтезу является порой единственно возможным и конструктивным.

♦ При исследовании устойчивости *линейных* САУ традиционно используются не прямые, а *косвенные методы*, основанные на проверке специальных математических правил и условий, *не требующих* нахождения характеристических корней и временных реакций системы. Эти правила получили название *критериев устойчивости*. По трудоемкости, их применение существенно проще, чем непосредственная проверка указанных выше условий устойчивости. Кроме

того, эти правила могут иметь аналитическую форму, что важно при анализе влияния параметров системы на устойчивость системы с последующим выбором их значений из интервалов устойчивости.

В зависимости от типа математических условий, проверяемых с помощью критериев устойчивости, их разделяют на: а) алгебраические (аналитические) критерии и б) частотные (графо-аналитические) критерии. Алгебраические критерии бывают двух видов: а) *коэффициентные* и б) *матричные*. Для коэффициентных критериев исходные данные – это коэффициенты *характеристического* уравнения системы  $A(z)=0$ . Для матричных критериев такими данными является матричный коэффициент **A** в *уравнениях состояния* (6.1) дискретной системы управления. Для применения алгебраических критериев структурная схема ДСУ может быть любой, лишь бы для нее были получены полином  $A(z)$  или матрица **A** [3, 6, 7].

Для непосредственного применения частотных критериев исходной информацией (данными) являются, в конечном итоге, графические зависимости – графики на комплексной плоскости некоторых частотно-зависимых функций, либо графики амплитудных и фазовых частотных характеристик разомкнутых контуров ЦАР.

♦ В инженерной практике используются два вида частотных критериев устойчивости ЦАР: а) *критерий Михайлова* и б) *критерий Найквиста*.

Критерий Михайлова позволяет судить об устойчивости линейной ДСУ (с любой структурой) по результатам исследования частотных свойств ее характеристического полинома  $A(z)$ .

Критерий Найквиста (в традиционной форме) позволяет судить об устойчивости *замкнутой* ЦАР с единичной отрицательной связью по частотным характеристикам разомкнутой системы. Известно также обобщение этого критерия на случай систем с *произвольной (многоконтурной) структурной схемой*.

Для удобства использования и наглядности, информация о частотных свойствах и характеристиках обычно представляется в графическом виде (например, это может быть частотный годограф для  $A^*(j\omega)$ ,  $A_n(j\lambda)$ , логарифмические псевдочастотные характеристики (ЛПЧХ) разомкнутой ЦАР и др.) [3, 6, 9]. Поскольку алгебраические критерии устойчивости были рассмотрены ранее в методах временной и комплексной области, то далее остановимся подробно на частотных критериях устойчивости.

## 10.1 Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости ДСУ основаны на рассмотрении и исследовании свойств частотных характеристик или некоторых других частотно-зависимых функций. Обычно они применяются в графической форме, но иногда, например, для систем невысокого порядка, их удается применить и в аналитическом виде без построения графиков или годографов.

**Критерий устойчивости Михайлова.** Дискретный аналог критерия Михайлова имеет ряд особенностей по сравнению с таким же критерием для непрерывных систем, поэтому имеет смысл получить условия этого критерия. Рассмотрим характеристический полином ДСУ  $A(z)$  и представим его в факторизованном виде (произведением элементарных сомножителей)

$$A(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i), \quad (10.1)$$

где  $z_i$  – корни полинома. Далее поступим формально так же, как при исследовании частотных характеристик, т.е. будем полагать, что  $z = e^{j\omega T_0}$  и изменять переменную  $\omega$  в диапазоне  $\left[-\frac{\pi}{T_0}; \frac{\pi}{T_0}\right]$ . При этом точка  $z$  опишет полную окружность в комплексной плоскости (рис. 10.1),

перемещаясь в *положительном* направлении (против часовой стрелки) по границе *единичного круга*, являющегося областью устойчивого расположения характеристических корней. Исследуем *приращение аргумента* комплекснозначной функции

$$A^*(j\omega) = A(e^{j\omega T_0}) = a_n \prod_{i=1}^n (e^{j\omega T_0} - z_i) \quad (10.2)$$

при указанном выше диапазоне изменения переменной  $\omega$ :

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg (e^{j\omega T_0} - z_i) \quad (10.3)$$

$$-\frac{\pi}{T_0} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Легко заметить (рис. 10.1), что приращение аргумента (угол поворота вектора) для каждого элементарного сомножителя  $(e^{j\omega T_0} - z_i)$  в (10.3) будет  $a)$  равно  $2\pi$ , если соответствующий корень  $z_i$  принадлежит единичному кругу и  $b)$  равно нулю, если этот корень расположен вне круга. Для простоты полагаем, что характеристические корни на единичной окружности отсутствуют.

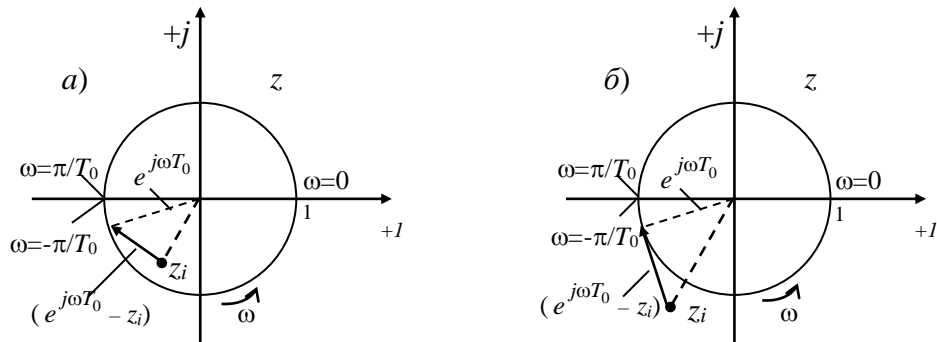


Рис. 10.1. К доказательству критерия Михайлова

Тогда суммарное приращение аргумента в (10.3) будет равно  $2\pi(n-r)$ , где  $r$  – число характеристических корней, по модулю *больших* единицы. Придавая переменной  $\omega$  только неотрицательные значения (аналогично частоте!) и, тем самым, уменьшая диапазон ее изменения в два раза, из (10.3) с учетом предыдущего замечания об отсутствии корней на единичной окружности получим:

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \pi(n-r) \quad (10.4)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Этот результат является частным случаем принципа аргумента для функции комплексной переменной в виде полинома. Поскольку необходимым и достаточным условием устойчивости ДСУ в этом случае является требование  $r=0$  (отсутствие корней характеристического полинома вне единичного круга), то оно будет эквивалентно следующему равенству:

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \pi n \quad (10.5)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Этому условию можно придать простой геометрический смысл, если рассматривать поведение частотного годографа характеристического вектора  $A^*(j\omega)$ , называемого *годографом Михайлова*: ДСУ будет устойчивой, если ее годограф Михайлова при возрастании  $\omega$  от 0 до значения  $\frac{\pi}{T_0}$  обходит *последовательно в положительном направлении*  $2n$  квадрантов комплексной плоскости. В противном случае ЦСАР неустойчива или находится на границе устойчивости.

*Необходимым* (но не достаточным!) условием нахождения ДСУ на границе устойчивости является прохождение годографа при некотором значении  $\omega=\omega_i$  через начало координат. Придавая годографу вблизи этой точки малые деформации в двух *противоположных* направлениях и применяя критерий Михайлова к «деформированным» годографам, можно уточнить, будет ли в этом «критическом» случае ДСУ неустойчивой или она будет находиться на границе устой-

чивости. Так, если оба деформированных годографа соответствуют неустойчивой системе, то исходный (недеформированный) годограф будет соответствовать также неустойчивой системе.

Особенностью годографа Михайлова для ДСУ является то, что он начинается при  $\omega=0$ , когда  $z=1$ , на вещественной оси в точке  $A(1)$  и заканчивается при  $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ , когда  $z = -1$ , также на

вещественной оси в точке  $A(-1)$ . Тогда для устойчивой системы с *четным* порядком  $n$  начальная  $A(1)$  и конечная  $A(-1)$  точки годографа Михайлова *обязательно* будут располагаться по одну сторону от начала координат, а для системы с *нечетным* порядком  $n$  – по *разные стороны* от него.

Это свойство является *необходимым условием устойчивости* ДСУ. Его можно записать в более удобном виде:  $A(1)A(-1) > 0$ , если  $n$  четно и  $A(1)A(-1) < 0$ , если  $n$  нечетно.

Здесь  $A(1) = \sum_{i=0}^n a_i$  и  $A(-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$ . В качестве примера, рассмотрим необходимые условия устойчивости для систем *первого* и *второго* порядков и сравним их с условиями устойчивости, полученными ранее с помощью критерия Шура–Кона.

◆  $n=1$  (нечетный порядок):

$$A(1)A(-1) = (a_0+a_1)(a_0-a_1) < 0 \rightarrow (a_0+a_1) > 0; (a_0-a_1) < 0.$$

Это полностью совпадает с условиями устойчивости (5.8-в). Поэтому для ДСУ *первого* порядка необходимые условия являются также и достаточными.

◆  $n=2$  (четный порядок):

$$A(1)A(-1) = (a_0+a_1+a_2)(a_0-a_1+a_2) > 0 \rightarrow (a_0+a_1+a_2) > 0 \text{ и } (a_0-a_1+a_2) > 0.$$

Но из условия (5.9) следует, что для устойчивости систем второго порядка требуется выполнение еще одного, дополнительного неравенства  $a_2 - a_0 > 0$ .

Таким образом, для ДСУ, начиная уже со второго порядка, необходимые условия устойчивости не совпадают с достаточными условиями и число проверяемых неравенств для исследования устойчивости будет *больше* двух.

Отметим также, что вместо частотного годографа для  $A^*(j\omega)$ , можно строить графики его действительной  $X^*(\omega)=\text{Re } A^*(j\omega)$  и мнимой  $Y^*(\omega)=\text{Im } A^*(j\omega)$  частей. Тогда для устойчивости ДСУ необходимо и достаточно, чтобы корни уравнений  $X^*(\omega)=0$  и  $Y^*(\omega) = 0$  чередовались, а при  $\omega = 0+$  эти функции имели одинаковые знаки.

*Замечание.* Если предварительно было получено преобразованное с помощью дробно-линейной подстановки характеристическое уравнение  $A_1(u)=0$ , то для полинома  $A_1(u)$  можно получить функцию Михайлова подстановкой  $u=j\lambda$  и далее применить критерий Михайлова в традиционном для линейных непрерывных систем виде.

**Критерий устойчивости Найквиста.** Этот критерий основан на изучении частотных характеристик *разомкнутой* системы. Его формулировка для ДСУ не имеет каких-либо особенностей по сравнению с тем же критерием для непрерывных систем. Убедимся в этом, применив принцип аргумента к дробно-рациональной функции  $N(z) = 1 + W(z)$ , где  $W(z) = \frac{B(z)}{C(z)}$  – передаточная функция разомкнутого контура ДСУ:

$$N(z) = 1 + W(z) = \frac{B(z) + C(z)}{C(z)} = \frac{A(z)}{C(z)}. \quad (10.6)$$

Отметим, что числитель выражения для  $N(z)$  является характеристическим полиномом  $A(z)$  для замкнутой, а знаменатель  $C(z)$  – характеристическим полиномом для разомкнутой системы.

Эти полиномы имеют один и тот же порядок  $n$ , так как при замыкании отрицательной обратной связи порядок системы не меняется.

Полагая  $z = e^{j\omega T_0}$ , будем изменять переменную  $\omega$  в диапазоне  $[0; \pi/T_0]$ . При этом будем рассматривать изменение аргумента для  $N^*(j\omega)$ :

$$\Delta \arg N^*(j\omega) = \Delta \arg A^*(j\omega) - \Delta \arg C^*(j\omega). \quad (10.7)$$

Если полиномы  $C(z)$  и  $A(z)$  имеют, соответственно,  $r$  и  $m$  неустойчивых (с модулем больше единицы) корней, а все остальные – внутри единичного круга, то согласно принципу аргумента (10.4) и (10.7) для  $\Delta \arg N^*(j\omega)$  можно получить:

$$\Delta \arg N^*(j\omega) = \pi(n - m) - \pi(n - r) = \pi(r - m). \quad (10.8)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Тогда необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой системы  $m=0$  эквивалентно запишется в следующем виде [3, 6, 7]:

$$\Delta \arg N^*(j\omega) = \pi r = 2\pi \frac{r}{2}. \quad (10.9)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Так как в соответствии с (10.6) частотная передаточная функция разомкнутой системы  $W^*(j\omega) = N^*(j\omega) - 1$ , то условие устойчивости замкнутой системы (10.9) можно переформулировать относительно  $W^*(j\omega)$  и придать ему более наглядный геометрический смысл. Предварительно отметим два очевидных факта:

а) изменению  $\Delta \arg N^*(j\omega) = 2\pi$  соответствует один полный оборот (охват) годографом начала координат комплексной плоскости;

б) число оборотов (охватов) годографом  $N^*(j\omega)$  начала координат комплексной плоскости соответствует такому же числу охватов годографом  $W^*(j\omega)$  точки  $(-1, j0)$  в том же направлении. Тогда критерий устойчивости Найквиста можно сформулировать следующим образом. Для того чтобы замкнутая ДСУ, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая  $r$  полюсов вне единичного круга, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф  $W^*(j\omega)$  (годограф Найквиста) при возрастании частоты  $\omega$  от 0 до  $\frac{\pi}{T_0}$  охватывал точку  $(-1, j0)$  в определенном направлении  $r/2$  раз.

Если годограф при некотором  $\omega$  проходит через точку  $(-1, j0)$ , то замкнутая система либо неустойчива, либо находится на колебательной границе устойчивости. В этом случае необходимо провести дополнительное исследование путем деформации годографа в окрестности этой «критической точки», аналогично тому, как это было сделано с годографом Михайлова.

В простом, но часто встречающемся случае, разомкнутая система может быть устойчивой ( $r=0$ ). Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста не охватывал точку  $(-1, j0)$ .

Таким образом, критерий Найквиста для дискретных и непрерывных линейных систем управления формулируется совершенно одинаково. Некоторое отличие состоит в том, что частота  $\omega$  изменяется в ограниченном диапазоне от 0 до значения  $\frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0}$ . При этом годограф

стремится, за редким исключением, не к началу координат, а к точке  $W(-1)$  на вещественной оси. Если  $W(z)$  имеет полюсы на единичной окружности, то на некоторой частоте  $\omega_i$  годограф будет иметь бесконечный разрыв, поэтому подсчет числа охватов годографом «критической» точки и их направлений становятся неопределенными. Чтобы применять критерий устойчивости в обычном виде, для точек разрыва годограф необходимо дополнить условной (не расчетной!) ветвью.

Выясним направление разрыва и способ условного дополнения годографа Найквиста для практически важного частного случая, когда такой разрыв будет на частоте  $\omega=0$ , что соответствует положительному вещественному полюсу  $z_i=1$  с некоторым коэффициентом кратности  $\nu$ . Для ДСУ с порядком астатизма  $\nu$  передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде  $W(z)=W_0(z)(z-1)^{-\nu}$ , где  $W_0(z)$  – сомножитель, не имеющий полюсов на единичной окружности. Полагая, что при *малых* значениях  $\omega \approx 0$  и  $z = e^{j\omega T_0} \approx 1 + j\omega T_0$ , получим приближенное выражение для частотной передаточной функции

$$W^*(j\omega) \approx W_0^*(j\omega)(j\omega T_0)^{-\nu} \approx W_0(1)(j\omega T_0)^{-\nu}.$$

Отсюда следует, что при  $\omega=0$  годограф Найквиста для *четных* порядков астатизма  $\nu$  будет иметь бесконечный разрыв в *горизонтальном* направлении, а для *нечетных*  $\nu$  – в *вертикальном* направлении. При этом необходимо учитывать также знак сомножителя  $W_0(1)$ . Так, например, для  $\nu=1$  и  $W_0(1)<0$  разрыв будет в направлении «вверх», а для  $\nu=2$  и  $W_0(1)>0$  – «влево».

Для того, чтобы выяснить вид и направление *условного дополнения* годографа на частоте  $\omega=0$ , будем вещественный единичный полюс  $z_i=1$  астатической ДСУ считать пределом положительного вещественного полюса, расположенного внутри единичного круга, т.е.  $z_i = 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)$ . Тогда выражение для передаточной функции разомкнутой системы с астатизмом  $\nu$ -го порядка можно записать в виде

$$W(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_0(z)}{(z-1+\varepsilon)^\nu}. \quad (10.10)$$

Подставляя сюда, как и ранее,  $z = e^{j\omega T_0} \approx 1 + j\omega T_0$  (это справедливо при  $\omega T_0 \ll 1$ ) получим *приближенное* выражение для  $W^*(j\omega)$ :

$$W^*(j\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_0(e^{j\omega T_0})}{(j\omega T_0 + \varepsilon)^\nu} \approx W_0(e^{j\omega T_0}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{j\omega \frac{T_0}{\varepsilon} + 1} \right)^\nu. \quad (10.11)$$

Поскольку  $W_0(e^{j\omega T_0})$  не имеет разрывов при  $\omega=0$ , то *вид дополнительной части* годографа  $W^*(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $0+$  (для точки разрыва) определяется сомножителем

$W_x^\nu(j\omega) = \left( \frac{K_x}{1 + j\omega T_x} \right)^\nu$ . Здесь  $W_x(j\omega)$  представляет собой частотную передаточную функцию

устойчивого аperiodического звена с постоянной времени  $T_x = \frac{T_0}{\varepsilon}$  и коэффициентом передачи

$K_x = \frac{1}{\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Амплитудная и фазовая частотные характеристики такого звена описываются формулами

$$M_a(\omega) = \left( \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2 T_0^2} \right)^{-1}, \quad \varphi_a(\omega) = -\arctg\left(\omega \frac{T_0}{\varepsilon}\right). \quad (10.12)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  эти характеристики приближаются к частотным характеристикам интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_u(p) = \frac{1}{pT_0}$ .

Поскольку из (10.12) следует, что  $\varphi_a(0)=0$ , то при *таком* рассмотрении можно считать, что для интегрирующего звена  $\varphi_u(0)=0$ , а  $\varphi_u(0+)= -\pi/2$ . Иначе говоря, на частоте  $\omega=0$  происходит «скачок» фазовой характеристики интегратора от нуля до  $-\pi/2$ , а ордината АЧХ при этом принимает бесконечное значение.

Тогда в соответствии с (10.11) при изменении частоты  $\omega$  от значения 0 до значения  $0+$  (точка разрыва) вектор  $W(1)$ , увеличенный по величине в бесконечное число раз, поворачивается на угол, равный  $-\nu \frac{\pi}{2}$  (по часовой стрелке). Это соответствует *условному* дополнению годографа

Найквиста дугой бесконечного радиуса с угловым размером  $-\nu \frac{\pi}{2}$ . Такая дуга условно изображается пунктирной линией. Она «начинается» на вещественной оси справа от начала координат, если  $W_0(1) > 0$ , и слева от него, если  $W_0(1) < 0$ .

Типовые случаи дополнения на бесконечности основной (расчетной) ветви годографа Найквиста для систем, имеющих *первый* и *второй* порядок астатизма, показаны, соответственно, на рис. 10.2 и рис. 10.3.

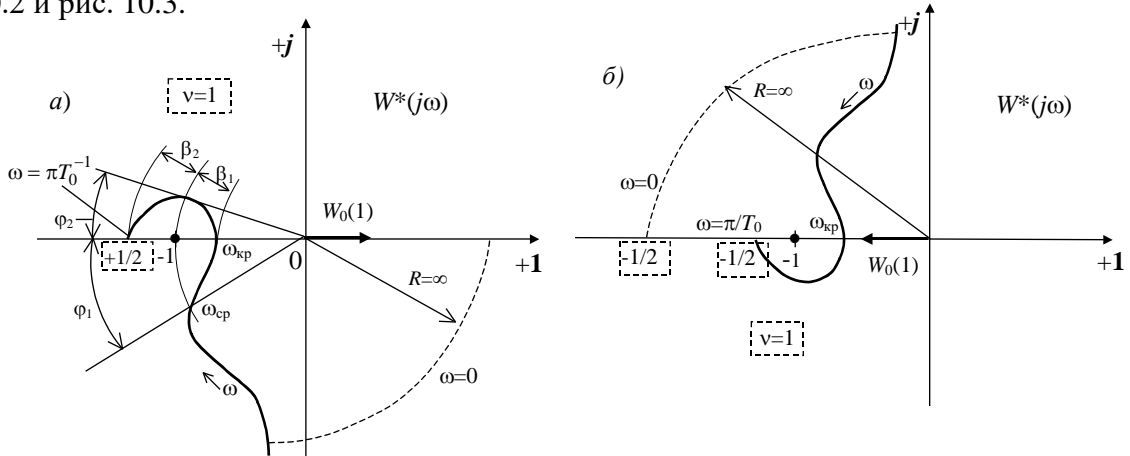


Рис. 10.2. Дополнение годографа на бесконечности при  $\nu=1$

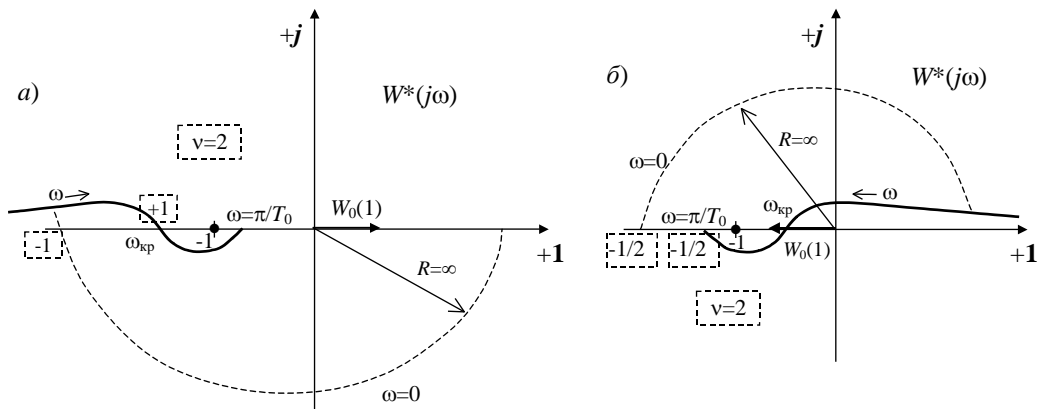


Рис. 10.3. Дополнение годографа на бесконечности при  $\nu=2$

После нанесения дополнения (пунктирная линия), критерий устойчивости применяется обычным образом. В тех случаях, когда годограф Найквиста имеет сложную форму, для определения числа охватов им «критической точки» (с учетом дополнения!) удобно пользоваться правилом переходов Цыпкина. Для этого размечаются общие точки годографа и луча, исходящего из точки  $(-1, j0)$  влево. Правило разметки этих точек показано на рис. 10.4.

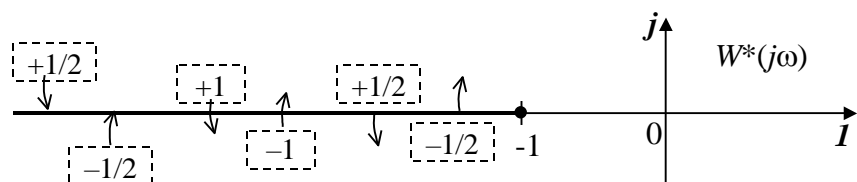


Рис. 10.4. Правило переходов Цыпкина для годографа Найквиста



С учетом этого правила, количество охватов  $N_{\text{охв}}$  годографом «критической» точки будет равно разности числа положительных  $N^+$  и числа отрицательных  $N^-$  переходов:  $N_{\text{охв}} = N^+ - N^-$ . Результаты подсчета переходов и охватов для годографов, изображенных на рис. 10.2 и 10.3 приведены в табл. 10.1. Далее, сравнивая число охватов  $N_{\text{охв}}$  с половиной числа неустойчивых полюсов разомкнутой системы  $r/2$ , применяют критерий Найквиста для определения устойчивости замкнутой ДСУ. Так, например, годограф Найквиста, приведенный на рис. 10.2, а) соответствует устойчивой замкнутой ДСУ только в том случае, когда  $r=1$ , а годограф, изображенный на рис. 10.3, а) соответствует устойчивой ДСУ только при  $r=0$ .

Таблица 10.1

Подсчет переходов и охватов для годографа Найквиста

Номер рисунка	Число положительных переходов $N^+$	Число отрицательных переходов $N^-$	Количество охватов точки $(-1, j0)$ $N_{\text{охв}}$
4.2, а	1/2	0	1/2
4.2, б	0	1	-1
4.3, а	1	1	0
4.3, б	0	1	-1

*Замечание 1.* Если предварительно получена преобразованная с помощью дробно-линейной подстановки передаточная функция *разомкнутой* системы  $W(u)$ , то для исследования устойчивости можно формально применять критерий Найквиста точно так же, как для непрерывных систем. При этом обычно используют логарифмические псевдочастотные характеристики  $L_w(\lambda)$  и  $\varphi_w(\lambda)$ , относительно которых критерий Найквиста формулируется следующим образом. Для того чтобы *замкнутая* ДСУ, неустойчивая в *разомкнутом* состоянии и имеющая  $r$  полюсов  $W(u)$  в правой полуплоскости, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы в *диапазонах положительности* псевдочастотной ЛАХ разность между числом положительных  $N^+$  и отрицательных  $N^-$  переходов графиком фазовой характеристики  $\varphi_w(\lambda)$  «критических» уровней  $-\pi \pm 2k\pi$  равнялась  $r/2$ . Правило переходов Цыпкина для фазовой характеристики иллюстрируется на рис. 10.5.

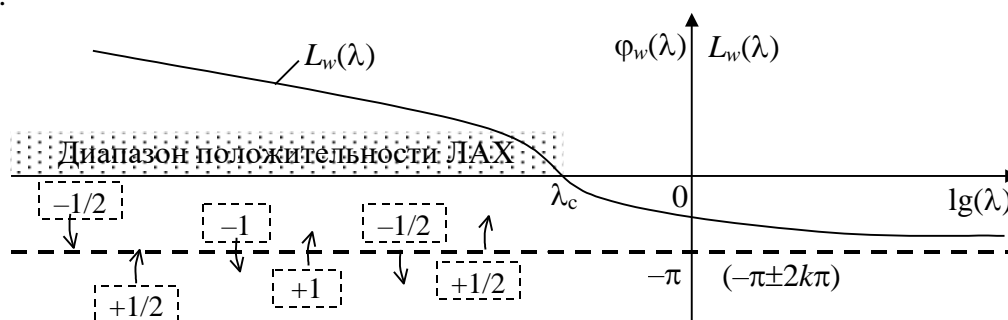


Рис. 10.5. Правило переходов Цыпкина для фазовой характеристики

Особенностью логарифмических псевдочастотных характеристик является их асимптотическое поведение при  $\lambda \rightarrow \infty$ : самая высокочастотная асимптота ЛАХ горизонтальна, а ФЧХ асимптотически стремится к уровню, кратному  $-\pi$ .

*Замечание 2.* Важнейшей особенностью частотного критерия Найквиста является его *конструктивность*. Он позволяет не только определить факт устойчивости ДСУ, но и оценить,

насколько она близка к *границе устойчивости* и что следует предпринять (в терминах частотных характеристик), чтобы увеличить «расстояние» системы от этой границы или стабилизировать ее (сделать устойчивой). Поэтому без преувеличения можно сказать, этот критерий фактически является основой частотных методов синтеза ДСУ.

Поскольку критерий имеет геометрический смысл, то любая количественная мера удаленности годографа от «критической» точки может быть использована для характеристики (оценки) запаса устойчивости ДСУ. Наиболее удобной оказалась оценка запаса устойчивости с помощью величин: а) углового и б) линейного расстояния (по вещественной оси) от годографа до точки  $(-1, j0)$ . При этом угловое расстояние  $\varphi_3$  называют запасом устойчивости по фазе, а линейное расстояние  $\beta$  – запасом устойчивости по коэффициенту усиления (по амплитуде). Для годографов сложной формы таких «расстояний» может быть больше двух. На рис. 10.2, а) поясняется смысл этих величин в предположении, что  $r = 1$ . Тогда устойчивая ДСУ будет иметь запасы устойчивости, как на увеличение, так и на уменьшение: по коэффициенту усиления  $\beta_1, \beta_2$  и по фазе  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

По *логарифмическим* псевдочастотным характеристикам разомкнутой ДСУ  $L_w(\lambda)$  и  $\varphi_w(\lambda)$  запасы устойчивости определяются так же как и для непрерывных систем. Запас по фазе  $\varphi_{31}$  равен «избытку фазы» на псевдочастоте среза  $\lambda_{cp}$ , т.е.  $\varphi_{31} = \pi + \varphi_w(\lambda_{cp})$ . Запас на увеличение коэффициента усиления  $L_{31} = |L_w(\lambda_{cp})|$ , где  $\lambda_{cp}$  – «критическая» частота, на которой график фазовой характеристики достигает критического уровня  $-\pi$ . При этом  $L_{31} = -20 \lg(1 - \beta_1)$ . Запас устойчивости на уменьшение коэффициента определяется аналогично и тогда  $L_{32} = 20 \lg(1 + \beta_2)$ .

Задачу обеспечения устойчивости ДСУ часто называют *стабилизацией*. В некоторых случаях удается стабилизировать систему только изменением ее параметров в допустимых пределах, но чаще для этой цели в замкнутый контур системы включаются *дополнительные* динамические звенья, обеспечивающие ей не только устойчивость, но и необходимые значения запасов устойчивости. Эти звенья деформируют (корректируют) годограф Найквиста в окрестности точки «минус единица» таким образом, чтобы он проходил на достаточном удалении от нее при соблюдении условий частотного критерия устойчивости. Такие звенья принято называть *корректирующими*. При этом возможны варианты стабилизации как с помощью «фазопережающих», так и с помощью «фазоотстающих» корректирующих звеньев. Первые из них в требуемом диапазоне частот вносят положительные, а вторые – отрицательные фазовые сдвиги. В составе ДСУ такие звенья могут быть как дискретными, так и непрерывными. Дискретные звенья реализуются с помощью устройств дискретного действия (УДД), а непрерывные – традиционными непрерывными устройствами в составе непрерывной части системы.

При решении задачи стабилизации системы полезным является построение областей устойчивости в плоскости двух параметров, а в случае одного параметра – отыскание *интервалов* устойчивости и их граничных (критических) значений. Следует заметить, что получить аналитические выражения для границ областей (или интервалов) устойчивости дискретных систем удастся только в простейших случаях. Расчет границ устойчивости численным методом, основанным на идеях *D-разбиения* для ДСУ не нашел применения ввиду очень сложной зависимости коэффициентов характеристического уравнения от параметров.

Обычно эта задача решается «сеточным» методом, суть которого состоит в проверке выполнения условий устойчивости системы по любому критерию устойчивости в конечном, но достаточно большом, числе точек плоскости параметров (в узлах сетки). Множество узлов, для которых ДСУ оказалась устойчивой, дает представление о конфигурации области устойчивости в пределах исследуемого прямоугольника на плоскости варьируемых параметров.

Рассмотрим простой пример на построение области устойчивости в плоскости двух параметров с применением алгебраического коэффициентного критерия.

Пример 10.1. Получить область устойчивости в плоскости параметров «период дискретности  $T_0$  – коэффициент усиления  $K$ », если передаточная функция разомкнутой ДСУ имеет вид

$$W(z) = \frac{KT_0}{z-1}.$$

*Решение.* Запишем характеристический полином замкнутой системы в следующем виде:  $A(z) = KT_0 - 1 + z = a_0 + a_1 z$ , где  $a_0 = KT_0 - 1$ ;  $a_1 = 1$ . Как было показано ранее, для системы первого порядка необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными и имеют вид неравенств (5.8-в):  $a_0 + a_1 > 0$  и  $a_0 - a_1 < 0$ . В данном примере они запишутся следующим образом: а)  $(KT_0 - 1) + 1 > 0$  и б)  $(KT_0 - 1) - 1 < 0$ , т.е.  $KT_0 > 0$  и  $KT_0 < 2$ . Поскольку период дискретности  $T_0$  по физическому смыслу не может принимать отрицательных значений, то область устойчивости будет часть первого квадранта плоскости  $(T_0, K)$ , ограниченная сверху гиперболой с уравнением  $KT_0 = 2$ .

Тот же результат можно получить алгебраическим методом с помощью преобразованного характеристического полинома  $A_1(u)$ . Для этого сначала запишем преобразованную передаточную функцию  $W(u)$ , получаемую из  $W(z)$  заменой переменной  $z = \frac{2+uT_0}{2-uT_0}$  (см. пример 9.1):

$$W(u) = \frac{KT_0(2-uT_0)}{2uT_0}.$$

Тогда преобразованный характеристический полином запишется в следующем виде  $A_1(u) = KT_0(2-uT_0) + 2uT_0 = 2KT_0 + T_0(2-KT_0)u$ , а условие устойчивости для системы первого порядка будет совпадать с требованием положительности его коэффициентов: а)  $2KT_0 > 0$  и б)  $T_0(2-KT_0) > 0$ .

Одновременное выполнение этих неравенств при условии положительности значений  $T_0$  возможно только в том случае, когда  $0 < KT_0 < 2$ . Вид области устойчивости для рассматриваемого примера приведен на рис. 10.6. Необходимо заметить, что дробно-линейная подстановка рассматриваемого вида может быть использована только в предположении положительности периода дискретности по времени  $T_0$ . Это условие не является существенным ограничением, так как отрицательные значения  $T_0$  не имеют физического смысла.

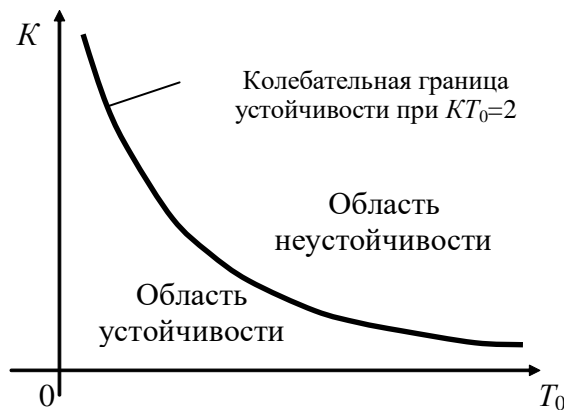


Рис. 10.6. Область устойчивости к примеру 10.1

**Пример 10.2.** Получить условия устойчивости для цифровой ДСУ, если передаточные функции ДЗ ПНЧ и последовательного цифрового корректирующего устройства имеют вид:

$$W_0(z) = \frac{K_0 T_0}{z-1}; \quad W_{цкц}(z) = \frac{K_1}{2} \frac{z(T_0 + 2\tau) + T_0 - 2\tau}{z-1}.$$

*Решение.* Переходя к  $D_u$ -преобразованиям, получим преобразованные передаточные функции дискретных звеньев  $W_0(u)$ ,  $W_{цкц}(u)$  и характеристический полином замкнутой системы  $A_1(u)$ :

$$W_0(u) = \frac{K_{\text{и}}(1-uT_0/2)}{u}; \quad W_{\text{цкы}}(u) = \frac{K_1(1+u\tau)}{u};$$

$$A_1(u) = K_1K_{\text{и}} + K_1K_{\text{и}}(\tau - T_0/2)u + (1 - K_1K_{\text{и}} \frac{\tau T_0}{2})u^2.$$

Из требования положительности коэффициентов  $A_1(u)$  следуют необходимые и достаточные условия устойчивости цифровой ДСУ *второго* порядка при  $T_0 > 0$ :

$$a) K_1K_{\text{и}} > 0; \quad b) (\tau - T_0/2) > 0; \quad c) (1 - K_1K_{\text{и}} \frac{\tau T_0}{2}) > 0.$$

## 10.2 Частотные показатели качества

На этапе *проектирования* ДСУ конкретный вид внешних воздействий, а значит и график изменения ошибки, заранее (априорно) точно неизвестен. Поэтому для *сравнения* различных вариантов проектируемой системы принято характеризовать качество процесса управления по её реакциям на некоторые определенные виды воздействий. При этом качество установившихся (стационарных) и переходных (нестационарных) процессов в линейных системах приходится оценивать отдельно, рассматривая, соответственно, типовые, и наиболее неблагоприятные виды внешних воздействий. Для этой цели вводятся в рассмотрение *показатели качества переходных процессов* (ПК ПП) и *показатели качества установившихся процессов* (ПК УП).

### 10.2.1 Частотные ПК ПП

При использовании методов частотной области качество переходных процессов оценивают по виду и параметрам графиков частотных (псевдочастотных) характеристик замкнутой или разомкнутой системы (частотные показатели). Более строго – это функционалы точечного вида для соответствующих функций частоты  $\omega$  или псевдочастоты  $\lambda$ .

*Частотные* ПК ПП формально не отличаются от таких же показателей для непрерывных систем, так как физический смысл и вид частотных характеристик для дискретных и непрерывных систем один и тот же. Отличие состоит лишь в диапазоне изменения частоты  $\omega$ . Среди них чаще других используют: а) параметры графика АЧХ замкнутой системы и б) параметры графиков амплитудной и фазовой частотных характеристик *разомкнутого* контура системы в структуре с единичной отрицательной обратной связью. Рассмотрим их более подробно.

а) параметры графика амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $M^*(\omega)$  для *замкнутой* системы:

- *показатель колебательности*  $M$ , равный *отношению* величины резонансного пика АЧХ к ее начальному значению на частоте  $\omega=0$ . Он характеризует запас устойчивости системы относительно колебательной границы. Чем больше  $M$ , тем меньше запас устойчивости. Рекомендуемые значения для *верхней* границы показателя  $M$  принадлежат интервалу 1,3÷1,6.
- *частота резонансного пика*  $\omega_p$  и *граничная частота* полосы пропускания  $\omega_{\text{пр}}$  для АЧХ. При этом полоса пропускания определяется на уровне  $0,707M^*(0)$ . Обе эти частоты характеризуют свойство быстродействия системы.

б) *параметры графиков частотных характеристик разомкнутой системы.*

В соответствие с формулой замыкания для структуры с единичной обратной связью, вид  $M^*(\omega)$  определяется только частотными свойствами разомкнутого контура (в основном, в окрестности частоты среза). Поэтому для сравнительной оценки качества переходных процессов в ДСУ можно использовать следующие параметры графиков ЧХ *разомкнутой* системы:

- запасы устойчивости по коэффициенту усиления (по амплитуде)  $\beta_1, \beta_2$ ;

- запас устойчивости по фазе  $\varphi_3$ ;
- частота среза  $\omega_{ср}$ .

При этом частота  $\omega_{ср}$  характеризует быстродействие, а  $\varphi_3$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – склонность системы к колебаниям в переходном процессе. Если используются логарифмические псевдочастотные характеристики, то вместо частоты среза  $\omega_{ср}$  должна рассматриваться псевдочастота среза  $\lambda_{ср}$ , а вместо  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – запасы по амплитуде  $L_{31}$  и  $L_{32}$ . Рекомендуемые значения для запасов устойчивости должны быть *не менее*  $30^\circ$  по фазе и 10 дБ по амплитуде (по модулю).

### 10.2.2 Частотные ПК установившихся процессов (режимов)

Для сравнительной оценки качества работы различных вариантов ДСУ в установившемся режиме рассматривают *вынужденную* составляющую ошибки (или функционал от нее) при воздействии на вход системы *типовых* дискретных сигналов. При использовании детерминированных методов частотной области такими сигналами могут быть [6, 7, 9]:

- Гармонический (или полигармонический);
- Медленно меняющийся (с ограниченными значениями первых двух производных или разностей).

Ограничимся краткими сведениями по этим методам оценки точности ЦСАР:

- Оценка точности ДСУ при моно- и полигармонических воздействиях.

Пусть задающее воздействие изменяется во времени по закону

$$X[k] = A_x \sin(\omega_x k T_0) \text{ или } X[k] = \sum_i A_{xi} \sin(\omega_{xi} k T_0 + \varphi_{xi}). \quad (10.13)$$

Для оценки точности воспроизведения гармонического сигнала с частотой  $\omega_x$  в установившемся режиме можно применить следующие показатели:

- относительная величина амплитуды ошибки:

$$e_{отн} = \frac{A_e}{A_x} = |\Phi_e^*(j\omega_x)|; \quad (10.14)$$

- коэффициенты амплитудных ( $\delta_a$ ) и фазовых ( $\delta_\varphi$ ) искажений:

$$\delta_a = \left| \frac{A_x - A_y}{A_x} \right| = \left| 1 - \frac{A_y}{A_x} \right| = \left| 1 - |\Phi^*(j\omega_x)| \right|; \quad \delta_\varphi = |\arg\{\Phi^*(j\omega_x)\}|. \quad (10.15)$$

В случае полигармонического сигнала такие же показатели можно рассматривать на заданном наборе частот  $\omega_{xi}$ ,  $i=1,2,\dots,N$ .

Для структуры с единичной отрицательной обратной связью значения показателей точности  $e_{отн}$ ,  $\delta_a$  и  $\delta_\varphi$  будут определяться только частотными свойствами разомкнутой системы. Поэтому для синтеза ДСУ требования по точности целесообразно пересчитать в ограничения на частотные характеристики разомкнутой системы. Основой такого пересчета являются формулы замыкания

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{W^*(j\omega)}{1+W^*(j\omega)} \text{ и } \Phi_e^*(j\omega) = \frac{1}{1+W^*(j\omega)}. \quad (10.16)$$

При этом можно использовать следующие приближенные соотношения, справедливые при достаточно малых допустимых значениях  $e_{отн}$ ,  $\delta_a$  и  $\delta_\varphi$ :

$$|W(j\omega_x)| > \frac{1}{e_{отн}} \text{ и } |W(j\omega_x)| > \frac{1}{\rho_x}, \text{ где } \rho_x = \min\left(\sin(\delta_\varphi); \frac{\delta_a}{1+\delta_a}\right). \quad (10.17)$$

Из этих неравенств следует, что требования к точности ДСУ при гармонических и полигармонических сигналах ограничивают снизу значения ординат АЧХ (или псевдочастотных ЛАХ) *разомкнутой* системы на соответствующих частотах (или псевдочастотах) в рабочем диапазоне. Это обстоятельство должно быть учтено при синтезе ДСУ частотными методами на этапе построения *желаемой* ПЧ ЛАХ в диапазоне частот, расположенном *левее* псевдочастоты среза  $\lambda_c$ .

б) *Оценка точности ДСУ при медленно меняющихся типовых воздействиях.*

Предполагается, что задающий сигнал  $X[k]$  получен из непрерывного сигнала  $X(t)$ , имеющего ограниченные значения скорости  $X'_{\max}$  и ускорения  $X''_{\max}$ , выборкой дискретных по времени значений при  $t=kT_0$ . При этом будем также считать, что граничная частота спектра этого сигнала  $\omega_{\text{гр}}$  меньше частоты среза разомкнутого контура ЦСАР  $\omega_c$ , т.е.  $\omega_{\text{гр}} < \omega_c < 2/T_0$ . Тогда в диапазоне рабочих частот системы  $\lambda \approx \omega$ , а  $W^*(j\omega) \approx W(j\lambda)$ . Это позволяет для оценки точности воспроизведения такого сигнала и формирования ограничений на частотные свойства разомкнутой ДСУ формально воспользоваться методом *эквивалентного гармонического сигнала* в том же виде, как и для непрерывных систем [1, 6, 9].

Показателем точности в этом случае является относительная ошибка  $e_{\text{отн}} = e_{\max}/A_3$ , где  $A_3$  – амплитуда «эквивалентного» гармонического сигнала  $X_3[k] = A_3 \sin(\omega_3 k T_0)$ . Параметры  $A_3$  и  $\omega_3$  этого сигнала определяются из условия *равенства* амплитуд скорости и ускорения гармонического сигнала и максимальных величин скорости  $X'_{\max}$  и ускорения  $X''_{\max}$  для непрерывного задающего сигнала:

$$A_3 = \frac{X'^2_{\max}}{X''_{\max}}; \quad \omega_3 = \frac{X''_{\max}}{X'_{\max}}. \quad (10.18)$$

Для обеспечения заданной относительной ошибки  $e_{\text{отн}}$  в системе с астатизмом первого порядка с единичной отрицательной обратной связью необходимо, чтобы псевдочастотная ЛАХ разомкнутой ДСУ проходила *выше* контрольной точки  $\mathbf{B}\{\lg(\lambda_c); 20\lg(1/e_{\text{отн}})\}$  и *двух* лучей, исходящих из нее с наклонами  $-20$  (влево) и  $-40$  (вправо). Тем самым гарантируется воспроизведение с такой же  $e_{\text{отн}}$  множества гармонических сигналов из рабочей полосы частот, для которых амплитуды скоростей и ускорений *не превосходят* величин  $X'_{\max}$  и  $X''_{\max}$ . При синтезе ДСУ с астатизмом первого порядка частотными методами выбор минимального допустимого значения для коэффициента передачи (добротности по скорости) должен выполняться с учетом этих ограничений на расположение ПЧ ЛАХ разомкнутой системы.

## Лекция №11

### Тема: «Частотная область: Синтез ЦКУ методом псевдочастотных ЛАХ»

#### Предварительные замечания

Графоаналитические (частотные) методы синтеза базируются на использовании частотных (псевдочастотных) характеристик разомкнутых и замкнутых ЦСАР и связи их с показателями качества переходных и установившихся процессов. Кроме того, в частотной области легко формулируются условия и рекомендации, выполнение которых приводит к более простой технической реализации корректирующих устройств и ЦСАР в целом. Эти методы отличаются простотой, наглядностью и понятным физическим смыслом. Благодаря применению *логарифмических* и типовых частотных характеристик, они получили преимущественное распространение в инженерной практике при решении задачи синтеза ЦКУ [1, 6, 9].

Задача синтеза цифрового регулятора тем или иным методом может быть решена, если задан (известен) шаг дискретности по времени  $T_0$ . Отсюда возникает естественный вопрос: «*Каким образом задавать величину  $T_0$ ?*». Он является особенно важным при расчете цифровых (микропроцессорных) систем управления, так как параметр  $T_0$  в основном определяет требование к быстрдействию ЦВУ. Сложность задачи заключается в том, что максимальная величина  $T_0$  будет зависеть от передаточной функции ДЗ ПНЧ  $W_0(z)$ , коэффициенты которой зависят сложным образом от  $T_0$ . Таким образом, для строгого обоснования минимально необходимой частоты дискретизации  $\omega_0=2\pi/T_0$  возникает логически замкнутый круг. Поэтому назначение величины  $T_0$  обычно должно *предшествовать* решению задачи синтеза алгоритма управления.

Один из *возможных* и наиболее простых подходов к решению этой задачи состоит в выборе величины  $\omega_0$  на основе приближенного выполнения условия информационной эквивалентности Котельникова – Шеннона в виде  $\omega_0 \geq 2\omega_m$ , где максимальная частота  $\omega_m \approx 3\omega_s$  спектра циркулирующих в системе сигналов. Здесь  $\omega_s$  – граничная частота для АЧХ непрерывной части системы, назначаемая из условия  $|W_{нч}(j\omega)| \leq 0,1$  при  $\omega > \omega_s$ . Но такой выбор часто приводит к завышенным требованиям к величине  $\omega_0$ . Известны и другие, но гораздо более сложные методики предварительного назначения величины шага дискретизации  $T_0$  [3, 4, 5, 9].

#### 6.1. Частотные методы синтеза дискретных (цифровых) корректирующих звеньев

Среди различных методов синтеза корректирующих звеньев, частотные методы отличает идейная простота и наглядность, как для непрерывных, так и для дискретных систем управления. В этих методах характеристики корректирующих звеньев в *среднечастотном* диапазоне (окрестность частоты среза) выбираются так, чтобы годограф Найквиста *устойчивой* системы не заходил в некоторую запрещенную (по требованиям запасов устойчивости) область, окружающую «особую» точку  $(-1, j0)$ . Вид такой области может быть различным и часто ее принимают в форме круга радиуса  $R=M/(M^2-1)$  с центром в точке  $(-M/R, j0)$ , где  $M$  – это требуемое значение показателя колебательности [1, 2].

Требования по точности в частотных методах обеспечиваются видом и расположением *низкочастотной* части годографа Найквиста. При выбранном порядке астатизма, удаленность точек годографа (расстояние) от начала координат в низкочастотном (рабочем) диапазоне должна быть достаточно большой.

*Высокочастотная* часть частотного годографа разомкнутой системы практически не оказывает заметного влияния на запасы устойчивости, и тем более на показатели точности системы управления, но определяет усиление помех, сложность и физическую осуществимость корректирующих звеньев.

### 11.1.1 О синтезе ЦСАР методом логарифмических характеристик

Наиболее просто задача синтеза корректирующих звеньев решается для непрерывных *минимально фазовых* систем с использованием ЛЧХ. При этом с помощью приближенных формул и графиков, удается сформировать *типовую «желаемую» асимптотическую* ЛАХ разомкнутой системы, обеспечивающую выполнение всех требований к качеству замкнутой системы с учетом инженерных рекомендаций по ее реализации.

Такой желаемой ЛАХ будет соответствовать и типовая передаточная функция разомкнутой системы, зная которую можно определить передаточную функцию корректирующего звена при любом способе его подключения. При синтезе ЦСАР обычно рассматривают вариант *последовательного* ЦКУ.

Переход от круговой частоты  $\omega$  к абсолютной псевдочастоте  $\lambda$  и использование *псевдочастотных* логарифмических характеристик (ПЧЛХ) позволяет, с некоторыми особенностями и ограничениями, распространить подход, аналогичный непрерывному, и на дискретные линейные системы управления. При этом существенной особенностью ДСУ является то, что в числителе преобразованной передаточной функции  $W_0(u)$  для *заданной* части разомкнутой системы *всегда* будут присутствовать (не менее одного) *неминимально-фазовые* множители. Они оказывают существенное влияние на фазовую ПЧЛХ в районе псевдочастоты среза  $\lambda_c$  и правее ее, уменьшая запас устойчивости по фазе.

Для обеспечения свойства грубости ДСУ *недопустима* компенсация таких множителей корректирующим звеном, и поэтому они *обязательно* должны входить в числитель передаточной функции скорректированной системы. Соответствующие им слагаемые должны включаться в состав желаемых ЛПЧХ.

Проблема заключается в том, что *наличие* или отсутствие таких множителей, кроме одного, всегда имеющего вид  $(1 - 0,5iT_0)$ , зависит от соотношения величины периода дискретности  $T_0$  и суммы «малых» постоянных времени в выражении для передаточной функции непрерывной части системы  $W_0(p)$ . При *заданном* значении  $T_0$  эти множители всегда можно определить и учесть при формировании желаемой ПЧЛХ разомкнутой ДСУ, хотя для  $W_0(p)$  высокого порядка это сделать не просто.

Чтобы исключить возможность непреднамеренной компенсации указанных выше множителей в тех случаях, когда величина  $T_0$  заранее неизвестна, а подлежит выбору или оптимизации в процессе синтеза, достаточно того, чтобы получаемая передаточная функция корректирующего звена  $W_k(u)$  не содержала правых полюсов и соответствовала устойчивому звену. Тогда, если заданная часть системы была устойчивой, выполнение условия грубости будет обеспечено.

### 11.1.2. Особенности формирования желаемых ПЧЛХ ЦСАР

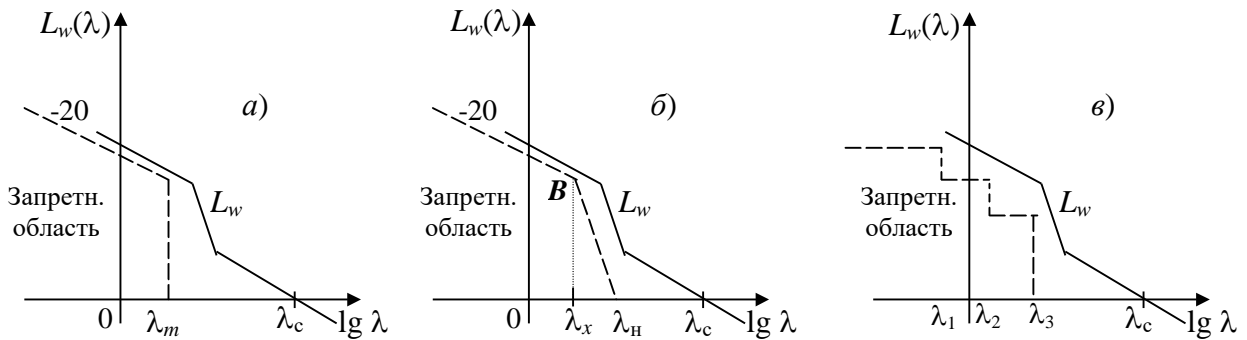
Построение желаемых псевдочастотных логарифмических характеристик (ПЧЛХ) для разомкнутой ЦСАР, как и для непрерывной системы, осуществляется по частотным диапазонам. Их вид и расположение в низкочастотной области НЧ (диапазон спектра задающего воздействия) определяется, в основном, требованиями к точности воспроизведения сигналов системой в установившемся режиме. Вид фазовой характеристики здесь не имеет существенного значения, и требования предъявляются только к ЛАХ [1, 3, 6].

Но так как в НЧ диапазоне  $\lambda \ll \lambda_c < 2/T_0$  и  $\lambda \approx \omega$ , то желаемая ЛАХ здесь (и далее до псевдочастоты  $\lambda_c$ ), строится точно так же, как для непрерывной системы. Порядок астатизма  $\nu$ , определяющий наклон НЧ асимптоты ЛАХ, должен быть *не меньше* числа интегрирующих звеньев в выражении для передаточной функции  $W_0(p)$  *непрерывной* части ДСУ, а график псевдочастотной ЛАХ здесь должен располагаться *выше* границы запрещенной (по точности) области. Вид этой области определяется характером требований к качеству установившихся режимов при типовых воздействиях на входе ДСУ.

На рис. 11.1 изображен вид таких областей для системы с астатизмом первого порядка в случаях, когда типовой сигнал является *а)* полиномиальным; *б)* с ограниченными значениями



первой и второй производных и в) полигармоническим. Особенности построения этих границ отмечались ранее при рассмотрении вопроса оценки качества ДСУ в установившемся режиме работы.



Ри

с. 11.1. Запрещенные области для ЛАХ по требованиям точности

Диапазон *средних частот* – это окрестность псевдочастоты среза  $\lambda_c$  для ЛАХ. Величина  $\lambda_c$  определяет *быстродействие* ДСУ, а взаимное расположение амплитудных и фазовых характеристик в этом диапазоне определяет устойчивость и запасы устойчивости системы. При этом шаг дискретизации по времени  $T_0$  не может быть произвольно большим и, как правило, для устойчивости ДСУ оказывается *необходимо* выполнение условия  $\lambda_c < 2/T_0 < \pi/T_0$ .

Известно, что амплитудные и фазовые частотные характеристики минимально фазовых систем связаны между собой преобразованием Гильберта. Поэтому для них, в принципе, можно ограничиться построением *только* желаемых ЛАХ, обеспечивающих все требования к качеству управления, а по ним получать выражения соответствующих им желаемых передаточных функций. Для дискретных систем *располагаемая*  $W_0(u)$  и *желаемая*  $W_{ж}(u)$  преобразованные передаточные функции разомкнутой системы всегда содержат в числителях неминимально-фазовые множители, и поэтому такое упрощение в общем случае невозможно.

Поскольку эти множители начинают существенно проявляться только в среднечастотном и высокочастотном диапазонах при  $\lambda > \lambda_c$ , то построение желаемых ЛПЧ там, где  $\lambda \leq \lambda_c$  можно выполнять *без учета их влияния* по методикам теории непрерывных систем, ограничиваясь при этом только построением желаемой ЛАХ. Но для диапазонов, где  $\lambda > \lambda_c$  неминимально-фазовые сомножители в составе  $W_{ж}(u)$  и вносимые ими отрицательные фазовые сдвиги должны быть учтены при построении желаемых ПЧЛХ. При этом формулы и рекомендации методов непрерывной теории должны быть (при заданном  $T_0$ ) соответствующим образом модифицированы [1, 2, 6].

### 11.1.3. Построение желаемых ПЧЛХ при заданном значении $T_0$

Рассмотрим подробнее особенности построения желаемых ПЧЛХ разомкнутой ДСУ для случая, когда требования к запасам устойчивости системы заданы в виде ограничения на величину показателя колебательности  $M$ , а значения шага дискретности по времени  $T_0$  и все коэффициенты  $W_0(u)$  полностью известны. Тогда числитель передаточной функции  $W_0(u)$  дискретного звена приведенной непрерывной части (ДЗ ПНЧ) *обязательно* будет содержать сомножитель  $(1 - 0,5uT_0)$  и, возможно, сомножители вида  $(1 - u\tau_i)$ , коэффициенты которых  $\tau_i$  зависят некоторым сложным образом от заданного значения  $T_0$ .

Пусть при этом  $\lambda_c < 2/T_0$ , а все  $\tau_i < 1/\lambda_c$ , т.е. являются «малыми» [1, 2]. Тогда при  $v=1$  (первый порядок астатизма) можно записать следующий *типовой* вид передаточной функции для разомкнутой скорректированной системы:

$$W(u) = \frac{K(1 + uT_2)(1 - u\frac{T_0}{2})\prod_{i=1}^m (1 - u\tau_i)\prod_{j=1}^r (1 + u\tau_j)}{u(1 + uT_1)(1 + uT_3)(1 + uT_4)\dots(1 + uT_s)}. \quad (11.1)$$

Особенностью типовой  $W(u)$  является *одинаковый* порядок числителя и знаменателя, а также то, что она в обязательном порядке содержит в числителе неминимально-фазовые множители, «унаследованные» от  $W_0(u)$ . Остальные множители числителя и знаменателя относятся либо к корректирующему устройству, либо к  $W_0(u)$ . Если при этом  $T_1 > T_2 > 1/\lambda_c > T_3$ , а все остальные постоянные времени  $T_i$ ,  $i > 3$ , а также  $T_0/2$ ,  $\tau_i$ ,  $\tau_j$  меньше  $T_3$ , то выражению (6.34) будет соответствовать «симметричная» асимптотическая ПЧ ЛАХ, имеющая при  $\lambda = \lambda_c$  «единичный» наклон  $-20$  дБ/дек. Схематичное изображение такой ЛАХ показано на рис.11.2.

В этом случае относительно *суммы* постоянных времени в (6.34), показателя колебательности  $M$  и псевдочастоты среза  $\lambda_c$  справедливы следующие неравенства, известные как *достаточные условия* В.А. Бесекерского:

$$a) T_2 \geq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M-1}; \quad б) \frac{T_0}{2} + \sum_{i=3}^s T_i + \sum_{i=1}^m \tau_i - \sum_{j=1}^r \tau_j \leq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M+1}. \quad (11.2)$$

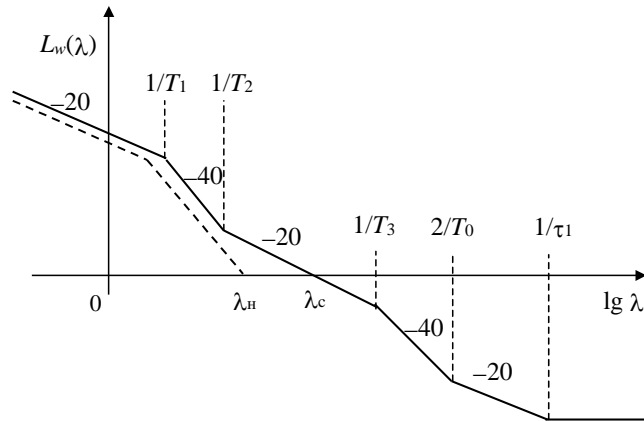


Рис. 11.2. Типовая «симметричная» псевдочастотная ЛАХ

Формулы (11.2) удобно использовать при выборе конкретных числовых значений постоянных времени в выражении для типовой передаточной функции  $W(u)$ , обеспечивающих ей желаемые свойства. Очевидно, что этот выбор неоднозначен и среди множества *допустимых* вариантов следует выбирать тот, который более предпочтителен по другим, например инженерным, критериям. Следует обратить внимание на достаточный характер этих условий. Это значит, что при необходимости условия (11.2) можно несколько нарушить, но тогда требуемое ограничение на величину  $M$  не гарантируется. Правомочность такого «нарушения» выясняется в результате расчета значения показателя  $M$  для системы с выбранными параметрами.

С другой стороны, условие (11.2, б) может оказаться слишком строгим, и удовлетворить ему при положительных (или разумных) значениях постоянных времени невозможно. Тогда следует изменить условия задачи, например, уменьшить значения шага дискретизации  $T_0$  или псевдочастоты среза  $\lambda_c$ . Возможны ситуации, когда требования на качество управления являются завышенными и не соответствуют свойствам заданной неизменяемой части ДСУ. Поэтому согласование и уточнение требований задания на динамический синтез также является одним из необходимых этапов проектирования ДСУ.

Следует помнить, что в общем случае, для других видов типовой передаточной функции  $W(u)$  построение желаемых ПЧ ЛХ во многом носит эмпирический характер и является творческим, плохо формализуемым процессом.

При выборе параметров желаемой передаточной функции (6.34) остаются в силе и следующие общие рекомендации:

1) Значения  $K$ ,  $T_1$  выбирают так, чтобы НЧ часть ЛАХ располагалась возможно ближе к границе запрещенной (по точности) области, *но не заходила* в нее.

2) Величина  $\lambda_c$  должна быть достаточно большой, чтобы существовала возможность расположить желаемую ЛАХ вне запрещенной области. Но увеличивать  $\lambda_c$  сверх необходимой величины нецелесообразно.

3) Постоянные времени  $T_i$  назначают так, чтобы в пределах ограничения на их общую сумму, возможно большее их количество совпадали (по значениям) с постоянными времени в составе  $W_0(u)$ . Это позволит получить более простую передаточную функцию корректирующего звена  $W_k(u)$  с наименьшими порядками полиномов числителя и знаменателя.

4) Расстояние между параллельно расположенными ВЧ асимптотами желаемой и располагаемой ПЧ ЛАХ следует, по возможности, минимизировать. Это приведет к ослаблению помех и уменьшит влияние нелинейностей типа «насыщение» при последующей реализации ДСУ.

#### 11.1.4. Синтез корректирующих звеньев при неизвестном $T_0$

Как указывалось ранее, правильный выбор шага дискретизации по времени  $T_0$  в ДСУ является важной и специфической проблемой, которая решается аналитическим методом только в простейших, не имеющих практического значения, случаях. Для цифровых ДСУ *желательно*, чтобы  $T_0$  принимало возможно большее из допустимых значений – при этом требования к быстродействию ЦВУ будут минимальны [1, 3, 5, 9]. Но для нахождения этого значения необходимо знать передаточную функцию заданной части  $W_0(u)$ , коэффициенты которой сложным нелинейным образом зависят от неизвестного  $T_0$ .

Обычно в частотных методах синтеза ДСУ величину  $T_0$  считают заданной. Иначе невозможно построить графики для располагаемой и желаемой ПЧЛХ разомкнутой системы и, следовательно, нельзя рассчитать оптимальное значение  $T_0$ . Поэтому эта задача может быть решена только итерационным методом, в котором на очередном шаге расчета определяется промежуточный вариант значения  $T_0$  и вариант передаточной функции  $W_{цк}(u)$ . Ниже предлагается один из таких методов, основанный на постепенном усложнении выражения для  $W_{цк}(u)$  и увеличении  $T_0$  на каждой итерации. Количество шагов обычно невелико и зависит от порядка заданной части и от значений малых постоянных времени в составе  $W_0(p)$ . Метод является приближенным и основывается на следующих предположениях:

1) псевдочастота среза скорректированной разомкнутой системы  $\lambda_c < 2/T_0$ . Это условие в подавляющем большинстве ДСУ случаев является *необходимым* для обеспечения устойчивости и требуемого запаса устойчивости;

2) непрерывная часть системы с передаточной функцией  $W_0(p)$  не имеет колебательных и форсирующих звеньев, у которых частоты сопряжения  $\omega_i$  (величины, обратные постоянным времени  $T_i$ ) расположены в окрестности частоты (псевдочастоты) среза или правее ее;

3) передаточная функция непрерывной части  $W_0(p)$  не содержит неминимально-фазовых или неустойчивых сомножителей.

Особенностью метода является то, что для ВЧ диапазона желаемые ЛПЧХ системы *не строятся*, а вместо этого на каждом шаге расчета изменяются передаточная функция последовательного корректирующего устройства и значение  $T_0$  таким образом, чтобы обеспечить требуемую величину показателя колебательности  $M$ . Необходимые для этого проверки на очередном шаге расчета осуществляются с помощью *приближенного* неравенства В.А. Бесекерского относительно «малых» постоянных времени непрерывной части  $T_i^H$ , которые меньше чем  $T_0/2$ .

Важно отметить также, что такой метод не требует предварительного определения аналитических выражений для передаточной функции ДЗ ПНЧ и это делает задачу синтеза *последовательного* дискретного (цифрового) корректирующего устройства не более сложной, чем аналогичная задача для непрерывной системы.

Определение  $W_{цкы}(u)$  и расчет значения  $T_0$  при этом проводится в следующей последовательности:

1. Строится асимптотическая ЛАХ  $L_0(\omega)$  для *непрерывной части* разомкнутой не скорректированной системы, имеющей передаточную функцию  $W_0(p)$ .

2. По требованиям точности и запаса устойчивости (как в случае непрерывной системы) строится *низкочастотная* часть «симметричной» желаемой ЛАХ и *начальная* часть ее среднечастотной асимптоты с наклоном  $-20$  дБ/дек до граничной псевдочастоты  $\lambda_g \geq \lambda_c(1+M^{-1})$ .

Эта частота задает *нижний* предел величины  $2/T_0$ , которой соответствует  $\max(T_0) = 2/\lambda_g$ . Окончательное значение шага дискретности  $T_0$  будет всегда ниже этой границы.

3. Для этого же частотного диапазона ( $0; \lambda_g$ ) строится *частичная* асимптотическая ПЧ ЛАХ ЦКУ и определяется соответствующее ей выражение функции  $W_1(u)$ , в котором порядок числителя оказывается *больше* порядка знаменателя.

4. Ориентируясь на ЦКУ простейшего вида, его передаточную функцию  $W_{цкы}(u)$  сначала выбирают в виде  $W_{цкы}(u) = W_1(u) \cdot W_2(u)$ , где *дополнительный* множитель  $W_2(u) = \prod_i \frac{1}{(1+uT_i^d)}$  вводится для выравнивания порядков числителя и знаменателя передаточной функции  $W_{цкы}(u)$ .

5. Постоянные времени  $T_i^d$ , а также «малые» постоянные времени  $T_i^h$  в составе  $W_0(p)$  непрерывной части включают в левую часть условия В.А. Бесекерского

$$\frac{T_0}{2} + \sum_i T_i^h + \sum_i T_i^d \leq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M+1}. \quad (11.3)$$

Значения всех  $T_i^d$  и  $T_0/2$  здесь выбирают так, чтобы это неравенство выполнялось для всех  $T_i^h < T_0/2$ . Если это удастся сделать и значение  $T_0$  не слишком мало, то расчет ЦКУ и выбор можно считать законченным. В противном случае, получившееся выражение для  $W_{цкы}(u)$

усложняют еще одним дополнительным сомножителем вида  $W_i(u) = \frac{1+uT_{i\max}^h}{1+uT_{i\max}^d}$ . Он *прибли-*

*женно* компенсирует влияние на запас устойчивости по фазе наибольшей из числа "малых" постоянных времени непрерывной части  $T_{i\max}^h$ , а  $T_{i\max}^d$  "подменяет" ее в неравенстве Бесекерского.

Далее, значения  $T_0/2$ ,  $T_i^d$  и  $T_{i\max}^d$  снова выбирают из условия (11.3). Разумеется, что

«скомпенсированная» таким образом постоянная времени  $T_{i\max}^h$  из дальнейших проверок исключается.

Если при этом удастся назначить  $T_0/2 > T_i^h$ , то расчет ЦКУ можно считать законченным.

В противном случае эта же процедура применяется для следующей по величине "малости" постоянной времени среди  $T_i^h$ . При этом выражение для  $W_{цкы}(u)$  усложнится еще одним

множителем и т.д. Необходимо отметить, что значения постоянных времени  $T_i^d$  и  $T_{i\max}^d$  в выражениях для *дополнительно вводимых сомножителей* в составе передаточной функции  $W_{цкы}(u)$  можно изменять в нужную сторону на любом шаге расчета.

Нами были рассмотрены три частотных метода решения задачи динамического синтеза ДСУ, содержащей последовательное корректирующее звено в цепи ошибки: а) метод желаемых частотных характеристик; б) метод последовательного усложнения корректирующего звена (итерационный метод); в) метод аналогового прототипа. Они отличаются уровнем сложности процедуры синтеза и приводят, вообще говоря, к различным передаточным функциям корректирующего звена и значениям шага дискретности  $T_0$ . Для сравнительного анализа и для более детального ознакомления с каждым из них, рассмотрим единый методический пример, на котором демонстрируются порядок применения, особенности и возможности названных методов.

**Пример 11.1.** Требуется выполнить динамический расчет (синтез) ДСУ, предназначенной для воспроизведения задающего сигнала  $X(t)$  по следующим данным:

1) Передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1+pT_a)(1+pT_b)}, \quad (11.4)$$

где  $T_a=0,11$ с;  $T_b=0,009$  с;  $K$  – коэффициент, обеспечивающий необходимую точность воспроизведения задающего сигнала.

2) Максимальная скорость изменения задающего сигнала  $X'_{\max} = 1,7B/c$ .

3) Максимальное ускорение задающего сигнала  $X''_{\max} = 2,9B/c^2$ .

4) Максимальная относительная динамическая ошибка  $e_{\text{отн}}=0,58\%$ .

5) Рекомендуемое значение показателя колебательности  $M = 1,3$ .

*Решение.* При расчете ДСУ частотными методами будем ориентироваться на *типовую асимптотическую ЛАХ «симметричного вида»* для системы с астатизмом первого порядка, которая имеет коэффициенты кратности наклонов асимптот: 1–2–1–2.

Желаемая ЛАХ в НЧ и СЧ диапазонах, т.е. там, где  $\omega \approx \lambda$ , строится так же, как и для непрерывной системы. Она не должна заходить в запрещенную (по точности) область, которая строится по параметрам эквивалентного гармонического сигнала и заданной величине относительной динамической ошибки  $e_{\text{отн}}$ .

Определим частоту  $\omega_x$  эквивалентного гармонического сигнала и значение ординаты  $L_x$  контрольной точки **В** (угловая точка запретной области):

$$\omega_x = \frac{X''_{\max}}{X'_{\max}} = 1,7 \text{ с}^{-1}; L_x = -20 \lg(e_{\text{отн}}) = 44,6 \text{ дБ}. \quad (11.5)$$

Вид запретной области и другие построения для рассматриваемого примера показаны на рис. 11.2. Нижнюю границу для коэффициента усиления разомкнутого контура системы рассчитываем по формуле

$$K_{\min} = \frac{X''_{\max}}{X'_{\max} e_{\text{отн}}} = 291. \quad (11.6)$$

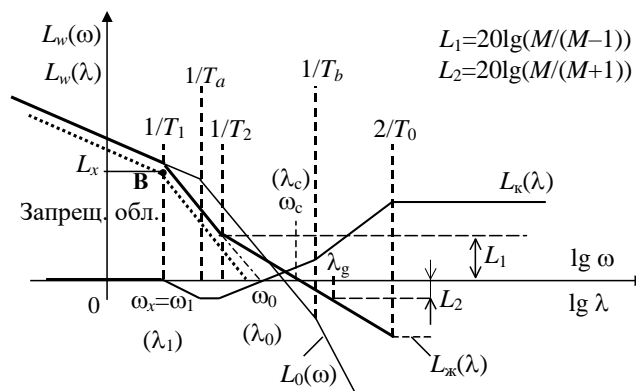


Рис. 11.2. Схематическое изображение ЛАХ для примера 6.2

Ориентируясь на минимальную частоту среза  $\omega_c \approx \lambda_c$  и возможно меньшее значение коэффициента усиления разомкнутой системы  $K$ , назначим частоту сопряжения первой и второй асимптот с наклонами  $-20$  и  $-40$  дБ/дек:  $\lambda_1 \approx \omega_1 = \omega_x = 1,7 \text{ с}^{-1}$ . Ей будет соответствовать постоянная времени  $T_1=0,588$  с.

Для того, чтобы при  $\omega = \omega_1$  точная ЛАХ располагалась *не ниже* контрольной точки **В**, выберем  $K = \sqrt{2} K_{\min} = 410$ . Это соответствует смещению вверх на 3 дБ желаемой асимптотической ЛАХ относительно границы запрещенной области.

ЛАХ непрерывной части системы  $L_0(\omega)$  с *выбранным* коэффициентом усиления схематично (без соблюдения масштаба) изображена на рис.11.2. Определим «базовую» частоту для желаемой ЛАХ  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = 26,41 \text{ с}^{-1}$ . Эта часть процедуры синтеза последовательного корректирующего звена является общей для рассматриваемых частотных методов. Но дальнейшие действия в них различаются.

♦ *Применение итерационного метода.* Этот метод является приближенным, поэтому для получения более надежного результата относительно запасов устойчивости, зададим значение показателя колебательности  $M = 1,265 < 1,3$ . Тогда минимальная частота среза для разомкнутой системы определится по формуле  $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 58 \text{ с}^{-1}$ . Частоту сопряжения  $\omega_2$  второй асимптоты с наклоном  $-40$  дБ/дек с третьей (среднечастотной) асимптотой, имеющей наклон  $-20$  дБ/дек определяем в соответствии с границей неравенства Бесекерского (11.2, а). При этом получим  $\omega_2 = \omega_c(1 - M^{-1}) = 12,048 \text{ с}^{-1}$ . Ей соответствует  $T_2 = 0,083 \text{ с}$ .

Определим *границную* псевдо частоту  $\lambda_g = \lambda_c(1 + M^{-1}) = 104 \text{ с}^{-1}$ . Вычитая графики  $L_{ж}(\lambda)$  и  $L_0(\lambda) \approx L_0(\omega)$  в диапазоне  $(0; \lambda_g)$ , определим *частичную* ЛАХ корректирующего звена и соответствующую ей функцию:

$$W_1(u) = \frac{(1 + uT_a)(1 + uT_2)}{1 + uT_1}.$$

Поскольку порядок числителя для этой функции получился больше порядка знаменателя, то передаточную функцию последовательного корректирующего звена усложним дополнительным сомножителем:

$$W_k(u) = \frac{(1 + uT_a)(1 + uT_2)}{1 + uT_1} \frac{1}{1 + uT_1^{\Delta}}.$$

Здесь  $T_1^{\Delta}$ , а также  $T_0/2$  выбираются из условия Бесекерского (11.3), которое в данном случае имеет вид  $T_0/2 + T_b + T_1^{\Delta} \leq 1/\lambda_g = 0,00962$ .

Отсюда следует, что  $T_0/2 + T_1^{\Delta} \leq 0,00962 - 0,009 = 0,00062$ . В данном случае, при любом выборе  $T_1^{\Delta}$ , условие «малости» для  $T_b$  выполняться не будет и ее необходимо компенсировать, усложняя передаточную функцию корректирующего звена дополнительным сомножителем  $W_2(u) = \frac{1 + uT_b}{1 + uT_2^{\Delta}}$ . Тогда выражение для  $W_k(u)$  примет следующий вид

$$W_k(u) = \frac{(1 + uT_a)(1 + uT_2)}{1 + uT_1} \frac{1}{1 + uT_1^{\Delta}} \frac{1 + uT_b}{1 + uT_2^{\Delta}}.$$

Значения  $T_1^{\Delta}$ ,  $T_2^{\Delta}$  и  $T_0/2$  должны удовлетворять условию В.А. Бесекерского, т.е.  $T_0/2 + T_1^{\Delta} + T_2^{\Delta} \leq 1/\lambda_g = 0,00962$ . Выбираем  $T_0/2 = T_1^{\Delta} = T_2^{\Delta} = 0,0032 \text{ с}$ . Тогда величина шага дискретности по времени  $T_0 = 0,0064 \text{ с}$ .

Окончательное выражение для передаточной функции последовательного корректирующего звена принимаем в следующем виде:

$$W_k(u) = \frac{(1 + 0,11u)(1 + 0,083u)}{1 + 0,588u} \frac{1 + 0,009u}{(1 + 0,0032u)^2}. \quad (11.7)$$

Соответствующая этому выражению *асимптотическая* псевдочастотная ЛАХ схематично показана на рис. 11.2. Компьютерное моделирование синтезированной ДСУ в программных пакетах VisSim и Mathcad показало, что для нее перерегулирование  $\sigma=25\%$ ; время регулирования  $t_p=0,107$ с; значение показателя колебательности  $M = 1,23$ ; запас по фазе  $\varphi_3= 0,9$ ; запас по амплитуде  $L_3= 11,4$  дБ.

## Лекция №12

### Тема: «Частотная область: Переоборудование НСАР в ЦСАР»

#### Предварительные замечания

Приближенная замена устройства «выборки-хранения» (УВХ) *звеном запаздывания* на  $\tau=0,5T_0$  с передаточной функцией  $W_e(p)=e^{-p\tau}$  позволяет для некоторых дискретных систем *при выполнении определенных условий* рассматривать «эквивалентные» им (в смысле близости динамических свойств) непрерывные системы. Их можно получить из условия информационной эквивалентности Котельникова–Шеннона дискретных и непрерывных сигналов в контуре управления. При выполнении таких условий появляется возможность исследовать свойства ДСАУ методами непрерывной теории. *Простейшим* примером такой системы является ДСАР, содержащая в прямой цепи УВХ и линейную непрерывную часть с передаточной функцией  $W_0(p)$  и частотой среза  $\omega_c$ . Структурная схема такой ДСАР изображена на рис. 12.1.

Так как в этой ДСАР граница спектра сигнала на входе УВХ  $\omega_s \approx \omega_c$ , то при  $T_0 < 2/\omega_c$  УВХ можно *приблизительно* заменить звеном запаздывания на время  $\tau=T_0/2$ . В результате получается *эквивалентная непрерывная система* (рис. 12.2).

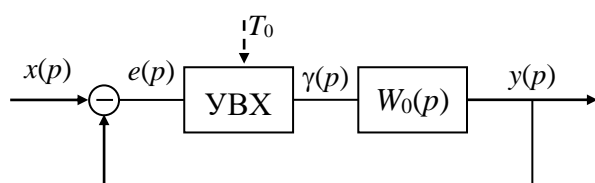


Рис. 3.9. Простейшая дискретная САР

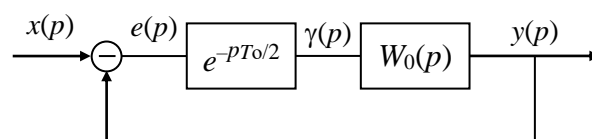


Рис. 12.2. Эквивалентная непрерывная система

Назовем «предельной» систему, получаемую из эквивалентной непрерывной системы при  $\tau=0$ . Различие динамических свойств этих двух систем определяется наличием звена запаздывания. При этом для обеих разомкнутых систем амплитудные частотные характеристики (АЧХ) будут одинаковыми, а фазовые частотные характеристики будут отличаться на ФЧХ звена запаздывания, которое на частоте  $\omega$  вносит фазовый сдвиг  $\Delta\varphi = -\omega T_0/2$ . Поэтому запас устойчивости эквивалентной непрерывной системы будет *всегда меньше* запаса устойчивости предельной системы на величину  $\Delta\varphi_3 = \omega_c \tau = \omega_c T_0/2$ .

Задавая предельную величину уменьшения запаса устойчивости  $\Delta\varphi_3$ , можно определить наибольшее допустимое значение периода дискретности:

$$T_0 \leq \frac{2\Delta\varphi_3}{\omega_c}. \quad (12.1)$$

Максимально допустимую величину  $\Delta\varphi_3$  удобно задавать в долях от значения запаса устойчивости по фазе *предельной* системы, например  $\Delta\varphi_3=0,1\varphi_3$ . При этом значение  $\varphi_3$  должно быть измерено в *радианах*. «Эквивалентная» система представляет собой приближенную непрерывную модель исходной дискретной системы. С ее помощью без применения специального математического описания и методов дискретной теории, можно исследовать устойчивость, качество и вид процессов в простейшей импульсной системе.

В качестве второго, более сложного примера на эту же тему рассмотрим микропроцессорную САР со структурной схемой, показанной на рис. 12.3.

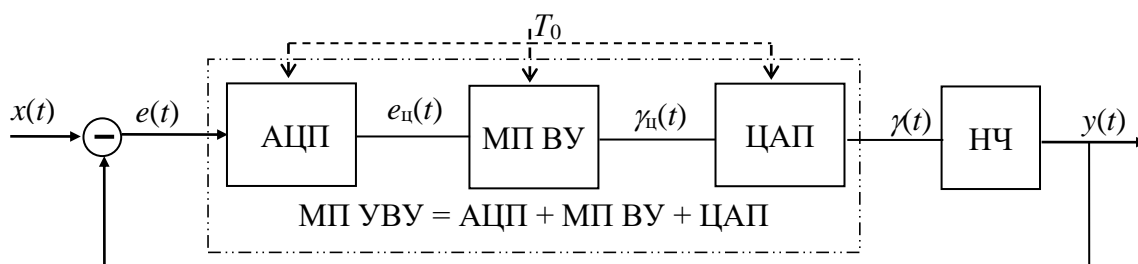


Рис. 12.3. Микропроцессорная САР



Предположим сначала, что оператор преобразования МП ВУ тривиальный (единичный), т.е.  $A_k = 1$ . Тогда управляющее вычислительное устройство МП УВУ, работающее по циклической программе с периодом  $T_0$ , эквивалентно по своему действию УВХ: АЦП выполняет выборку дискретных значений сигнала, а ЦАП – их запоминание (хранение) на  $T_0$ . Если непрерывная часть НЧ имеет передаточную функцию  $W_0(p)$  и частоту среза  $\omega_c$ , то при  $T_0 < 2/\omega_c$  для исследования такой МП САР можно рассматривать «эквивалентную» непрерывную систему, изображенную на рис.12.2. Кроме того, выбором  $T_0$  в соответствии с (12.1), можно обеспечить запас по фазе для МП САР близким к запасу устойчивости «предельной» непрерывной системы и отличающимся от него примерно на величину  $\Delta\varphi_3$ . Предельная система в этом случае играет роль своеобразного эталона и ее называют «аналоговым прототипом» МП САР.

Рассмотрим более сложный вариант МП САР, когда оператор преобразования МП ВУ не тривиальный ( $A_k \neq 1$ ), а задан с помощью передаточной функции  $W_{\text{нкы}}(z)$ . На основе структурного метода представим одну из промежуточных эквивалентных схем МП СУ в виде, изображенном на рис. 12.4.

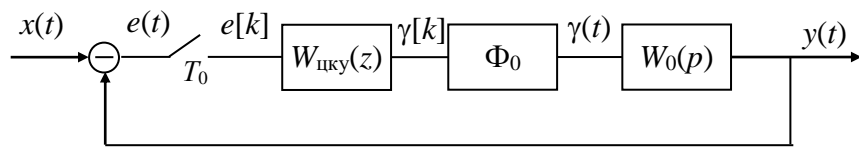


Рис. 12.4. Промежуточная эквивалентная структурная схема МП САР

Пусть  $\omega_s$  – аналог частоты среза разомкнутой системы, т.е. такая частота, на которой амплитуда сигнала ошибки  $e(t)$ , меняющейся по гармоническому закону, примерно равна амплитуде колебаний выходного сигнала  $y(t)$ . Тогда, при достаточно малом значении периода дискретности, когда выполняется условие  $T_0 < 2/\omega_s < \pi/\omega_s$ , для исходной МП СУ можно рассмотреть «эквивалентную» непрерывную систему, структурная схема которой изображена на рис. 12.5.

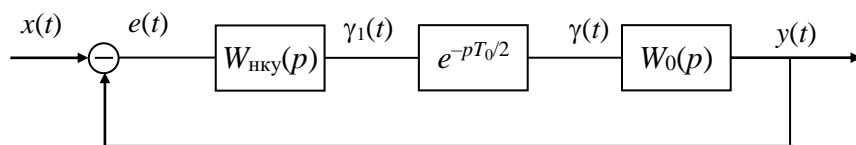


Рис. 12.5. Эквивалентная непрерывная система для МП САР

Здесь  $W_{\text{нкы}}(p)$  – передаточная функция непрерывного линейного звена (корректирующего устройства), получаемая из передаточной функции  $W_{\text{нкы}}(z)$  в результате дробно-линейной подстановки следующего вида:

$$z = \frac{1 + p \frac{T_0}{2}}{1 - p \frac{T_0}{2}} = \frac{2 + pT_0}{2 - pT_0}. \quad (12.2)$$

Такая подстановка соответствует приближенной замене процедуры численного интегрирования по методу трапеций непрерывной операцией интегрирования:

$$\frac{T_0(\sigma + \sigma_1)f[k]}{2} \approx \int_0^t f(t)dt. \quad (12.3)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\sigma_1$ , соответственно, – это операторы неполного и полного суммирования, определенные на множестве функций дискретного аргумента.

Иногда для тех же целей *при малых* значениях периода дискретности  $T_0$  применяют более простые подстановки вида  $z = 1 + pT_0$  или  $z = (1 - pT_0)^{-1}$ , которые соответствуют численному интегрированию по методу прямоугольников (методы Эйлера-I и Эйлера-II). Формально эти выражения совпадают с двумя первыми слагаемыми разложений в степенные ряды функций  $z = e^{pT_0}$  и  $z^{-1} = e^{-pT_0}$ :

$$z = e^{pT_0} = 1 + pT_0 + (pT_0)^2 + \dots; \quad z^{-1} = e^{-pT_0} = 1 - pT_0 + (-pT_0)^2 + \dots \quad (12.4)$$

Важно отметить, что с получением «эквивалентной» непрерывной модели МП СУ, далее отрывается возможность исследования ее свойств и особенностей методами и средствами непрерывной теории управления.

Для рассматриваемой МП СУ с ЦКУ «предельная» непрерывная система (*аналоговый прототип*) может быть получена из «эквивалентной» непрерывной системы удалением звена запаздывания. Структурная схема такой предельной непрерывной системы представлена на рис. 12.6.

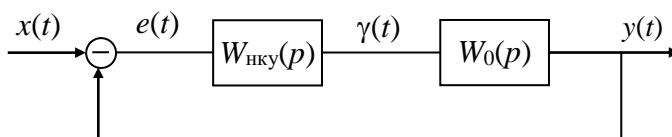


Рис. 12.6. Система – "аналоговый прототип" для МП САР

Различие динамических свойств "эквивалентной" непрерывной и "предельной" систем определяется влиянием запаздывания на  $\tau = T_0/2$ . Эти свойства будут мало отличаться, если период дискретности  $T_0$  достаточно мал. Тогда запас устойчивости по фазе эквивалентной непрерывной системы, (а значит и МП САР), будет всегда *меньше* чем в предельной непрерывной системе (прототипе), имеющей частоту среза  $\omega_c$ , на величину  $\Delta\varphi_3 = \omega_c T_0/2$ .

Приведенные выше результаты могут служить основой простого инженерного метода синтеза МП САР, который называется методом «аналогового прототипа». Он позволяет назначить шаг дискретности по времени  $T_0$  (период повторения программы МП ВУ) и передаточную функцию  $W_{цкц}(z)$ , обеспечивающие выполнение заданных требований и ограничений на качество процесса управления.

Суть этого метода состоит в том, что по заданным требованиям технического задания *предварительно* выполняется динамический синтез непрерывной системы-прототипа (см. рис. 12.6). В результате этого становится известной передаточная функция последовательного непрерывного корректирующего устройства  $W_{нкц}(p)$ , а также частота среза  $\omega_c$  разомкнутой системы-прототипа и запас ее устойчивости по фазе  $\varphi_3$  (в радианах!). В тех случаях, когда ставится задача модернизации ("переоборудование") уже существующей непрерывной САР с переходом от непрерывного управления к цифровому, эта информация также известна.

Зная частоту среза  $\omega_c$  и запас устойчивости  $\varphi_3$  системы-прототипа, по формуле (12.1) можно определить необходимое значение периода дискретности  $T_0$ , обеспечивающего допустимое *уменьшение* запаса устойчивости МП САР (по сравнению с прототипом!) *примерно* на величину  $\Delta\varphi_3 = \delta \cdot \varphi_3$ . Значение  $\delta$  обычно задают в диапазоне  $0,05 \dots 0,1$ . Это соответствует ухудшению запаса устойчивости на  $(5 \div 10)\%$  относительно системы-прототипа. А так как при таком подходе запас устойчивости по фазе МП САР *всегда будет меньше*, на величину  $\delta \cdot \varphi_3$ , то при расчете прототипа требования к  $\varphi_3$  необходимо соответствующим образом изменить.

Передаточную функцию цифрового корректирующего устройства  $W_{\text{цкы}}(z)$  в составе МП СУ можно получить из передаточной функции  $W_{\text{нкы}}(p)$  формальной заменой переменной в соответствии с выбранным способом аппроксимации оператора интегрирования (см. табл. 12.1).

Таблица 12.1

**Методы приближений при интегрировании**

Метод интегрирования	Подстановка для $z$	Подстановка для $p$	Формула аппроксимации
Трапеций	$z = \frac{2 + pT_0}{2 - pT_0}$	$p = \frac{2}{T_0} \frac{z - 1}{z + 1}$	$\frac{T_0(\sigma + \sigma_1)f[k]}{2} \approx \int_0^t f(t)dt$
Эйлера-I	$z = 1 + pT_0$	$p = \frac{z - 1}{T_0}$	$T_0\sigma f[k] \approx \int_0^t f(t)dt$
Эйлера-II	$z = (1 - pT_0)^{-1}$	$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_0}$	$T_0\sigma_1 f[k] \approx \int_0^t f(t)dt$

Напомним еще раз, что подстановки для  $z$  и  $p$  из таблицы 12.1 можно использовать *только* для определения передаточных функций *корректирующих устройств* при получении «эквивалентной» непрерывной системы и при переходе от «аналогового прототипа» к МП САР. Во всех других случаях такие подстановки недопустимы. Кроме того необходимо отметить, что метод Эйлера-I имеет существенное ограничение: его можно применять *только тогда*, когда все постоянные времени знаменателя в выражении для  $W_{\text{нкы}}(p)$  *больше* величины  $0,5T_0$ . В противном случае  $W_{\text{цкы}}(z)$  будет иметь часть полюсов с модулем больше единицы и ЦКУ окажется неустойчивым. Подобных проблем не возникает в двух других методах. Из них наиболее часто при «переоборудовании» непрерывной системы в цифровую систему используют метод трапеций.

Достоинством метода аналогового прототипа является его исключительная простота, «плата» за которую – несколько завышенные требования к частоте дискретизации, а значит и к быстродействию МП ВУ. Однако на фоне современных достижений в областях микроэлектроники и микропроцессорной техники указанный недостаток метода становится все менее существенным. Другие методы синтеза МП СУ более сложны и требуют применения специальных знаний из теории дискретных систем управления.

Пример 12.1 (см. исходные данные из Примера 11.1):  
Передаточная функция непрерывной части (11.4)

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1 + pT_a)(1 + pT_b)},$$

где  $T_a=0,11\text{с}$ ;  $T_b=0,009\text{ с}$ ;  $K$  – коэффициент, обеспечивающий необходимую точность воспроизведения задающего сигнала.

♦ *Применение метода аналогового прототипа.* Основные положения метода рассмотрены выше. В соответствии с его рекомендациями, сначала выполняется динамический синтез непрерывной системы-прототипа, обеспечивающей выполнение всех требований задания на проектирование. Для исходных данных рассматриваемого примера наиболее удобен расчет в частотной области с использованием понятий эквивалентного гармонического сигнала, типовой

ЛАХ *симметричного* типа и методики В.А. Бесекерского. Все построения при этом будут аналогичны тем, которые показаны на рис. 11.2.

Поскольку переход от непрерывной системы к цифровой ДСУ всегда связан с уменьшением запасов устойчивости, то при расчете прототипа повысим требования к его запасу устойчивости, полагая, например,  $M = 1.265 < 1.3$ .

Тогда передаточную функцию последовательного *непрерывного* корректирующего звена можно принять в виде

$$W_k(p) = \frac{(1+0,11p)(1+0,083p)}{1+0,588p} \frac{1+0,009p}{(1+0,006p)(1+0,0032p)}. \quad (12.4-a)$$

Исследование скорректированной *непрерывной* системы-прототипа в среде программного пакета VisSim получены следующие показатели качества: частота среза  $\omega_c=58 \text{ с}^{-1}$ ; запас устойчивости по фазе  $\varphi_3= 0,8$ ; показатель колебательности  $M = 1,22$ ; перерегулирование  $\sigma = 22\%$ ; время регулирования  $t_p= 0,11 \text{ с}$ .

Определим величину шага дискретности  $T_0$ , задаваясь ухудшением запаса по фазе ДСУ по сравнению с прототипом примерно на 10%:  $T_0 \leq \frac{0,2\varphi_3}{\omega_c} \approx 0,003 \text{ с}$ .

При использовании *метода трапеций* для аппроксимации оператора интегрирования, передаточная функция дискретного (цифрового) корректирующего звена  $W_k(u)$  может быть получена из передаточной функции непрерывного аналога  $W_k(p)$  формальной заменой  $p=u$ .

Моделирование ДСУ с таким корректирующим звеном в среде VisSim показало, что перерегулирование  $\sigma=28\%$ ; время регулирования  $t_p= 0,09 \text{ с}$ ;  $M=1,28$ ; запас по фазе  $\varphi_3=0,84$ ; запас по амплитуде  $L_3=12 \text{ дБ}$ .

♦ *Применение метода типовых желаемых ЛАХ.* Шаг дискретности по времени в этом методе считается заданным. Пусть, например  $T_0 = 0,004 \text{ с}$ . Передаточную функцию ДЗ ПНЧ  $W_0(u)$  определим с помощью *обособленного*  $D_u$ -преобразования, рассмотренного (см. *Лекция №9*), назначив границей НЧ и ВЧ диапазонов частоту  $\omega_{гр} = 2/T_0=500 \text{ с}^{-1}$ .

Так как при значении  $T_b=0,009$  на частоте  $\omega_{гр}$  единственная высокочастотная асимптота ЛАХ для  $W_0(p)$  имеет наклон  $-60 \text{ дБ/дек}$ , то для построения псевдочастотных логарифмических характеристик для  $W_0(u)$  в ВЧ диапазоне, где  $\lambda > 2/T_0$ , можно воспользоваться следующим *приближенным* выражением (см. формулу (9.10) при  $v=3$ ):

$$W_0(u) \approx W_{вч}(u) = \tilde{D}_u \left( \frac{K_x}{p^3} \right) = \frac{K_x \left( 1 - u \frac{T_0}{2} \right) \left( 1 + u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right) \left( 1 - u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right)}{u^3}. \quad (12.5)$$

В НЧ диапазоне, где  $\lambda < 2/T_0$  для той же цели используют другое приближенное выражение  $W_0(u) \approx W_{нч}(u) = W_0(p)|_{p=u}$ . Но так как в НЧ диапазоне сомножитель  $(1 - uT_0/2)$  проявляется незначительно, а в ВЧ диапазоне  $W_{нч}(u)$  проявляется как  $K_x/u^3$ , то для построения ПЧ ЛАХ для дискретного звена приведенной непрерывной части во всем диапазоне удобно использовать объединенное приближенное выражение

$$W_0(u) \approx \frac{K \left( 1 - u \frac{T_0}{2} \right) \left( 1 + u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right) \left( 1 - u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right)}{u(1 + uT_a)(1 + uT_b)}. \quad (12.6)$$

Величину коэффициента усиления  $K=410$ , обеспечивающего требуемую точность воспроизведения задающего воздействия с ограниченными значениями первой и второй производной, выберем так же, как и ранее в других методах.

Подставляя в (12.6) численные значения параметров, получим дискретную передаточную функцию «неизменяемой» части ДСУ:

$$W_0(u) = \frac{410(1-0,002u)(1+0,00115u)(1-0,00115u)}{u(1+0,11u)(1+0,009u)}. \quad (12.7)$$

Далее, ориентируясь на «симметричную» ПЧ ЛАХ разомкнутой ДСУ и на выражения (11.1), (12.7), запишем, с учетом условий грубости, передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы в следующем виде:

$$W(u) = \frac{410(1+uT_2)(1-0,002u)(1+0,00115u)(1-0,00115u)}{u(1+uT_1)(1+uT_3)(1+uT_4)}. \quad (12.8)$$

Неизвестные постоянные времени, а также характерные параметры типовой ЛАХ назначаются из условий (11.2) с учетом инженерных рекомендаций к величине псевдочастоты среза и помехоустойчивости ДСУ при  $M = 1,3$ :

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \text{ где } \lambda_1 \approx \omega_x - \text{частота «эквивалентного» гармонического сигнала;}$$

$$\lambda_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = 26,41 \text{ с}^{-1} - \text{базовая частота для типовой «симметричной» ЛАХ;}$$

$$\lambda_c = \lambda_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 55 \text{ с}^{-1}; \lambda_g = \lambda_c(1+M^{-1}) = 98 \text{ с}^{-1}; \lambda_2 \leq \lambda_c \left(1 - \frac{1}{M}\right) = 12,7 \text{ с}^{-1};$$

$$T_2 \geq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M-1} = 0,08 \text{ с;}$$

$$\frac{T_0}{2} + T_3 + T_4 + \tau_1 = 0,002 + T_3 + T_4 + 0,00115 \leq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M+1} = 0,0103 \text{ с;}$$

$$T_3 + T_4 \leq 0,00714 \text{ с. Выберем } T_3 = T_4 = 0,0037 \text{ с.}$$

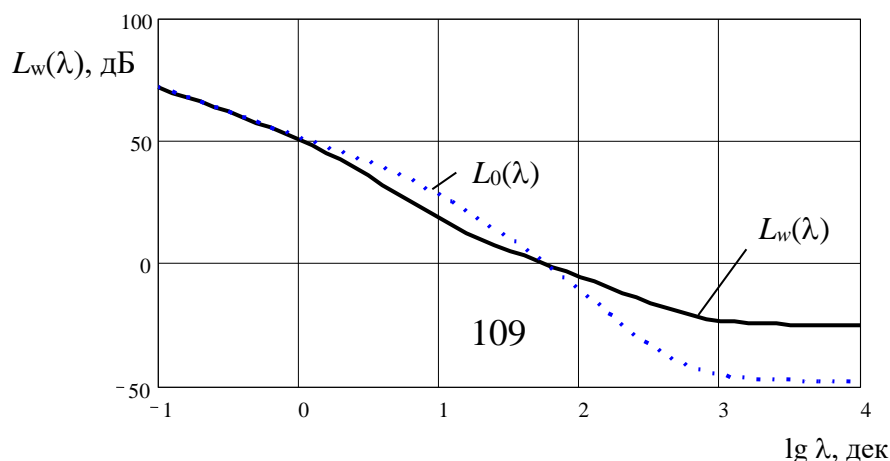
Передаточную функцию последовательного корректирующего звена найдем как частное от деления желаемой передаточную функцию (12.8) на передаточную функцию неизменяемой части ДСУ:

$$W_k(u) = \frac{W(u)}{W_0(u)} = \frac{(1+0,08u)(1+0,11u)(1+0,009u)}{(1+0,588u)(1+0,0037u)^2}. \quad (12.9)$$

При исследовании синтезированной этим методом ДСУ средствами программных пакетов VisSim и Mathcad были получены следующие показатели качества:

- а) перерегулирование  $\sigma=24\%$ ; б) время переходного процесса  $t_p=0,114 \text{ с}$ ;
- в) показатель колебательности  $M=1,23$ ; г) запас по фазе  $\varphi_3=0,9$ ;
- д) запас по амплитуде  $L_3=11 \text{ дБ}$ .

Графики псевдочастотных характеристик разомкнутой и замкнутой скорректированной ДСУ, а также реакция на единичный ступенчатый сигнал (переходная функция) показаны на рис. 12.8 – рис. 12.11.



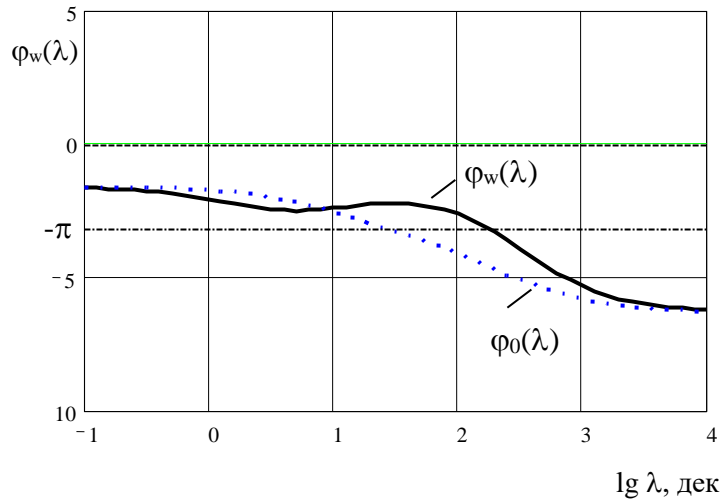


Рис. 12.9. ПЧ ЛФХ ДСАР

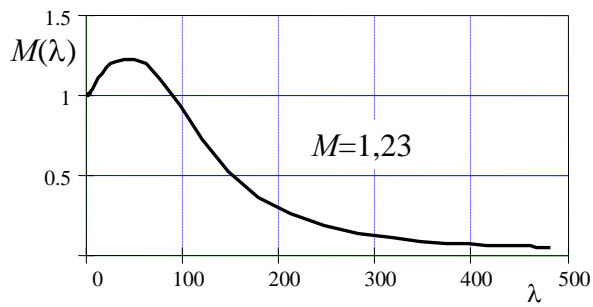


Рис. 12.10. Амплитудная ПЧХ замкнутой ДСАР

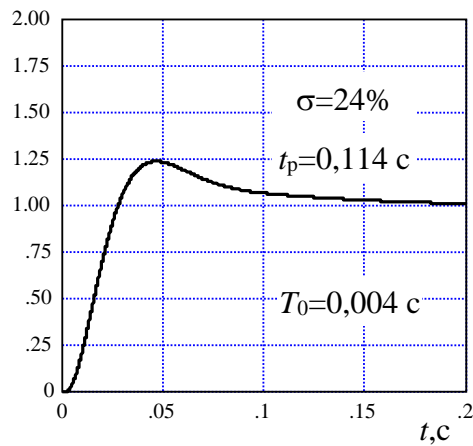


Рис. 12.11. Переходная функция ДСАР

Сравнивая результаты синтеза ДСУ по трем методам, можно сделать следующие выводы:

- 1) сложность передаточных функций (порядки полиномов числителей и знаменателей передаточных функций) получаемых последовательных корректирующих звеньев одинакова;

- 2) шаг дискретности  $T_0$  при использовании метода аналогового прототипа получается примерно в два раза меньше, а перерегулирование больше;
- 3) метод аналогового прототипа существенно проще в применении, чем другие, и во многих случаях позволяет быстро получать вполне приемлемые для практических целей результаты.
- 4) итерационный метод позволяет получить большее значение шага дискретности по времени  $T_0$ .

### Заключение

Современной тенденцией развития и совершенствования технических средств управления является широкое применение устройств *дискретного действия* взамен традиционных непрерывных. Особенно это касается цифровых вычислительных устройств разных типов и производительности, которые сейчас повсеместно используются не только на верхних, но и на нижних, исполнительных, уровнях управления, где обычно решаются задачи *регулирования* текущих значений управляемых переменных. Прерывистый характер сигналов в таких технических устройствах и сопутствующая этому дискретизация по времени информационных параметров вносят ряд существенных особенностей в динамику процессов управления, а также в методы их математического описания и исследования. Непосредственное применение методов непрерывной теории для решения возникающих при этом задач оказалось невозможным даже в простейших случаях, и поэтому возникла объективная необходимость в разработке специальных методов теории дискретных систем управления.

В настоящее время уровень развития этой теории не ниже, чем для непрерывных систем управления, а в методологическом плане, фактически, во многом повторяет ее. Практически все методы и понятия непрерывной теории, за редким исключением, были распространены (обобщены с учетом особенностей) на дискретные системы управления. Это касается и многомерных, и нелинейных, и стохастических, и нестационарных ДСУ. Такая ситуация сложилась исторически, хотя в принципиальном плане, наверное, возможно было бы разрабатывать и создавать только теорию дискретных систем управления, а непрерывные системы рассматривать как их предельный частный случай при стремлении шага дискретизации по времени  $T_0$  к нулю.

В нашем учебном пособии мы сознательно ограничились рассмотрением только *основ* классического подхода в теории одномерных, стационарных, линейных ДСУ. Усвоение приведенных в пособии базовых понятий и методов позволит, при необходимости, облегчить изучение других, более сложных разделов теории дискретных систем управления, а также, возможно, по-новому взглянуть на некоторые результаты теории непрерывных систем.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесекерский, В.А. Цифровые автоматические системы/В.А. Бесекерский. – М.: Наука, 1976.
2. Бесекерский, В.А., Ефимов Н.Б., Зиатдинов С.И. Микропроцессорные системы автоматического управления/В.А. Бесекерский, Н.Б. Ефимов, С.И. Зиатдинов. – Л.: Машиностроение, 1988.
3. Шамриков, Б.М. Основы теории цифровых систем управления/Б.М. Шамриков. – М.: Машиностроение, 1985.
4. Остром, К. Системы управления с ЭВМ/К. Остром, Б.Виттенберг. – М.: Мир, 1980.
5. Изерман, Р. Цифровые системы управления/Р. Изерман/. – М.: Мир, 1984.
6. Иванов, В.А. Теория дискретных систем управления/В.А. Иванов, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1983.
7. Цыпкин, Я.З. Основы теории автоматических систем/Я.З. Цыпкин. – М.: Наука, 1977.
8. Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления/Б. Куо. –М.: Машиностроение, 1986.

9. Зырянов, Г.В. Линейные дискретные системы управления/Г.В. Зырянов.– Челябинск: ЮУрГУ, 2005.
10. Зырянов, Г.В. Системы управления многосвязными объектами/Г.В. Зырянов.– Челябинск: ЮУрГУ, 2010.
11. Стрейц, В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления/ В.Стрейц.–М.: Наука, 1985.

## Часть вторая

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### Общие сведения о системах и теории управления

Под управлением понимается процесс формирования и реализации специально организованных (управляющих) воздействий на некоторый материальный объект, которые способствуют достижению какого-либо желаемого результата (цель управления). Как правило, возмущающие воздействия со стороны внешней среды (температура, давление, влажность, условия движения и другие), активно препятствуют этому. Для ослабления (нейтрализации) нежелательного влияния возмущений и ликвидации его последствий используется: органы управления (УО), конструктивно входящие в состав объекта управления (ОУ); исполнительные механизмы (ИМ); управляющее устройство (УУ) – регулятор (контроллер); измерительный (ИЭ) – первичный преобразователь (датчик) и устройство сравнения.

Структура системы управления процессом приведена на рис.2.1.

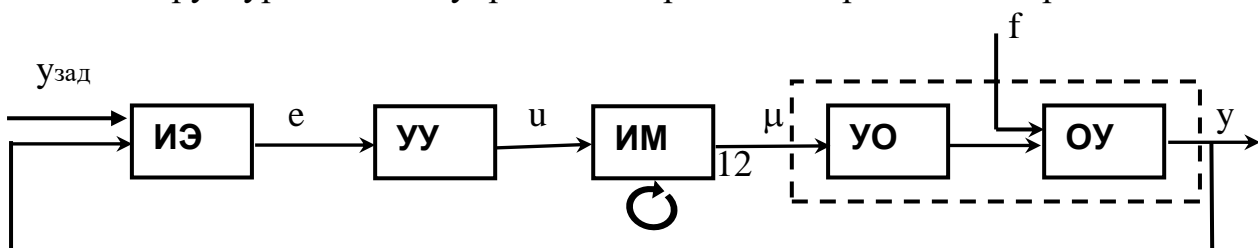




Рис.2.1. Структура система управления с обратной связью

Обозначения основных переменных системы управления:  $y$  – управляемая переменная (выход объекта);  $\mu$  – управляющее воздействие (энергетическое);  $u$  – управляющее воздействие (информационное);  $e$  – отклонение управляемой переменной от заданного значения  $u_{\text{зад}}$  или ошибка системы;  $f$  – возмущающие воздействия среды.

Операции автоматического управления реализуются в следующих основных функциональных элементах: объекте управления, измерительных элементах, управляющем устройстве и исполнительном механизме.

Совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов образуют систему управления, если она способна к достижению цели.

Системы управления представляют собой класс динамических систем, отличающихся наличием цели и специальной организационной структуры, позволяющий достичь эту цель. Подобные системы функционируют в живой и неживой природе, в самых различных областях экономики, технике, природе. Однако, независимо от области функционирования, их объединяет в особый класс ряд системных свойств и признаков.

### 2.1. Объекты управления.

Объект управления (ОУ) реализует некоторый процесс для того, чтобы организовать и обеспечить достижение поставленной цели. В теории управления объект рассматривают как преобразователь переменных входа  $u(t)$  и  $f(t)$  в переменную выхода  $y(t)$ , см. рис. 2.2.

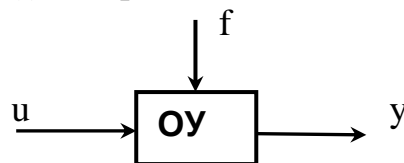


Рис.2.2. Абстрактный объект управления

Цель управления определяет ограничения на переменную выхода  $y(t)$ . Неконтролируемые воздействия среды  $f(t)$ , называются возмущениями, которые вызывают нежелательные отклонения выхода объекта. Для уменьшения этих отклонений на объект оказывают необходимые управляющие воздействия  $u(t)$ . Если переменные входа и выхода объекта являются векторами, то его называют многомерным.

Теория управления изучает общие закономерности, характерные системам управления независимо от их природы. Объекты управления могут быть техническими, экономическими, биологическими и другие.

### Технические объекты.

Примерами технических объектов являются движущиеся объекты (автомобили, изделия ракетно-космической техники, движущая среда), объекты энергетики (печи, теплообменники, парогенераторы, двигатели другие преобразователи

энергии), технологические установки промышленности (аппараты, емкости, реакторы, автоклавы, ректификационные колонны, мешалки и другие аппараты), объекты бытовой техники (холодильники, кондиционеры, утюги, устройства электроники и т.д.).

Управляющими переменными для технических объектов являются физико-химические переменные, определяющие их состояние или поведение (механические координаты, температура, давление, концентрация компонентов в смеси, электрическое напряжение и т.д.).

#### Экономические объекты.

Экономическими объектами являются: цех, завод, отрасль, предприятия торговли и сферы услуг; банки, страховые компании и т.п. Общим для них является то, что в качестве одной из обобщенных управляющих переменных рассматривается прибыль.

Разнообразие по характеру своей деятельности предприятия (фирмы) производственной и непроизводственной сфер, представляют собой сложные объекты, экономическая эффективность функционирования которых значительно зависит от качества организационного управления. Сюда можно отнести определение ассортимента выпускаемой продукции, разработка долго срочных программ расширения производства, проектирование сети складских помещений в системе оптовой торговли и т.д.

Управление экономическими объектами является задачей более сложной, чем управление техническими объектами. Одной из причин является то, что в современной экономике производственно-технические, конъюнктурно-коммерческие и прочие факторы находятся в сложной взаимной зависимости, а внешние экономические факторы содержат элементы неопределенности. Принятие управленческих решений, которые были бы реальными и экономически выгодными является достаточно сложной задачей.

#### Биологические системы.

Живые системы – от простейших клеток до сложных организмов – поддерживает свою жизнедеятельность благодаря действию в них механизма управления. Процессы управления в живом организме регулируют ритм сердца и дыхания, температуру тела и т.д. В живой природе механизмы управления настолько органично встроены в объекты, что не всегда можно выделить такие функциональные элементы, характерные техническим системам, как объект управления, измерительные элементы. Однако и здесь методы теории управления помогают исследователю глубже понять процессы, протекающие в живом организме.

#### Поведение объектов и систем управления.

В теории управления, в первую очередь, интересуются поведением или динамическими свойствами элементов и систем – изменением во времени состояния объекта и других существенных переменных, т.е. процессами управления.

Пример. Рассмотрим тепловой объект (эл. печь, теплообменник и т.п.). Пусть в момент времени, принятый за начальный, на объект действует возмущения в виде кратковременного отклонения напряжения, рис.2.3,а.

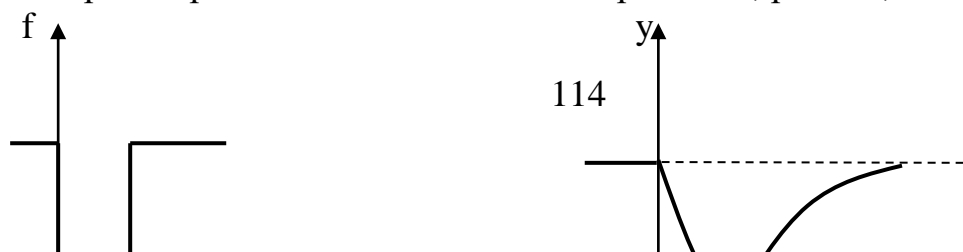




Рис.2.3. Поведение теплового объекта

Температура объекта начинает понижаться (рис.2.3,б). После исчезновения возмущения – повторного включения напряжения – температура постепенно повышается и стремится к прежнему значению. Это пример устойчивого объекта, состояние которого возвращается к исходному после снятия возмущения, т.е. объект обладает самовыравниванием.

Кроме устойчивости важным свойством, характеризующим системы управления является инвариантность – независимость (слабая зависимость) управляемой переменной от действующих возмущений.

Многие объекты имеют устойчивый режим функционирования, однако действие возмущений вызывает недопустимые отклонения управляемых переменных. Для этого создаются системы управления с обратной связью, основной целью которых является компенсация действия этих возмущений или их ослабление.

Поведение системы будет иным, если изменятся свойства ее элементов. Однако изменения свойств объекта или других элементов системы не должны приводить к существенным изменениям характера процессов, т.е. ни в коем случае – к потере устойчивости. Система должна быть грубой и малочувствительной (робастной).

## 2.2. Информация и принципы управления.

Управление и информация – понятия неразрывно связанные между собой. Управление невозможно без достаточной информации: о цели управления; о возмущениях среды; о состоянии объекта управления; о его характеристиках.

В зависимости от характера и полноты доступной информации реализуют различные принципы управления. Рассмотрим сначала информационный принцип- самый распространенный (Рис. 2.4).

### Разомкнутые системы управления.

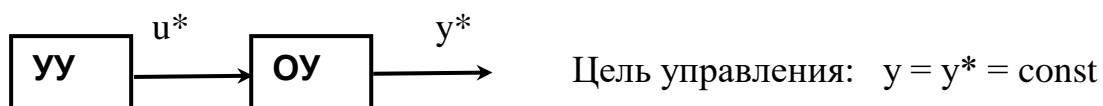


Рис.2.4. Разомкнутая система управления

Пусть имеется полная априорная информация о цели управления, известны характеристики объекта, а возмущающие воздействия отсутствуют. Цель управления задана в виде  $y=y^*=\text{const}$ , т.е. необходимо поддержание режима, заданного технологом или специалистом по эксплуатации объекта, требуемый постоянный

уровень управляющего воздействия  $u^*$  легко определяется по статической характеристике объекта. Если этот уровень допустим, а режим объекта устойчив, то цель управления может быть достигнута в системе, реализующей принцип разомкнутого управления (рис.2.4.).

Для многих производственных объектов оптимальному режиму, который должен поддерживаться системой управления, соответствуют некоторые постоянные значения переменной выхода  $y=y^*$  и уровня постоянного воздействия  $u=u^*$ , обеспечивающие экстремум (максимум или минимум) определенной целевой функции.

Целью управления может быть также изменение управляемой переменной  $y(t)$  по определенной программе, заданной как функция времени  $y^*(t)$ , например, программа изменения температуры в печи и т.п.. Для вычисления оптимального управляющего воздействия  $u^*(t)$ , необходимо знать динамические характеристики объекта управления. При этом не всегда можно найти допустимое управление, обеспечивающее точное следование заданной программе. Существуют методы вычисления оптимального управления  $u(t)$ , когда поведение объекта в принятом смысле минимально отличается от заданного.

Более общий случай задания цели управления – это требование оптимизировать некоторый функционал:

$$J(y, u) \rightarrow \min (\max) , \quad (2 - 1)$$

$$u \in U$$

где  $U$ - множество допустимых управлений.

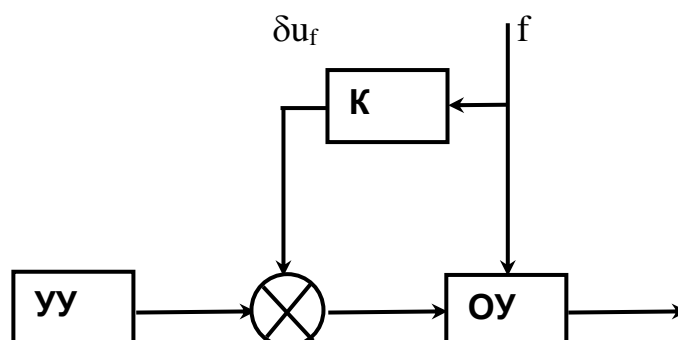
В результате решения задачи вариационного исчисления с учетом ограничений на управление и динамики объекта находятся оптимальная траектория  $y^*(t)$  и оптимальное управление  $u^*(t)$ .

#### Компенсация возмущений.

Возмущения – воздействия среды на объект, вызывающие отклонения управляемой переменной от заданных значений или программ изменения.

Если о возмущении на объект  $f(t)$  имеется полная априорная информация, то она может быть учтена при расчете оптимального управления, обеспечивающего желаемое поведение объекта.

В некоторых случаях основное возмущение на объект можно измерять непосредственно, т.е. доступна текущая информация о причине отклонений. Используя эту информацию, можно компенсировать отклонения управляемой переменной, оказывая на объект дополнительное воздействие. В простейшем случае компенсирующее воздействие суммируется с управляющим воздействием  $U^*$  (рис.2.5).



$U^x$  $U$  $Y$  $C$ 

Рис. 2.5. Разомкнутая система с компенсацией возмущения

В результате получаем систему, также реализующую принцип разомкнутого управления. Алгоритм обработки текущей информации о возмущении  $f$  в компенсаторе  $K$  с целью вычисления воздействия  $\delta u_f$  строится на базе информации о характеристиках объекта по каналам управления и возмущения.

Наличие текущей информации о возмущении, т.е. о причине отклонений, дало возможность формирования в системе второго (искусственного) пути из точки приложения возмущения к выходу объекта. Наличие такого пути является необходимым условием реализации абсолютной инвариантности управляемой переменной к непосредственно измеряемому возмущению (принцип двухканальности). Для работоспособности системы управления с компенсацией возмущения необходимо, чтобы заданный режим был устойчив, а другие (некомпенсированные) возмущения были слабыми.

#### Системы управления с обратной связью.

Достаточно сложно получать и своевременно обрабатывать полную информацию о всех возмущениях, действующих на объект. Для ослабления действия любых возмущений может быть использована информация об отклонениях управляемой переменной, т.е. информация о следствиях действия возмущений. На рис.2.6. представлена схема системы управления реализующий принцип обратной связи.

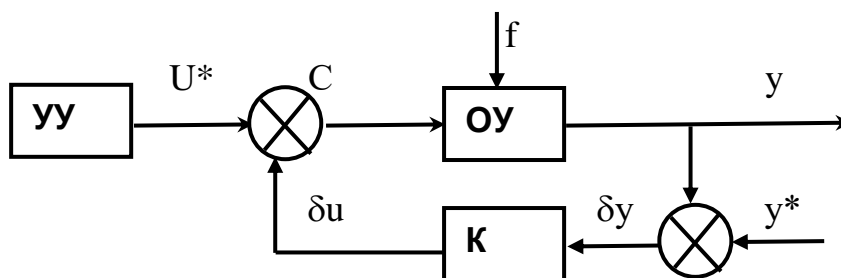


Рис.2.6. Система с обратной связью

Особенностью этой системы управления является наличие замкнутого контура причинно-следственных связей.

Достоинство обратной связи заключается в ее универсальности – какие бы возмущения ни действовали на объект, будет выявлено их следствие – отклонение  $\delta y$  управляемой переменной. В регуляторе  $P$  на базе этой информации вырабатывается дополнительное управляющее воздействие  $\delta u$ , направленное на уменьшение отклонения  $\delta y$ .

Необходимо указать на то, что для функционирования системы с обратной связью нет необходимости в полной априорной информации о цели управления.

Достаточно иметь текущую информацию о цели в виде задающего воздействия  $u^*(t)$  на входе элемента сравнения С. Задание на рассматриваемую систему может генерироваться другими системами, например, системами высших уровней иерархии управления. При этом, достаточно иметь текущую информацию только об отклонении  $\delta u(t)$  управляемой переменной  $u(t)$  от заданных значений  $u^*(t)$ .

Системы, предназначенные для воспроизведения на выходе объекта управления изменяющихся во времени задающих воздействий, называются слеящими.

Обратная связь является единственным средством стабилизации неустойчивых режимов объектов. Измеряя отклонения от положения равновесия или в общем случае – от оптимальной траектории, можно оказать на объект воздействия, направленные на возвращение объекта в исходное состояние.

Важнейшим свойством отрицательной связи является уменьшение влияния изменений характеристик объекта на свойства системы в целом.

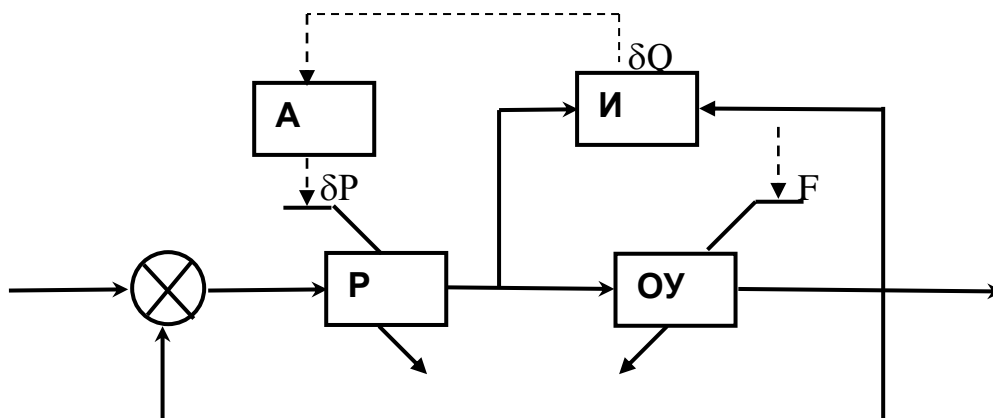
Вышеизложенное позволяет констатировать утверждение об универсальности принципа обратной связи, которая при правильном применении способна стабилизировать неустойчивые режимы объектов, обеспечивать инвариантность к непосредственно не измеряемым возмущениям и уменьшить чувствительность к вариациям характеристик объекта и окружающей среды.

Недостатком систем управления с обратной связью является недостижимость абсолютной инвариантности к произвольным воздействиям – для формирования сигнала управления  $\delta u$  принципиально необходимы отклонения  $\delta u$ , являющиеся входной информацией управляющего устройства.

#### Адаптивное управление.

Системы управления с самонастройкой или, в общем случае, с адаптацией получают информацию об изменениях свойств объекта путем текущей идентификации. Это означает, что каким-либо способом оцениваются следствия параметрических воздействий среды на объект. Текущая информация об отклонениях свойств объекта используется для принятия решения о подстройке параметров управляющих устройств и/или регуляторов (контроллеров). На рис.2.7. представлена структура адаптивной (самонастраивающейся) системы. Слеящая система образованная объектом ОУ и регулятором Р, требует подстройки параметров регулятора из-за изменений свойств объекта. Так как причины, вызывающие эти изменения, непосредственно нельзя измерять, остается оценивать их следствие.

В результате получения текущей информации И путем обработки данных о входе  $u$  и о выходе  $y$  объекта оцениваются отклонения  $\delta Q$  его характеристик. На базе этой информации в блоке адаптации А вычисляются значения параметров регулятора Р.



у\*

и

у

### Рис.2.7. Адаптивная система управления

Здесь реализуется принцип отрицательной (параметрической) обратной связи – образуется замкнутый контур передачи и обработки информации для ослабления параметрических возмущений среды.

Следует отметить, что замкнутый основной контур системы, образованный объектом и регулятором, можно трактовать как объект управления системы более высокого (второго) уровня иерархии. Управляющим воздействием системы второго уровня являются изменения параметров регулятора первого уровня, а возмущением – параметрические воздействия среды. Роль измерительного элемента в системе второго уровня играет устройство текущей идентификации И, а регулятора – блок настройки А. В блоке А по вариациям характеристик объекта или отклонениям показателей качества вычисляются параметры регулятора Р, из условий сохранения заданных показателей качества системы нижнего уровня иерархии. Это так называемая самонастраивающаяся система управления.

В общем случае целью адаптивной системы является оптимизация показателей качества, т.е. настройка регулятора связана с поиском экстремума некоторого функционала.

### 2.3. Классификация систем управления.

Системы управления классифицируются по: информационному принципу, типу сигналов, алгоритмическому и энергетическому признакам.

Вышеизложенный материал посвящен классификации систем управления по информационному признаку, самому распространенному.

#### Классификация систем управления по типу сигнала.

Понятия “переменная”, “воздействие”, “сигнал” в теории управления имеют в основном информационный смысл. Сигналы на входах и выходах функциональных элементов систем управления рассматриваются как носители информации, а сами элементы – преобразователи сигналов – как устройства передачи и обработки этой информации.

Если информация кодируется уровнями сигналов – функций непрерывного времени (рис.2.8,а) – это непрерывные системы (системы с непрерывным временем, аналоговые системы). Здесь время и уровни всех сигналов принадлежат множеству мощности континуума.

Если информация кодируется каким-либо параметром (высота, ширина, фаза) импульсов определенной формы – это импульсные системы. Различают импульсные системы с амплитудно-импульсной, широтно-импульсной, фазо-импульсной модуляциями.

На рис.2.8,б представлена последовательность прямоугольных импульсов, высота (амплитуда) которых кодирует информацию в моменты времени, кратные периоду  $T$  – это случай амплитудно-импульсной модуляции.

В математических моделях импульсных систем используется понятие дискретного времени, принадлежащего счетному множеству, а параметр импульса – амплитуда – принадлежит множеству мощности континуума. Имеют место автоматические системы, в которых информация кодируется частотой импульсов.

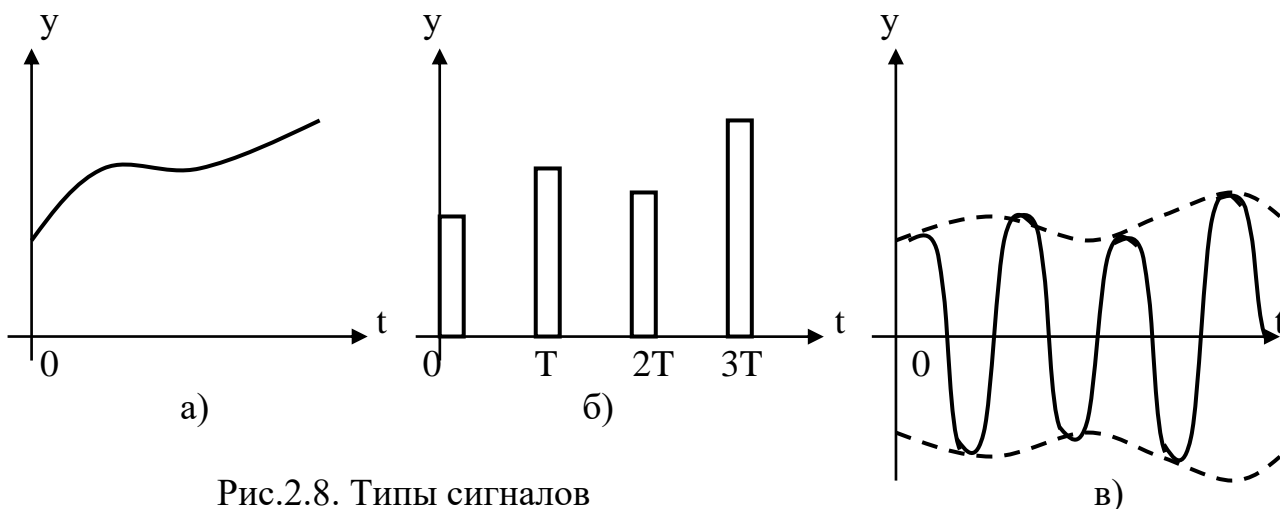


Рис.2.8. Типы сигналов

В цифровых системах управления как и в импульсных происходит квантование по времени. В силу конечности разрядной сетки вычислительных устройств имеет место квантование и уровня, т.е. уровень принадлежит конечному множеству (даже большой мощности).

Важное место занимают системы управления, в которых информация кодируется амплитудой переменного тока, т.е. огибающей несущего сигнала. Примерами таких систем являются автоматические системы с двигателями переменного тока, системы с радиоканалами с амплитудной модуляцией и другие (рис.2.8,в).

Классификация систем автоматического регулирования по типу алгоритма (закона).

Рассмотрим структуру системы автоматического регулирования с обратной связью (рис.2.9.). Регулятор  $P$  на базе информации об ошибке  $e(t)$ , т.е. отклонении управляемой переменной  $y(t)$  от задания  $y^*(t)$ , формирует по некоторому алгоритму управляющее воздействие  $u(t)$  на объект  $OY$ .

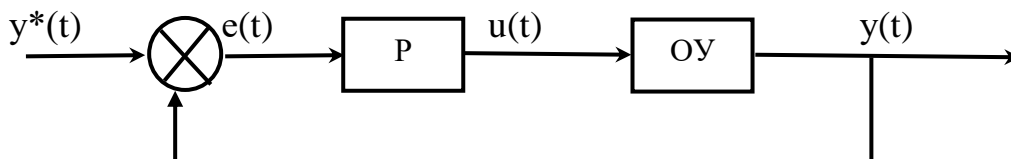




Рис.2.9. Система автоматического регулирования с обратной связью

Используют различные алгоритмы, или законы регулирования. Обозначим некоторые из них, полагая, что все переменные являются функциями непрерывного времени.

Пропорциональный закон (П-закон) регулирования имеет ясную логику – чем больше ошибка, тем сильнее воздействия на объект. Если регулятор трактовать как преобразователь сигналов, то математический алгоритм имеет вид:

$$u(t) = k_p e(t) \quad (2 - 2)$$

Интегральный закон (И-закон) регулирования означает, что уровень воздействия на объект определяется суммарной ошибкой, накопившейся за определенное время:

$$u(t) = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + u_0 \quad (2 - 3)$$

Если продифференцировать последнее выражение по времени, получим, что  $du(t)/dt = k_I e(t)$ , т.е. ошибка системы определяет скорость изменения управляющего воздействия. Характерной чертой И-закона является то, что управляющее воздействие изменяется до тех пор, пока ошибка не станет равной нулю.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон) является комбинацией двух предыдущих:

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2 - 4)$$

Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-закон) формирует управляющее воздействие с учетом и скорости изменения ошибки:

$$u(t) = k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D de(t)/dt \quad (2 - 5)$$

Этот закон наиболее часто реализуется в системах промышленной автоматики.

#### Классификация систем управления по энергетическому признаку.

Известно, что входы и выходы элементов систем управления – в теории управления рассматриваются как носители информации, при этом следует помнить, что исполнение принятого в управляющем устройстве решения об оказании управляющего воздействия на объект связано с энергетическими затратами, иногда значительными.

Для формирования управляющего воздействия можно использовать энергию самого управляемого процесса, отбираемой через измерительный элемент. В этом случае говорят о прямом регулировании.

Широко распространены поплавковые регуляторы уровня прямого действия, например, для карбюраторов автомобильных двигателей (см. рис.2.4). Здесь поплавок одновременно осуществляет три операции: измерение уровня, принятие решения об указании управляющего воздействия и исполнение реше-

ния. Аналогичный принцип регулирования уровня воды в котле паровой машины (принцип Ползунова), система автоматического регулирования частоты вращения вала паровой машины с центробежным датчиком (принцип Дж. Уатта). Следует отметить, что все приведенные примеры систем прямого регулирования реализуют принцип управления по замкнутому циклу.

Достоинством систем прямого регулирования является простота и надежность, при этом не требуется посторонних источников энергии. Недостатком этих систем является невысокая точность при необходимости обеспечивать большие усилия для перемещения управляющих органов.

Для повышения точности управления объектами, требующих значительных энергетических затрат на управление, необходимо разделение функций между измерительным и исполнительным элементами систем управления. В системах непрямого действия для оказания управляющего воздействия на объект необходим дополнительный источник энергии. На рис.2.5. представлена принципиальная схема такой системы для стабилизации уровня жидкости, т.е. система регулирования непрямого действия.

Достоинством систем непрямого управления является более высокая точность. Недостатком – большая сложность и стоимость, необходимость дополнительных источников энергии, меньшая надежность. По виду используемой для управления энергии различают электрические, механические, гидравлические, пневматические, электрогидравлические и другие системы автоматического управления.

#### 2.4. Задачи теории управления.

Основными задачами теории управления являются анализ и синтез систем управления. Под анализом понимается выявление и количественная оценка свойств поведения, а также объяснение свойств систем через характеристики элементов и способ их взаимосвязи.

Важнейшими свойствами объектов и систем управления являются: устойчивость движений, инвариантность к возмущениям и робастность (грубость, малая чувствительность). Синтез предполагает выбор элементов и связей между ними таким образом, чтобы система имела требуемое поведение. Таким образом, является задачей, обратной по отношению к анализу. Важное значение для систем управления в технике имеют следующие показатели: надежность, габариты, масса, энергопотребление, стоимость и эксплуатационные расходы, внешний вид и другие. Задача обеспечения соответствия этих показателей требованиям решается в процессе проектирования систем управления. Эта задача выходит за рамки теории управления, в которой доминирует поведенческий аспект.

Реализация задач анализа и синтеза на реальных объектах возможно в редких случаях, так как это требует много времени, дорого, опасно и не всегда осуществимо. Известно, что управляемый процесс может быть длительным (печи и другие тепловые объекты), эксперименты – дорогими (запуск ракет) и опасными (ядерные реакторы). При этом, объект управления часто проектируется вместе с системой управления. Задачи синтеза и анализа в некоторых случаях можно решать с использованием физических моделей (аналогов) объектов.

Теория управления имеет дело с математическими (символьными) моделями. Построение математических моделей объектов и систем управления также является задачей теории управления и смежных с ней дисциплин. Математические модели позволяют решать задачи анализа и синтеза аналитически (расчетным путем) и путем имитации систем управления на компьютерах.

#### Математические модели систем управления.

Моделирование объектов и систем управления начинается с их выделения из окружающей среды, что приводит к искажению изучаемых процессов, так как в природе все явления в той или иной степени взаимосвязаны и взаимообусловлены. Динамические модели объектов и систем управления строятся для объяснения и предсказания их поведения – изменений во времени состояния и наблюдаемых выходных переменных, вызванных внутренними процессами и/или воздействиями среды.

#### Взаимодействие системы со средой.

Рассмотрение причинно-следственного взаимодействия системы управления со средой связано с обособлением собственно системы  $S$  и выделением ее связей со средой через переменные входа  $f$  и выхода  $y$  :

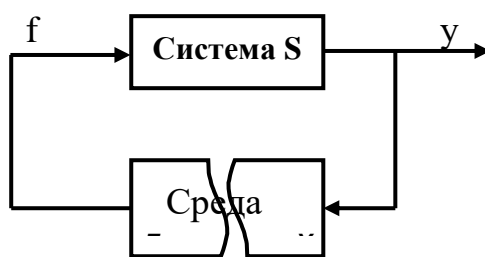


Рис.2.10. Взаимодействие системы со средой

Система оказывается звеном в искусственно разорванной цепи причинно-следственных отношений “среда – система – среда”.

#### Операторы преобразования переменных.

На содержательном уровне объекты и системы управления интерпретируются как устройства получения, передачи и обработки информации. С другой стороны, объекты и системы можно рассматривать как преобразователи сигналов – носителей этой информации. Преобразование сводится к изменению параметров, кодирующих информацию.

Свойства системы как преобразователя характеризуется ее операторов, отображающим множество функций выхода:

$$y(t) = Q\{f(t)\} \quad (2 - 6)$$

Примерами операторов являются оператор дифференцирования или дифференциальные уравнения

$$\Phi(y, y', y'', \dots, y^n; u, u', u'', \dots, u^{(m)}) = 0, \quad (2 - 7)$$

а также разностные уравнения:

$$\Phi^*(y(k), \Delta y(k), \Delta^2 y(k), \dots, \Delta^n y(k); u(k), \Delta u(k), \dots, \Delta^m u(k)) = 0, \quad (2 - 8)$$

где  $\Delta y(k) = y(k) - y(k-1)$ ;  $\Delta^2 y(k) = \Delta y(k) - \Delta y(k-1)$  и т.д. – разности первого и высших порядков.

Оператор линеен, если обладает свойствами однородности и аддитивности. Для линейного оператора справедливо:

- при любом усилении (ослаблении) входного воздействия выходная переменная претерпевает точно такое же усиление, не изменяя своей формы;
- реакция на сумму любых входных воздействий равна сумме реакций на эти воздействия.

В общем случае линейной комбинации входных воздействий отвечает та же линейная комбинация соответствующих реакций:

$$Q\{\sum_i \alpha_i f_i(t)\} = \sum_i \alpha_i Q\{f_i(t)\} \quad (2 - 9)$$

Свойство линейности оператора, выраженное приведенной формулой, иногда называют принципом суперпозиции. Принцип суперпозиции дает возможность выражать реакцию линейной системы на любое воздействие через ее реакцию на определенный вид элементарных воздействий. Для этого произвольное воздействие  $f(t)$  представляется как линейная комбинация элементарных воздействий выбранного типа. Зная реакцию линейной системы на элементарные воздействия этого типа, определяется ее реакция на воздействие  $f(t)$ .

Таким образом, линейная система как преобразователь полностью характеризуется ее реакцией на типовое воздействие, называемой временной характеристикой. Однако, в простейших случаях такая форма представления оператора наглядна, ее недостатком является неудобство решения задач анализа и синтеза.

Если не выполняется принцип суперпозиции, то оператор называют нелинейным. При этом, класс нелинейных операторов много богаче линейных.

Оператор стационарен, если его характеристики инвариантны ко времени. Другими словами, при сдвиге во времени входного воздействия без изменения его формы реакция претерпевает такой же сдвиг во времени без изменения своей формы. В ряде случаев модели должны отражать изменения свойств объекта во времени; тогда вводятся в рассмотрение нестационарные операторы

$$y(t) = Q\{f(t), t\}. \quad (2 - 10)$$

В простейшем случае нестационарность сводится к изменению параметров модели, например коэффициентов дифференциального уравнения. В общем случае влияние среды приводит к необходимости изменения структуры оператора, например, порядка дифференциального уравнения или даже класса оператора.

Если вариации оператора происходят много медленнее основных процессов, то вместо нестационарного оператора рассматривают множество стационарных операторов, различающихся значениями параметров.

Описание объекта множеством равновероятных операторов содержит неопределенность. Все операторы модели заданы с точностью до интервалов значений, то такие системы называются интервальные.

Оператор может быть детерминированным или стохастическим. В случае стохастических операторов параметры представляются как случайные величины и задаются их вероятностными характеристиками. Объекты управления могут быть

с сосредоточенными или распределенными параметрами. В последнем случае они описываются уравнениями в частных производных.

#### Классы моделей.

Модель объекта или системы управления принадлежит тому же классу, что и описывающий их оператор преобразования. Можно определить класс только математической модели, а не реальной системы.

Таким образом, выделяют следующие признаки классов систем с непрерывным и дискретным временем:

- линейные (Л) или нелинейные (Л);
- стационарные (С) или нестационарные (С);
- детерминированные (Д) или стохастические (Д);
- сосредоточенные (конечномерные) (К) или распределенные (бесконечномерные) (К).

Эти четыре независимых признака бинарны; поэтому можно насчитать всего  $2^4 = 16$  классов непрерывных и столько же – дискретных систем.

Простейший класс ЛСДК – линейные стационарные детерминированные конечномерные системы. Они имеют форму обыкновенных линейных дифференциальных (разностных) уравнений с постоянными детерминированными коэффициентами. В математике разработан развитый аппарат анализа этого класса систем. При построении моделей стремятся к их максимальной простоте при достаточной адекватности оригиналам. Поэтому в первом приближении часто ограничиваются описанием объектов управления в классе ЛСДК.

Более сложные классы операторов получаются при введении одного из альтернативных признаков: ЛСДК, ЛСДК, ЛСДК, ЛСДК. Для таких систем существует незначительное число общих методов аналитического исследования; в основном, они разработаны только для частных случаев.

Операторы второго уровня сложности получаются введением двух отрицаний: ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК.

При трех отрицаниях получаем операторы третьего уровня сложности: ЛСДК; ЛСДК; ЛСДК.

Операторы четвертого уровня сложности: ЛСДК – нелинейные нестационарные стохастические бесконечномерные. Им, например, соответствуют нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных с переменными случайными параметрами.

Для систем, описываемых операторами второго и выше уровней сложности, как правило, имеется только единственная возможность их анализа и синтеза путем вычислительных экспериментов.

Если модель системы образована элементами различных классов, то класс системы определяется классом элемента с максимальным числом отрицаний.

#### Автономные системы.

Система называется автономной, если на нее не действуют внешние силы, в том числе параметрического типа. Автономные системы, таким образом, стационарны. Изменение их состояния происходит в силу накопленной ранее энергии.

На рис.2.11. модель среды представлена в виде автономной системы, имеющей выход, но не имеющей входов.



Рис.2.11. Автономная система

Дифференциальные уравнения автономных систем включают переменные системы и их производные, но не содержат переменных, описывающих воздействия среды и имеют постоянные параметры. Это так называемые однородные дифференциальные уравнения.

$$\Phi(y, y', y'', \dots, y^n) = 0, \quad (2 - 11)$$

дополнительные начальные условия:

$$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0).$$

Начальные условия являются следствием предыстории системы и вместе с дифференциальными уравнениями полностью определяют поведение автономной системы. Если система автономна, то ее движение (поведение) называют свободным.

В случае автономных систем с дискретным временем имеем однородные разностные уравнения:

$$\Phi^*(y(k), \Delta y(k), \Delta^2 y(k), \dots, \Delta^n y(k)) = 0 \quad (2 - 12)$$

### Модели среды.

Среда на входе системы моделируется автономными системами – генераторами воздействий (см. рис.2.11) или преобразователями типовых воздействий – фильтрами. Распространенными типовыми сигналами, моделирующими детерминированное воздействие, являются единичные импульсная и ступенчатая функции. Примером типового случайного воздействия является так называемый “белый шум”.

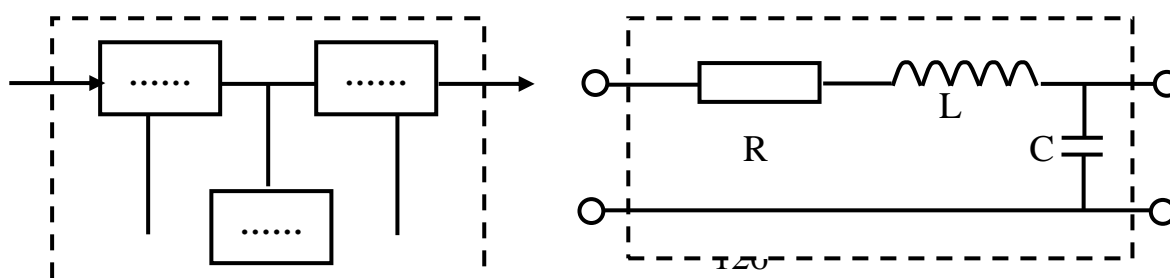
Среда может моделироваться динамической системой того же класса, что и сама система управления. Однако часто рассматриваются детерминированные системы со случайным воздействием на входе.

### 2.5. Способы построения моделей.

В зависимости от характера и объема априорной информации об объекте исследования определяют два способа построения моделей систем управления в формах, принятых в теории управления: 1 – аналитический; 2 – экспериментальный.

#### Аналитический способ.

Аналитический способ применяется для построения моделей объектов хорошо изученной природы. В этом случае имеется вся необходимая информация о свойствах объекта и она представлена структурными моделями в виде схем с сосредоточенными компонентами (рис.2.12а).



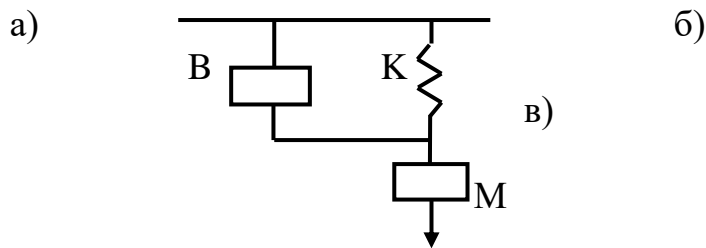


Рис.2.12. Физические системы с сосредоточенными комплектами (а): электрическая схема (б) и механическая поступательная система (в)

Подобные схемы являются моделями, в которых информация об интересующих свойствах объекта представлена в наглядной форме с использованием графических образов, отражающих физическую природу явлений, устройства и параметры объектов. По существу, принципиальные схемы суть стационарные линейные модели с сосредоточенными компонентами (конечномерные), только представлены они с использованием обозначений, принятых соответственно в электротехнике и механике.

Методы теории управления абстрагируются от конкретной природы объектов и оперируют более общими математическими (символьными) моделями.

Аналитический способ моделирования складывается из этапа построения схемы объекта и ее дальнейшего преобразования в математическое описание требуемой формы. При этом принципиальные проблемы моделирования решаются на первом – неформальном этапе.

Второй этап, по существу, оказывается процедурой преобразования форм представления модели. Это позволяет разрабатывать различные компьютерные программы, позволяющие автоматизировать составление уравнений по схемам.

Описание вышеуказанных объектов (электрического и механического), т.е. составления дифференциальных уравнений можно ограничиться классом линейных стационарных моделей.

#### Электрическая схема (рис.2.12,б).

В ней активными двухполюсниками являются источник напряжения и источник тока. Уравнения связи двухполюсников в конкретной схеме выражаются законами Кирхгофа, представляющими собой условия непрерывности токов и равновесия напряжений: 1 – сумма токов в любом узле равна нулю; 2 – сумма напряжений в любом контуре равна нулю.

В соответствии с первым законом имеем:  $i_R = i_L = i_C = i$ .

Второй закон для единственного контура запишем так:  $u + u_R + u_C + u_L = 0$ .

Определим напряжения  $u_R$  и  $u_L$  через  $u_C$ :

$$u_R = RC \, du_C/dt; \quad u_L = LC \, d^2u_C/dt^2,$$

получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$LC \, d^2u_C/dt^2 + RC \, du_C/dt + u_C = -u.$$

#### Механическая поступательная система.

Пассивными двухполюсниками механических схем являются механическое сопротивление  $B$ , масса  $M$  и упругости  $K$ . Идеальными источниками механической энергии являются источник скорости и источник силы. Уравнение связей механических двухполюсников выражают условия равновесия сил и непрерывности перемещений (скоростей).

Согласно уравнениям механических двухполюсников и уравнений связей записывают дифференциальное уравнение для перемещений:

$$Md^2x/dt^2 + Bdx/dt + kx = 0 \quad (2 - 13)$$

В этом однородном уравнении отсутствует правая часть, описывающая внешнее воздействие на механическую систему, т.е. она автономна. Свободное движение автономной системы является следствием ненулевых начальных условий, например начального смещения  $x(0)$  от равновесного состояния. Следует отметить, что на рис.2.12. связи между компонентами не являются направленными, а сами двухполюсники не имеют входов и выходов. Между переменными, характеризующими состояние схем, нет объективных причинно-следственных отношений. Можно считать, что напряжение на резисторе является причиной протекающего по нему тока, но можно сказать и иначе – протекающий ток является причиной падения напряжения на резисторе.

Вместе с тем, взаимодействие между схемой и средой, моделируемой источниками, имеет причинно-следственный, направленный характер.

Таким образом, в результате аналитического моделирования сложных объектов получают системы уравнений в непричинно-следственной форме относительно внутренних переменных.

При проектировании систем управления, когда некоторые элементы не существуют в природе, аналитический метод построения моделей является единственно возможным.

#### Экспериментальный способ.

Если свойства объекта определены в недостаточной степени, либо происходящие явления слишком сложны для аналитического описания, то для построения математической модели реально существующих объектов применяется экспериментальный способ. Этот способ заключается в активных экспериментах над объектом или в пассивной регистрации его поведения в режиме нормальной эксплуатации (рис.2.13,а)

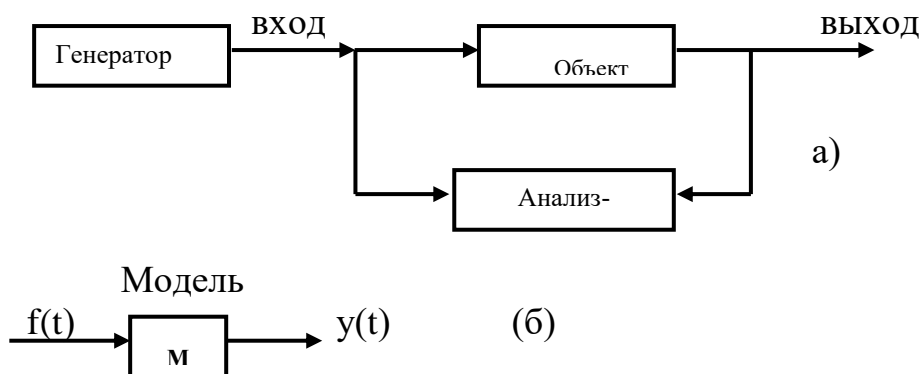




Рис.2.13. Экспериментальное исследование системы (а)  
и модель вход-выход (б)

В результате обработки данных наблюдений получают модели требуемой формы. Совокупность этих операций объединяется термином идентификация объекта. В результате индентификации (отождествления) получают модели вход – выход (рис.2.13,б).

Очевидно, модель зависит не только от свойств объекта, но также от входных сигналов, и их разнообразия. Практически об идентифицируемом объекте всегда имеется какая-то априорная информация, т.е. от не является “черным ящиком”. Это позволяет комбинировать оба способа – вначале аналитически строить структуру модели и определять начальные приближенные значения параметров, а далее обработкой экспериментальных данных уточнять их значения.

#### Особенности структурных моделей систем управления.

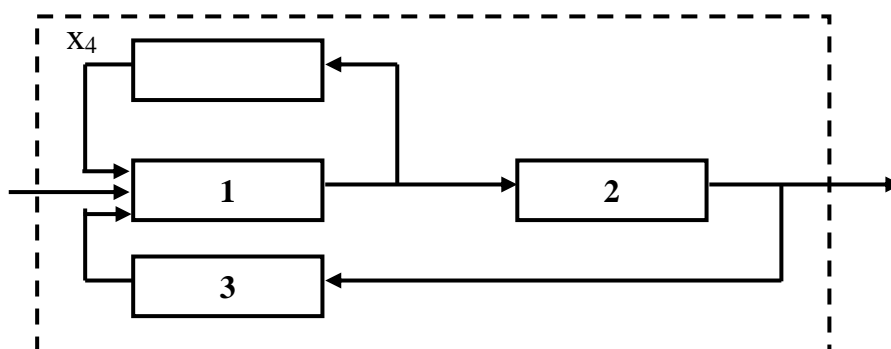
Особенностью математических моделей систем управления является то, что они не только содержат априорную информацию о ее динамических свойствах, необходимую для изучения поведения системы в целом, но также отражают процессы получения и обработки текущей информации цели системы, состоянии объекта и взаимодействиях среды для принятия решения по оказанию на объект надлежащего управляющего воздействия.

При построении моделей систем управления и выборе форм их представления учитываются не только динамические, но и информационные, а также алгоритметрические аспекты проблемы. Так как модели элементов и систем являются основным материалов в задачах анализа и синтеза (исходными данными и результатами), то этим задачам и алгоритмам их преобразования в теории управления отводят важное место.

#### Модели систем управления с раскрытой причинно-следственной структурой.

Понятие модели системы управления неотделимо от понятия структуры. Под структурой систем управления понимают причинно-следственные взаимосвязи элементов (подсистем) направленного действия. Именно ориентированность элементов и их взаимосвязей отличает модели систем управления от структурных моделей физических систем вообще. При построении моделей с раскрытой причинно-следственной структурой (рис.2.14) объект или систему предварительно расчлняют на элементы направленного действия и рассматривают их как преобразователи сигналов.

Элементы, как правило, выделяются по функциональному признаку, причем сами эти функции понимаются в контексте операций управления: объект управления; измерительные, преобразовательные и усилительные элементы; управляющее устройство; исполнительный механизм; управляющий орган.



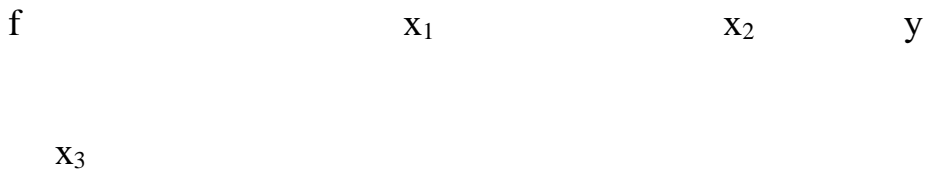


Рис.2.14. Система управления с раскрытой структурой

Примером такого расчленения является представленная ранее функциональная схема (см.рис.2.1). Далее для каждой части строится своя модель, а затем модели частей связывают между собой таким же образом, как соединяются сами части.

Если части системы образуют контуры, то моделирование по частям встречается с принципиальной проблемой: не зная свойств частей, нельзя описать сигналы на их входах; не зная сигналов, нельзя правильно идентифицировать отдельные части. Кроме этого, возникают известные трудности и при принятии допущения об однонаправленности частей.

Достоинство моделирования по частям – модели содержат в общем случае большую информацию о системе; они вскрывают механизм преобразования входов в выходы.

С точки зрения специалиста по управлению, модели вход-выход (см. рис. 2.13,б) и структурные модели физических систем (рис.2.12) имеют нулевой уровень причинно-следственной интеграции. Модель изображенная на рис.2.14. образована ориентированной взаимосвязью подсистем нулевого уровня и, следовательно, имеет первый уровень. Дальнейшее раскрытие структур подсистем приводит к многоуровневым (иерархическим) моделям.

Иерархический подход к моделированию позволяет разработать методы исследования и проектирования сложных систем управления (например, каскадные и другие).

В силу одного из принципов системного подхода – принципа рекуррентного (близкорасположенного) объяснения – поведение системы L-го уровня объясняется свойствами подсистем непосредственно нижележащего – (L-1)-го уровня и особенностями их взаимосвязей. Поэтому при разработке методов анализа и синтеза можно ограничиться рассмотрением моделей нулевого и первого уровней.

## 2.6. Линейные модели и характеристики систем управления.

Модели ВХОД-ВЫХОД. Основными формами представления операторов преобразования входных переменных  $f(t)$  в переменные выхода  $y(t)$  являются дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные и частотные характеристики. Для одномерных систем переменные  $f(t)$  и  $y(t)$  являются скалярами. Эти и некоторые другие представления операторов рассматриваемого класса моделей могут быть приняты за основу задания динамических свойств в терминах вход-выход. Если для конкретных исследований та или иная форма оказывается более предпочтительной, ставится и решается и решается задача перехода от одной формы к другой например, построение временных и частотных характеристик по дифференциальному уравнению или передаточной функции.

Обыкновенное линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$a_n d^n y/dt^n + \dots + a_1 dy/dt + a_0 y = b_m d^m f/dt^m + \dots + b_1 df/dt + b_0 f \quad (2-14)$$

Если ввести оператор дифференцирования по времени  $p \equiv d/dt$ , то уравнение (2-14) запишется в компактной форме

$$A(p) y(t) = B(p) f(t), \quad (2-15)$$

где  $A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ ;  $B(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0$  – операторные полиномы. Дифференциальное уравнение дополняется начальными условиями  $y(0)$ ,  $y'(0)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(0)$ .

Передаточная функция равна отношению изображений по Лапласу переменных выхода и входа при нулевых начальных условиях

$$W(s) = Y(s)/F(s),$$

где

интегральное преобразование Лапласа определяется так:

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt;$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Преобразуя дифференциальное уравнение (2-14) при начальных условиях, получим алгебраическое уравнение для изображений

$$A(s) Y(s) = B(s) F(s).$$

Отсюда следует, что передаточная функция легко записывается по дифференциальному уравнению

$$W(s) = B(s) / A(s) \quad (2-16)$$

и наоборот, по передаточной функции сразу записывается дифференциальное уравнение.

Зная передаточную функцию и изображение переменной входа, легко найти изображение выхода:  $Y(s) = W(s) F(s)$ .

Временные характеристики.

Временные характеристики являются одной из форм представления операторов преобразования переменной  $f(t)$  в переменную  $y(t)$ .

Импульсная переходная функция или функция веса  $w(t)$  – реакция системы на единичный идеальный импульс  $\delta(t)$  при нулевых начальных условиях. Переменная выхода определяется как интервал свертки

$$y(t) = \int_0^t w(t) f(t-\tau) dt, \quad (2-17)$$

т.е. в этом случае оператор преобразования имеет форму интегрального уравнения.

Другая, часто употребляемая временная характеристика – переходная характеристика  $h(t)$  – реакция системы на единичную ступенчатую функцию  $1(t)$

при нулевых начальных условиях. На рис.2.15 представлен примерный вид временных характеристик для системы второго порядка.

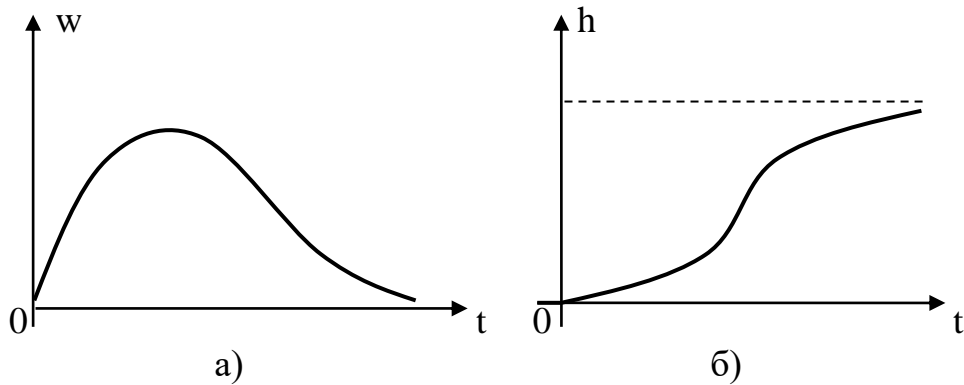


Рис.2.15. Временные характеристики: а) функция веса; б) переходная характеристика

### Частотные характеристики.

Частотные характеристики элементов и систем представляют собой зависимость параметров установившихся реакций на гармонические сигналы всех частот и единичных амплитуд. В линейных системах форма и частота установившейся реакции совпадают с формой и частотой сигнала на выходе. Комплексная частотная характеристика  $W(j\omega)$  дает возможность определить амплитуду  $R(\omega)$  и фазу  $\varphi(\omega)$  гармонического сигнала на выходе системы по значению частоты:

$$W(j\omega) = R(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2 - 18)$$

где  $R(\omega) = \text{mod } W(j\omega)$  и  $\varphi(\omega) = \text{arg } W(j\omega)$  – амплитудная и фазовая частотные характеристики, а  $P(\omega) = \text{Re } W(j\omega)$  и  $Q(\omega) = \text{Im } W(j\omega)$  – вещественная и мнимая частотные характеристики. На рис.2.16. приведен пример годографа  $W(j\omega)$ , называемого амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ).

Реальные объекты с повышением частоты хуже пропускают сигналы – ослабляют амплитуду и вносят отрицательный фазовый сдвиг.

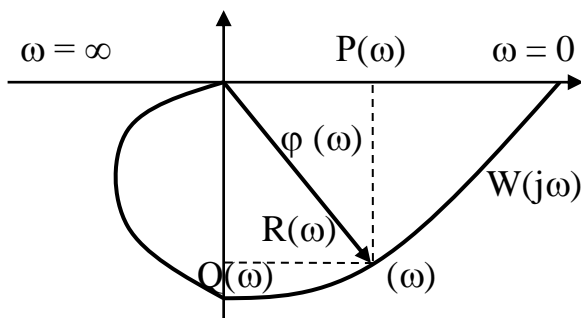


Рис.2.16. Пример АФХ

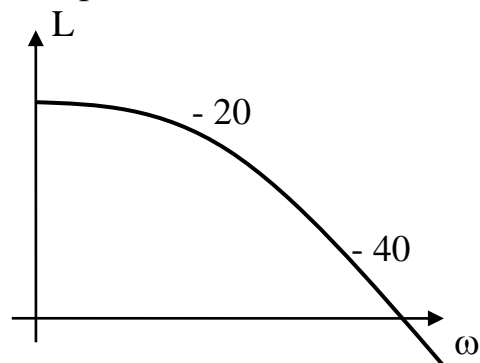


Рис.2.17. Пример ЛАЧХ

Амплитудно-частотные характеристики удобно представлять в логарифмическом масштабе

$$L(\omega) = 20 \lg R(\omega).$$

Если частота изменяется в логарифмическом масштабе, то логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) во многих практически важных случаях мало отличаются от прямолинейных асимптот с наклонами, кратными 20дБ/дек.

На рис.2.17. представлен примерный вид асимптотической ЛАЧХ; пунктирная линия – точная ЛАЧХ, а также указаны наклоны асимптот в дБ/дек.

Передаточные функции, все нули и полюсы которых находятся в левой полуплоскости, называют минимально-фазовыми. Такие передаточные функции соответствуют меньшим по модулю фазовым сдвигам по сравнению с любыми другими передаточными функциями, имеющими ту же ЛАЧХ, но часть нулей и/или полюсов справа от минимальной оси.

#### Преобразование форм представления моделей вход-выход.

Известно, что любая из форм представления операторов может быть принята за основу задания динамических свойств систем, для конкретных исследований, так как та или иная форма оказывается более рациональной. Возникает необходимость перехода от одной формы к другой. Многие задачи анализа связаны с преобразованием формы представления оператора. В ряде случаев эта процедура составляет наиболее трудоемкий этап анализа – построения частной модели – приведение к форме, позволяющей непосредственно вычислять показатели качества и вывести суждение о соответствии поведения системы заданным требованиям (например, построение временных или частотных характеристик системы управления).

Переходы между различными формами представления операторов следует рассматривать как дуги орграфа, вершинам которого соответствуют формы представления, как приведено на рис.2.18.

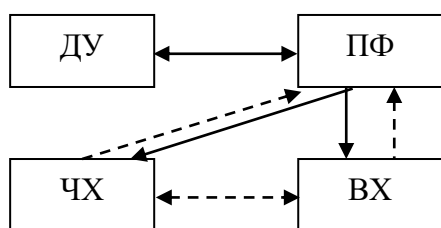


Рис.2.18. Орграф взаимосвязи форм представления операторов: ДУ-дифференциальное уравнение; ЧХ – частотные характеристики; ПФ – передаточная функция; ВХ – временная характеристика.

Наиболее прост формальный переход путем замены оператора дифференцирования  $p \equiv d/dt$  на комплексный аргумент ( $s$ ) от дифференциального уравнения (2-15) к передаточной функции (2-16) и обратно. Осуществляя переход к передаточным функциям, необходимо избегать сокращения общих делителей полиномов числителей и знаменателей, т.е. диполей рациональных функций.

Такое сокращение приводит к потере части собственных составляющих движения при нулевых предначальных условиях (составляющих собственных движений).

Пунктирные линии графа взаимосвязи (см. рис.2.18.) отвечают переходам, рассматриваемым обычно в задачах идентификации. По временным и/или частотным характеристикам, полученным экспериментально, оценивают параметры передаточных функций или ординаты характеристик иного типа.

Такие переходы оказываются неоднозначными, а их результаты зависят от выбора структуры оператора и алгоритма обработки данных.

### Типовые звенья.

Известно, что любую систему управления можно представить в виде соединения типовых динамических звеньев.

Элементарные звенья – это простые множители, входящие в состав передаточной функции системы или ее части. Звено принято изображать в виде прямоугольника, в контур которого вписывают оператор, характеризующий динамику преобразования входного сигнала в выходной. Обозначения входных, промежуточных и выходных переменных, возмущающих и управляющих воздействий записывают над линией или с правой стороны линии связи, показывающей место приложения соответствующего сигнала. Промежуточные переменные – это координаты, связывающие отдельные звенья структурной схемы. Суммирующие элементы (сумматоры) изображают в виде круга, разделенного на секторы.

При представлении модели системы в форме пространства состояний, для реализации любой физически осуществимой передаточной функции достаточно двух типов звеньев: интеграторов и усилителей. Если степень числителя передаточной функции  $m$  превышает степень знаменателя  $n$ , то необходимо звено дифференцирующего типа. Удобнее форму оператора представить в виде оператора дифференцирования  $p \equiv d/dt$  (см. рис.2.5).

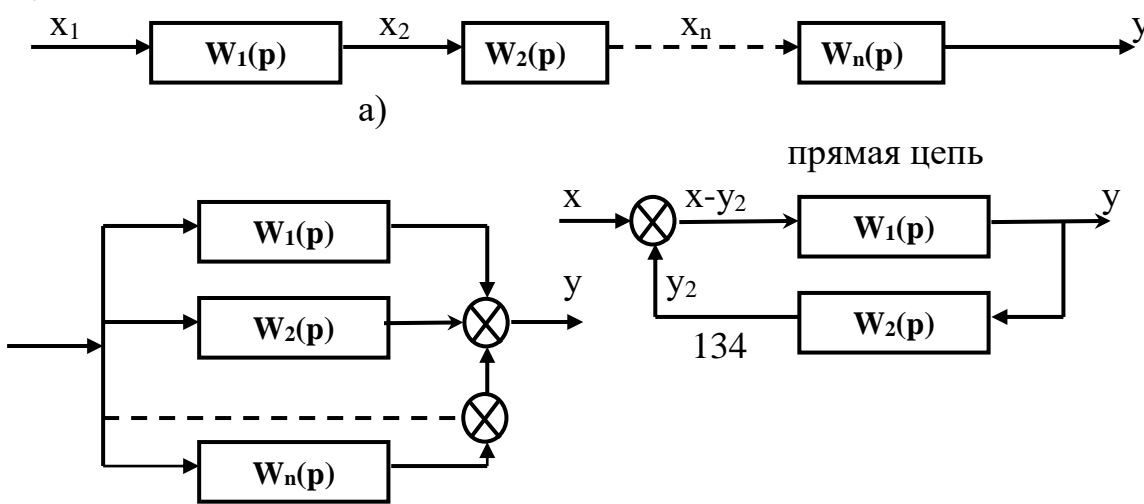
К типовым звеньям относят устойчивые элементарные звенья. Практическое применение в основном имеют нижеследующие звенья:

<u>Вид звена</u>	<u>Передаточная функция <math>W(p)</math> звена</u>
пропорциональное (усилительное)	$W(p) = K$
интегрирующее	$W(p) = 1/Tp$
дифференцирующее	$W(p) = Kp$
апериодическое (1 порядка)	$W(p) = K/Tp + 1$
апериодическое (2 порядка)	$W(p) = K/T_2^2 p^2 + T_1p + 1$

где  $K$  – коэффициент усиления;  $T$  – постоянная времени.

В теории управления состав типовых звеньев несколько расширен исходя из соображений удобства – необходимы звенья, моделирующие часто встречающиеся случаи, а также представления передаточных функций общего вида последовательным и параллельным соединением типовых звеньев (например, пропорционально-дифференцирующее звено:  $W(p) = K(Tp + 1)$ ).

К типовым соединениям относят последовательное, параллельное и параллельно-встречное (с обратной связью) соединение звеньев. На рис.2.19. приведены вышеуказанные типовые соединения звеньев.



в)

б)                      обратная цепь

Рис.2.19. Типовые соединения звеньев

Последовательные соединенные звенья  $W_1(p), \dots, W_n(p)$  можно заменить одним звеном (рис.2.19,а) с передаточной функцией  $W_n(p)$ , равной произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p), \dots, W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) \quad (2 - 19)$$

Эквивалентная передаточная функция  $W_n(p)$  параллельно включенных звеньев  $W_1(p), \dots, W_n(p)$  равна их сумме (рис.2.19,б):

$$W(p) = W_1(p) + \dots + W_n(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p) \quad (2 - 20)$$

В соединениях с обратной связью (см. рис.2.19,в) различают прямую и обратную цепи. Прямая цепь – это участок системы (схемы) по ходу передачи сигнала от входного воздействия  $f$  к выходной координате  $y$ .

## 2.7. Анализ систем управления.

Анализ систем управления состоит в изучении их общесистемных свойств, условий выполнения ими своих функций и достижения заданных целей.

Основными требованиями к свойствам поведения систем управления являются: устойчивость поведения (движения), инвариантность управляемой переменной к возмущениям и ковариантность к задающим воздействиям; грубость (параметрическая инвариантность, робастность), т.е. ограниченная чувствительность свойств системы к вариациям характеристик элементов.

Основными задачами анализа систем управления являются: определение фактов устойчивости, инвариантности и робастности; построение характеристик и вычисление показателей качества; вывод об удовлетворительном (или неудовлетворительном) поведении системы.

### Анализ устойчивости.

Устойчивость по начальным условиям (по Ляпунову) – свойство собственно системы. Если система устойчива, то затухают все составляющие свободных движений, вызванных любыми ненулевыми начальными условиями. Свойство устойчивости линейных непрерывных систем анализируется по модели свойств свободных движений автономных систем (см. рис.2.5) в форме однородных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка

$$A(p)y(t) \equiv a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2 - 21)$$

### Свободные движения.

Преобразуя дифференциальное уравнение (2-21) по Лапласу с учетом начальных условий:  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  получим

$$A(s)Y(s) = A_n(s), \quad (2-22)$$

где  $A_n(s)$  – полином, коэффициенты которого зависят от начальных условий. Из алгебраического уравнения (2-22) легко получить изображение решения уравнения (2-21):  $Y_{св}(s) = A_n(s)/A(s)$ .

В случае, когда характеристический полином системы  $A(s)$  имеет только простые корни  $s_i$ ;  $i=1, \dots, n$ , выражение для свободных движений имеет вид

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^n A_n(s_i)/A'(s_i) e^{s_i t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t} \quad (2-23)$$

Здесь знак (') означает дифференцирование полинома по  $S$ . Если корни полинома  $A(s)$  кратные, то вместо коэффициентов  $C_i$  в выражении (2-23) появятся полиномы от  $t$  со степенями ниже кратности корня  $s_i$ .

### Условия устойчивости.

Из выражения (2-23), что необходимым и достаточным условием затухания экспонент является отрицательность действительных корней

$$V_i = 1, \dots, n; \operatorname{Re} s_i < 0 \quad (2-24)$$

На рис.2.20. приведен пример расположения корней характеристического полинома асимптотически устойчивой системы пятого порядка на комплексной плоскости. Все корни находятся в открытой левой полуплоскости, т.е. строго левее мнимой оси. Поэтому часто фиксируют, что для асимптотической устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома были левыми.

Следует отметить, что если характеристический полином имеет простые корни на мнимом оси, то имеет место устойчивость по Ляпунову (но не асимптотическая).

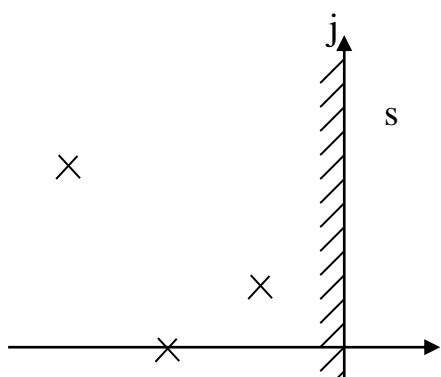
### Устойчивость вход-выход.

*Система называется устойчивостью по входу, если при любом ограниченном воздействии  $f(t)$  ее реакция  $y(t)$  является ограниченной. Устойчивость по входу характеризует свойство оператора преобразования вход-выход.*

Устойчивость вход-выход в случае модели рассматриваемого класса имеет место, если: система устойчива по начальным условиям, т.е. корни ее характеристического полинома находятся в левой полуплоскости; передаточная функция системы осуществима (физически реализуема), т.е. степень полинома числителя не превышает степень полинома знаменателя.

### Критерии устойчивости.

Для выявления устойчивости не обязательно знание корней, так как в условиях широкого применения ЭВМ их вычисление не представляет больших трудностей.



Вынужденные движения неавтономных линейных систем представляется как сумма установившихся движений, опреде-



0

ляемых полюсами изображений воздействий и переходных процессов из-за посленулевых начальных условий, вызванных приложением воздействий. Если системы асимптотически устойчивы, то с течением времени процессы стремятся к установившимся значениям:

Рис.2.20.Пример расположения корней устойчивости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{уст}(t).$$

Для установления устойчивости системы или звена, не вычисляя корней характеристического полинома, применяют критерии устойчивости, которые с помощью относительно простых вычислений позволяют установить, лежат ли все корни в левой полуплоскости.

Имеют место алгебраические и частотные критерии устойчивости. К алгебраическим относятся критерии Гурвица и Рауса, а к частотным – критерии Михайлова и Найквиста.

Необходимое условие устойчивости.

При определении устойчивости по характеристическому полиному следует проверить выполнение необходимого условия: чтобы все корни полинома имели отрицательные действительные части, все его коэффициенты должны быть одного знака (положительными).

Типовое апериодическое звено первого порядка (n=1) устойчиво при T > 0; устойчивы звенья второго порядка при T > 0. Интегрирующее (n=1) и консервативное (n=2) звенья не удовлетворяют условию положительности всех коэффициентов. Они имеют корни на мнимой оси. Это соответствует устойчивости по начальному состоянию (по Ляпунову); однако нет асимптотической устойчивости. Следует отметить, что звенья или системы, имеющие некрратные корни характеристического полинома на мнимой оси (а остальные – левые), находятся на границе устойчивости. Такие системы являются негрубыми – они теряют устойчивость при малейших изменениях параметров.

Алгебраические критерии.

Пусть характеристический полином звена или системы автоматического управления имеет вид:

$$A(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n \tag{2 – 24}$$

Критерий Гурвица. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы при a\_n > 0 все диагональные определители матрицы Гурвица были положительны. Например, для системы третьего порядка:

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 \tag{2 – 25}$$

матрица Гурвица имеет вид

$$H = \left\{ \begin{matrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \end{matrix} \right\} \tag{137}$$

$$0 \ a_2 \ a_0$$

Если выполнено необходимое условие положительности коэффициентов полинома  $A(s)$ , то следует проверить только знак определителя

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 \quad (2 - 26)$$

Для устойчивости системы третьего порядка произведение средних коэффициентов характеристического полинома должно быть больше произведения крайних.

С помощью критерия Гурвица можно строить границы устойчивости в пространстве коэффициентов полинома или параметров системы управления.

Для систем высоких порядков критерий Гурвица не очень удобен – многократное вычисление определителей становится трудоемким и избыточным. В этом случае предпочтительнее применение критерия Рауса, имеющего также алгоритмическую форму. Этот критерий позволяет быстро определить устойчивость системы, если имеется ее характеристический полином  $A(s)$  и заданы численно его коэффициенты. Критерий Рауса наиболее экономичен по объему вычислений в сравнении с другими критериями. Он широко применяется для анализа влияния параметров системы на ее устойчивость с использованием ЭВМ, так как алгоритм вычислений удобен для программирования.

#### Частотный критерий Михайлова.

Критерий Михайлова базируется на принципе аргумента. Выражение для характеристического полинома  $A(s)$  рассматривается как функция комплексного переменного, принимающего значения на положительной мнимой полуоси. Критерий сводится к анализу изменения аргумента функции  $A(j\omega)$ .

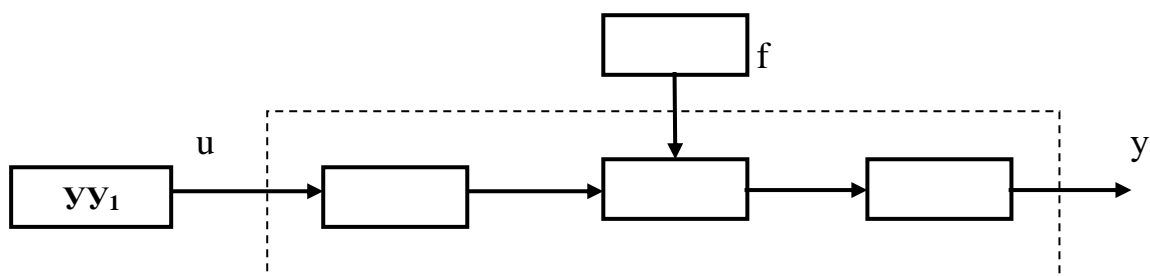
По критерию Михайлова, для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора  $A(j\omega)$ , начинаясь при  $\omega = 0$  на действительной положительной полуоси, с ростом  $\omega$  нуля до бесконечности обходил последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки)  $n$  квадрантов, где  $n$  – порядок системы:  $\delta \arg A(j\omega) = n \pi/2$ .

#### 2.8. Синтез систем управления.

Целью синтеза является построение математической модели системы управления, удовлетворяющей требованиям к поведению: ковариантности с заданием; инвариантности к возмущениям; устойчивости и грубости (робастности). Имеем математическую модель объекта управления со связями со средой (рис.2.21.).

В задачах синтеза алгоритмов управления к объекту ОУ или неизменяемой части относят исполнительные механизмы ИМ и измерительные элементы ИЭ. При этом входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$  расширенного объекта являются маломощные сигналы – носители информации.

Средства решения задачи синтеза в представленной постановке могут быть:



### Рис.2.21. Расширенный объект управления

- выбор структур систем (т.е. элементов и топологии причинно-следственных связей между ними), -структур операторов элементов (в данном случае, алгоритмов управляющих устройств) и значений их параметров (например, настроек регуляторов).

Удовлетворению требований к поведению систем обычно препятствуют динамические свойства объектов управления и других элементов неизменяемой части, недоступность полной априорной информации о свойствах элементов системы и среды, невозможность получения всей текущей информации о состоянии объекта и возмущениях, ограничения на переменные системы и управляющие воздействия.

Более общей по сравнению с синтезом является задача проектирования систем управления. При этом требования к поведению систем управления являются доминирующими, однако, при проектировании следует учитывать и другие требования и ограничения, содержащихся в технических заданиях: надежность систем, их приемлемую стоимость, требования энергетического характера, ограничения, связанные с типом сигналов, массой и габаритами систем, компоновкой элементов и трассировкой связей и т.д..

Для расчетов систем с учетом таких требований привлекаются модели и методы, отличные от рассматриваемых в традиционных курсах теории управления.

Решение задач анализа – проверки соответствия поведения системы требованиям – необходимо иметь описание системы, среды и требований. Если система не удовлетворяет требованиям, принимается решение о необходимости синтеза. В постановках задач синтеза задается множество систем  $\mu$ , на котором проводится выбор. Задача синтеза нетривиальна только в случае, когда множество  $\mu$  содержит более одного элемента, иначе говоря, имеется исходная неопределенность.

Выделим следующие постановки задачи:

Во-первых, элементы множества  $\mu$  могут различаться параметрами. При этом множество  $\mu$  является моделью второго ранга неопределенности  $\mu = M(2) = \{M(3)\}$ , т.е. множеством полностью определенных систем третьего ранга. Это имеет место, когда системы различаются параметрами одного из звеньев, например настройками регулятора. В результате параметрического синтеза находятся их значения;

Во-вторых, элементы исходного множества  $\mu$  могут различаться структурами операторов звеньев. При этом множество  $\mu$  является моделью первого ранга неопределенности  $\mu = M(1) = \{M(2)\}$ , т.е. множеством моделей второго ранга. В результате структурного синтеза выбирается подмножество структур операторов (в данном случае – единственная структура), после чего имеет место рассмотренная выше задача параметрического синтеза. В этом случае этим звеном может быть регулятор, и на основании структурного синтеза необходимо найти его тип.

В-третьих, множество  $\mu$  может быть моделью нулевого ранга неопределенности  $\mu = M(0) = \{M(1)\}$ , т. е. представляет собой множество систем с различной топологией. В результате топологического синтеза выбирается подмножество топологий (в данном случае – единственная топология), после этого решается задача структурного синтеза. В результате синтеза необходимо найти наилучшее место включения регулятора или компенсатора, т. е. определяются точки измерения и реализацию на объект управляющих воздействий.

Синтез представляет собой повышение ранга моделей  $R$ , т. е. уменьшение неопределенности или разнообразия за счет привлечения информации о пожеланиях проектировщика. Требования следует рассматривать как множество систем  $\mu^d$ , поведение которых удовлетворительно. Описание этого множества, в отличие от “структурно-операторского” описания систем, строится на “поведенческом” уровне, характеризуя качественно и количественно свойства устойчивости, инвариантности и робастности.

#### Задачи синтеза систем управления.

Целесообразно рассмотреть основные задачи синтеза систем управления на содержательном уровне.

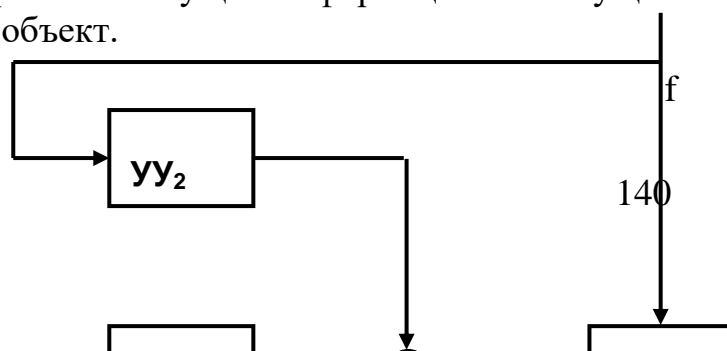
Синтез управляющих воздействий. Приложенное к объекту допустимое управляющее воздействие  $u(t) \in U$  должно обеспечить в определенном смысле наилучшее поведение объекта. Задача синтеза математически обоснована как поиск функции времени  $u^*(t)$ , доставляющей минимум (максимум) некоторому функционалу:  $J(y(t), u(t), f(t)) \rightarrow \min (\max)$ ; с учетом динамических свойств объекта, ограничений на его переменные состояния, а также возмущений  $f(t)$ , о которых имеется полная априорная информация. Решение сводят к поиску условных экстремалей функционалов, для чего привлекаются методы классического вариационного исчисления, динамического программирования и принцип максимума.

Управляющее воздействие  $u^*(t)$  генерируется управляющим устройством  $УУ_1$  (см. рис.2.21.) и обеспечивает оптимальную траекторию движения (поведения) объекта  $y^*(t)$ .

Однако, во многих технических объектах оптимальное постоянно  $u^* = \text{const}$  и обеспечивает оптимальный режим  $y^* = \text{const}$ , определяемый согласно требований технологии.

Синтез компенсаторов возмущений. При действии на объект возмущений  $f(t)$ , которые не учтены при синтезе оптимального управления  $u^*(t)$ , то поведение объекта будет отличаться от оптимального. А в случае недопустимых отклонений соответствующей траектории (режима) необходимо принять меры по ослаблению влияния возмущений.

При измерении возмущений непосредственно (рис.2.22.), то задачей синтеза является определение алгоритма управляющего устройства  $УУ_2$ . В нем происходит обработка текущей информации о возмущении и формирование воздействия  $u_2(t)$  на объект.



$u_2$

$u_1$

$u$

$y$

Рис.2.22. Компенсация возмущения

Часть управляющего устройства, формирующую компенсирующее воздействие, называют также компенсатором (К). Образование канала компенсации в принципе, может обеспечить абсолютную инвариантность управляемой переменной к непосредственно измеряемому возмущению.

Синтез систем управления при условии подавления непосредственно неизмеряемых возмущений.

Если к объекту приложены постоянно действующие некомпенсированные возмущения  $f(t)$ , то единственным средством компенсации их влияния на управляемую переменную  $y(t)$  является создание контуров обратной связи (см. рис.2.9.) с достаточно большим усилением на частотах возмущений. Необходимое усиление контура обеспечивается введением внутренних компенсаторов возмущений (рис.2.23.).

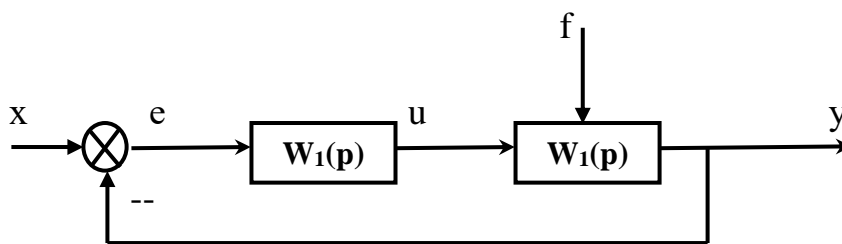


Рис.2.23. Система с внутренним компенсатором

При бесконечном усилении контура на комплексных частотах возмущений установившаяся реакция системы равна нулю. Селективная инвариантность обеспечивается, если на частотах возмущений усиление контура велико.

Пусть измеряется непосредственно выходная переменная объекта и основное возмущение. Тогда создают комбинированные системы управления, реализующие оба принципа управления – разомкнутому и замкнутому циклам. Канал компенсации обеспечивает инвариантность к основному возмущению (например, момент сопротивления на валу двигателя, ток нагрузки электрического генератора), а обратная связь ослабляет влияние непосредственно неизмеряемых возмущений, а также вариаций операторов.

Компенсация главного возмущения позволяет снизить требования к астатизму системы и усилению контура обратной связи, что облегчает решение задачи стабилизации системы и удовлетворяет требования к переходным процессам.

#### Синтез следящих систем управления.

В следящих системах управляемая переменная  $y(t)$  должна производить заранее неизвестное воздействие  $x(t)$ , т. е. должна быть ковариантной с ним.

Текущая информация обычно может быть получена только об ошибке слежения:  $e(t) = x(t) - y(t)$ . В этом случае строится система с обратной связью (см. рис.2.23), а задачей синтеза является определение алгоритма регулятора:  $u(t) = R(e(t))$ , который должен обеспечивать воспроизведение задающего воздействия с требуемой точностью. Переменная ошибки  $e(t)$  должна быть инвариантной к заданию  $x(t)$  и возмущениям  $f(t)$ .

В следящих системах без непосредственного измерения задающего воздействия нельзя реализовать абсолютную инвариантность ошибки к заданию. Селективная абсолютная инвариантность достигается, если ввести в контур внутренний компенсатор воздействия, который уравнивает полюсы передаточной функции и полюсы изображения воздействия  $x(t)$ .

Таким образом, видно в обеих системах (см. рис.2.9. и рис.2.23.) – подавление воздействия и воспроизведение задания – переменная ошибки должна быть инвариантной в воздействиям. Разница между задачами синтеза этих систем заключается в том, что основные требования в первом случае относятся к точности подавления возмущения, а во втором – к точности воспроизведения задания.

#### Коррекция систем управления.

Создание контуров обратной связи и повышение их усиления, введение в контуры внутренних компенсаторов, передаточные функции которых имеют полюсы, равные полюсам, изображений воздействий, обычно приводят к тому, что замкнутая система с удовлетворительными установившимися движениями будет иметь плохие переходные процессы или даже окажется неустойчивой. Это имеет место, когда спектры воздействий близки к спектру объекта, т. е. усиление контура повышается на частотах объекта, вызывая существенное перемещение полюсов (корней полинома) передаточной функции объекта.

Если средства, обеспечивающие инвариантность переменной ошибки к непосредственно неизмеряемым воздействиям, приводит к неустойчивости замкнутой системы, то следует разрешить это противоречие между качеством установившихся и переходных процессов введения коррекции.

Синтез систем с обратной связью в общем случае является сложной задачей. Ее сложность обусловлена разнообразием требований: одновременно следует обеспечить инвариантность к возмущениям, ковариантность с заданием, устойчивость, а также по возможности, малую чувствительность перечисленных свойств. Эти требования обычно оказываются противоречивыми, то обуславливает процедуру синтеза регуляторов в последовательность принятия компромиссных решений.

Однако упростить задачу синтеза (частично) возможно в случае линейных моделей, когда установившиеся и переходные составляющие движений в определенной мере можно формировать отдельно. Декомпозиция возможна при условии, когда собственные движения системы быстрее по сравнению с воздействиями среды. Это значит, что модули полюсов передаточной функции системы должны быть больше модулей полюсов воздействий.

Таким образом, процедура синтеза систем подавления возмущений и воспроизведения задания формируется из двух основных этапов:

- синтеза компенсатора по требованиям к установившимся процессам;
- коррекции по требованиям к переходным процессам.

При этом управляющее устройство представляется как совокупность компенсатора возмущения, обеспечивающего установившуюся точность, и звена коррекции, гарантирующего устойчивость и требуемое качество переходных процессов.

#### Синтез регуляторов для неустойчивых объектов.

Оптимальные траектории  $y^*(t)$ , в частном случае – оптимальный режим  $y^* = \text{const}$  – могут быть неустойчивыми или вариации движений могут затухать не достаточно быстро. В этом случае обозначается задача стабилизации неустойчивого режима и обеспечение необходимого характера переходных процессов.

Для изменения характера собственных движений требуется создать систему с обратной связью (рис.2.24,а), т. е. реализовать принцип управления по замкнутому циклу. Управляющее устройство УУ<sub>3</sub>, обеспечивающее устойчивость и качество процессов в окрестности оптимального режима, называют также регулятором (Р)

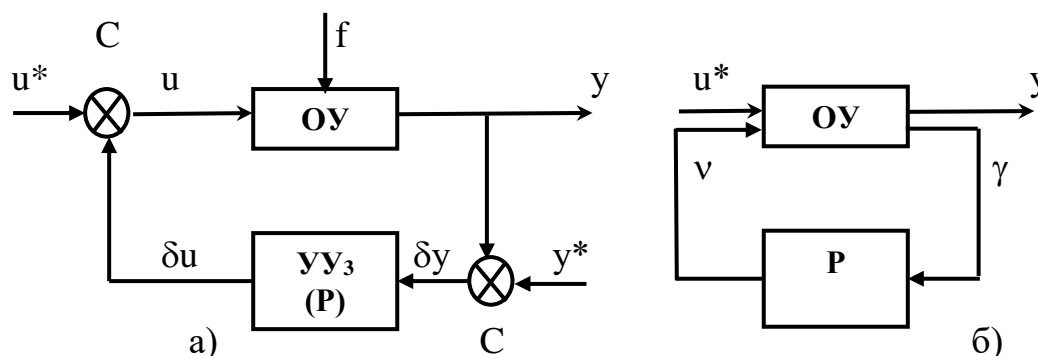


Рис.2.24. Стабилизация неустойчивого режима

Задачей синтеза в этом случае является определение алгоритма регулирования  $\delta u(t) = R(\delta y(t))$ , а именно, его типа (структуры) и настроек параметров.

В общем случае, стабилизирующая обратная связь может включаться и иначе (рис.2.24,б): измеряется некоторая внутренняя переменная  $\gamma(t)$  и на объект оказывается воздействие по дополнительному входу  $v(t)$ . При наличии нескольких мест возможного включения регулятора возникает задача топологического синтеза – выбора наилучшего места.

Во многих случаях задача стабилизации практически решается по математическим моделям, линеаризованным для малых отклонений от рассматриваемого режима.

### Расчет настроек типовых регуляторов.

Большинство локальных систем управления промышленной автоматике имеют типовую одноконтурную систему (см. рис.2.23) с управляющими устройствами, реализующими типовые алгоритмы. Поэтому, системы имеют определенную топологию и структуры операторов, но остаются неопределенными параметры управляющих устройств, которые в системах стабилизации и следящих системах обычно называются регуляторами.

Параметры настроек типовых регуляторов рассчитываются из условий устойчивости, минимизации динамических ошибок. Предложены рекомендации по выбору настроек типовых регуляторов и разработаны графо-аналитические методики их расчета. В настоящее время для оптимизации систем с типовыми регуляторами применяются ЭВМ.

### Синтез систем управления в условиях неполной определенности моделей.

Даже при точной реализации алгоритма управления, синтезированного на базе полностью определенной модели, реальная система, в определенной степени, будет иметь другое поведение, так как реальная динамика объекта отличается от модельной. Поэтому любой метод синтеза имеет смысл только в том случае, если он по меньшей мере гарантирует, что малые вариации характеристик элементов не вызовут больших изменений поведения системы.

Синтезированная система должна быть грубой – это необходимое условие применимости методов синтеза. Практически не требуется робастность основных свойств – система управления должна быть работоспособной при конечных изменениях характеристик элементов.

Передачи замкнутых систем малочувствительны к вариациям характеристик некоторых элементов на частотах, где усиления контуров велики. Наличие контура является необходимым структурным (топологическим) условием стабилизации неустойчивых объектов, ослабления сигнальных и операторных возмущений. В этом состоит универсальность действия обратной связи.

При синтезе систем частотными методами можно контролировать диапазоны частот, на которых вариации характеристик элементов оказывают незначительное влияние на характеристики систем. Для количественной оценки влияния вариаций элементов на условия инвариантности систем можно использовать функции чувствительности.

Если вариации элементов велики и/или усиления контуров на требуемых частотах не могут быть повышены, то необходимы активные средства ослабления влияния вариаций элементов на свойства систем. В этих случаях строят адаптивные системы управления, в которых за счет обработки текущей информации о динамических свойствах объектов происходит перестройка алгоритма управляющего устройства.

Задачи синтеза адаптивных систем решаются вне рамок линейной теории управления.

### Стабилизация неустойчивых объектов.

Имеем анализ линейной модели, описывающей движения объекта в окрестности выбранного режима работы, который показал, что режим неустойчив. Ма-



тематически этот факт выражается в том, что характеристический полином дифференциального уравнения имеет корни с неотрицательными действительными частями. Возникает задача стабилизации неустойчивого объекта.

В других случаях объект может быть устойчивым, но его собственные движения не удовлетворяют требованиям (например, движения сильно колебательные или/и затухают слишком медленно).

Необходимым топологическим условием изменения расположения корней характеристического полинома является образование контура, содержащего объект управления. Кроме этого, передаточная функция объекта по выбранному каналу вход-выход не должен иметь неустойчивых полюсов. В противном случае никакая обратная связь не сможет переместить корни неполной части.

В зависимости от формы представления модели объекта и требований к собственным движениям системы можно применить различные методы синтеза.

### 2.9. Общие сведения о дискретных системах автоматического управления.

В непрерывных системах автоматического управления рабочая информация представлена в виде сигналов, описываемых непрерывными функциями времени. Широкое использование имеют дискретные системы, в которых осуществляется квантование сигналов.

Квантование или дискретизация состоит в представлении непрерывного сигнала его дискретными значениями. В зависимости от вида квантования системы автоматического управления подразделяют на дискретные по уровню (релейные), дискретные по времени (импульсные), дискретные по уровню и по времени (релейно-импульсные).

В релейных системах производится квантование по уровню  $\delta_0$  (рис.2.25), при котором в произвольные моменты времени выделяются значения непрерывного сигнала при достижении им фиксированных дискретных уровней.

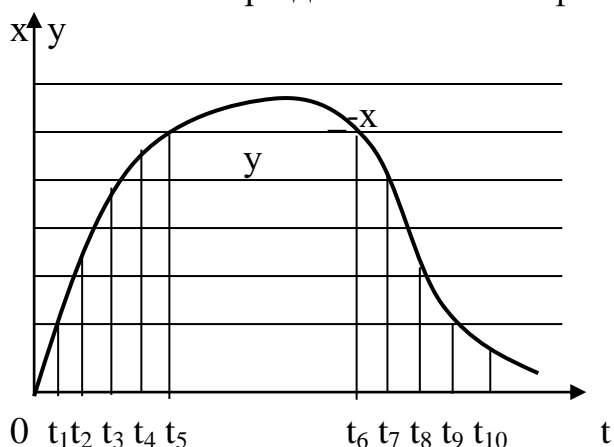


Рис.2.25. Квантование по уровню

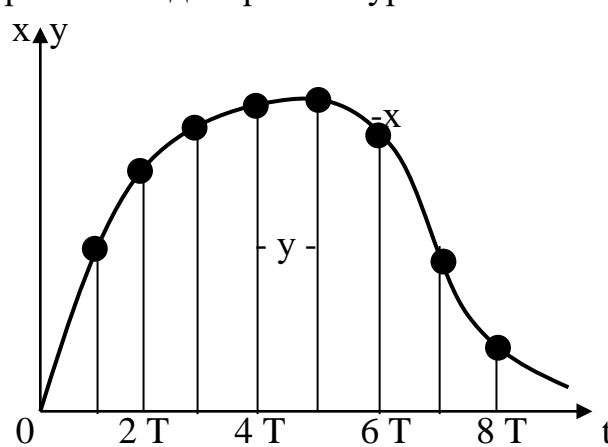


Рис.2.26. Квантование по времени

В импульсных системах производится квантование по времени, при котором в дискретные моменты времени выделяются значения непрерывного сигнала (рис.2.26). Обычно эти моменты времени отстоят друг от друга на некоторую постоянную величину  $T$ , называемую периодом квантования.

Квантование по времени осуществляется импульсным элементом, выходной сигнал которого представляет собой последовательность импульсов.

В релейно-импульсных системах производится квантование по уровню и по времени, при этом непрерывный сигнал заменяется фиксированными дискретными (по уровню) значениями, ближайшими к значениям в дискретные моменты времени (рис.2.27).

Квантование по уровню и по времени осуществляется в цифровых системах управления при преобразовании непрерывных сигналов в цифровую форму или в коды, поэтому в общем случае цифровые системы управления относятся к классу релейно-импульсных систем.

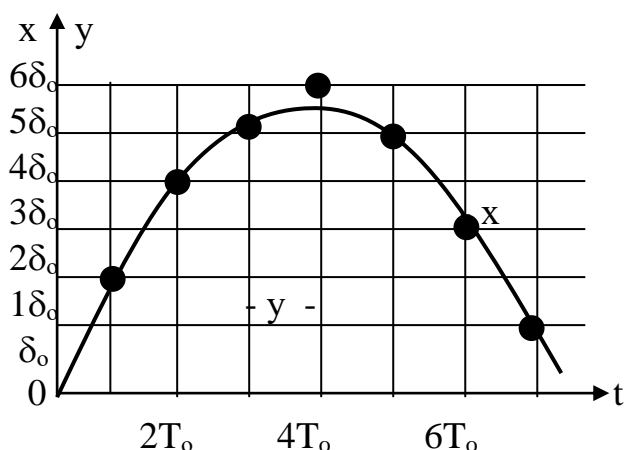


Рис.2.27. Квантование по уровню и времени

численные физические и биологические явления, процессы в социальных и экономических сферах, динамика которых адекватно может быть описана только дискретными моделями.

Вторая категория – системы, в которых информация существует непрерывно, но намерено квантуется для получения некоторых новых средств по сравнению с непрерывными системами. Такими свойствами могут быть: простота реализации, повышение надежности, увеличение точности, меньшие габаритные размеры и стоимость. Быстрый прогресс в вычислительной технике, широкое использование микропроцессоров в системах управления еще более увеличивает интерес к дискретным системам.

Основные положения для импульсных систем автоматического управления.

Импульсная система отличается от непрерывной наличием импульсного элемента, осуществляющего квантование по времени. Процессы преобразования непрерывного сигнала в последовательность импульсов, параметры которых зависят от параметров этого сигнала в дискретные моменты времени, называют импульсной модуляцией. Входным сигналом импульсного элемента (модулятора) является непрерывный сигнал, а выходным – модулированная последовательность импульсов.

В зависимости от того, какой параметр импульса (амплитуда, длительность, фаза) модулируется непрерывным сигналом (рис.2.28), различают: амплитудно –

Область применения дискретных систем в настоящее время достаточно разнообразна. Можно выделить две основные категории таких систем.

Первая – системы, которые дискретны по своей физической природе, т.е. информация в них существует только в дискретные моменты времени. Примерами этой категории дискретных систем являются радиолокационные системы обнаружения и сопровождения цели. Существуют много-

импульсную модуляцию (АИМ) – рис.2.28,а; широтно – импульсную модуляцию (ШИМ) – рис.2.28,б; фазоимпульсную модуляцию (ФИМ) – рис.2.28,в. Возможно модуляция, при которой амплитуда, длительность и фаза импульсов постоянны, а функцией непрерывного сигнала на входе модулятора является период повторения или частота импульсов на выходе модулятора. Такой вид модуляции называется частотно – импульсной (ЧИМ). Частным случаем ЧИМ является числоимпульсная модуляция, при которой изменяется число импульсов на определенном временном отрезке.

Если модулируемый параметр последовательности импульсов определяется значениями входного сигнала в фиксированные равноотстоящие моменты

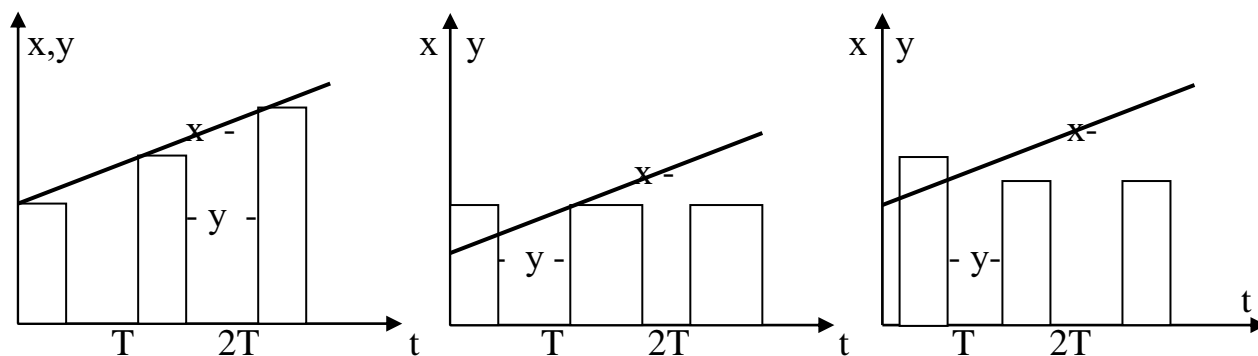


Рис.2.28. Виды импульсной модуляции

времени и остается постоянным в течение времени существования импульса, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией первого рода. Возможны случаи, когда модулируемый параметр последовательности импульсов в течение времени существования импульса изменяется в соответствии с текущим значением входного сигнала. Такой вид модуляции называется импульсной модуляцией второго рода.

Примером систем с амплитудно-импульсной модуляцией второго рода являются системы прерывистого регулирования или системы с конечным временем замыкания импульсного элемента (рис.2.29).

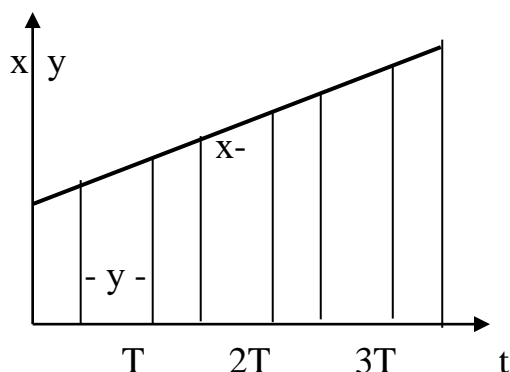


Рис.2.29. Модуляция второго рода

нелинейного элемента). Широтно-импульсные системы принципиально нелинейны. Нелинейными являются и цифровые системы в которых имеет место квантование по уровню.

Системы автоматического управления в зависимости от вида импульсной модуляции подразделяются на амплитудно-импульсные системы (АИС), широтно-импульсные системы (ШИС), фазоимпульсные системы (ФИС). Амплитудно-импульсные системы могут быть как линейными так и нелинейными (при наличии

Зависимость модулируемого параметра  $M$  последовательности импульсов  $x_M$  на выходе импульсного элемента от соответствующих значений входного сигнала  $x$  называется статической характеристикой импульсного элемента. Коэффициентом передачи (усиления) импульсного элемента является отношение значения модулируемого параметра  $M$  выходной последовательности импульсов к значению входного сигнала  $x$ .

Обобщенные структурные схемы импульсных автоматических систем.

В общем случае любая одноконтурная импульсная автоматическая система (ИАС) может быть представлена взаимодействующими друг с другом импульсной ИЧ и непрерывной НЧ частями (рис.2.30). В непрерывную часть обычно входит объект управления, а также усилитель мощности и исполнительное устройство.

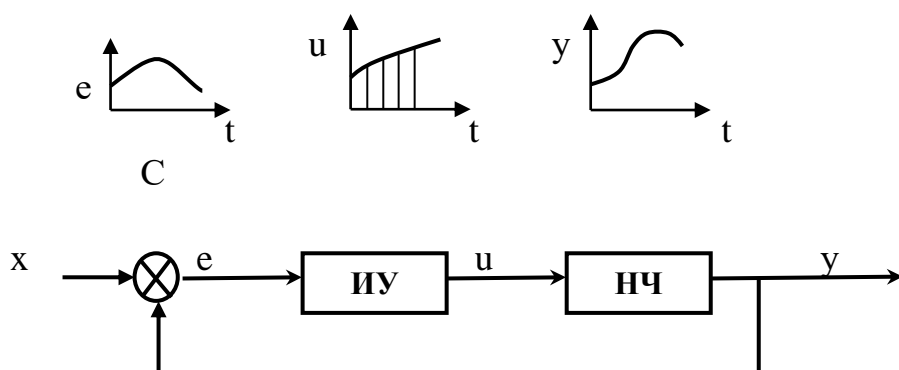


Рис.2.30. Обобщенная структурная схема замкнутой импульсной системы

Импульсная часть, как правило, является управляющим устройством и объединяет функциональные элементы, участвующие в импульсном преобразовании сигнала. Эта часть может быть реализована в виде ключей, модуляторов, импульсных регуляторов, цифровых вычислительных устройств с аналого-цифровыми (АЦП) и цифроаналоговыми преобразователями (ЦАП) и т. д.

Функционально импульсную часть можно рассматривать как некоторый преобразователь непрерывного сигнала в импульсное управляющее воздействие того или иного вида. В простейшем случае импульсная часть является реальным импульсным элементом (РИЭ) или импульсным модулятором (рис.2.31).

При исследовании импульсных систем их реальные импульсные элементы обычно заменяют последовательными соединениями идеального импульсного и формирующего элементов.

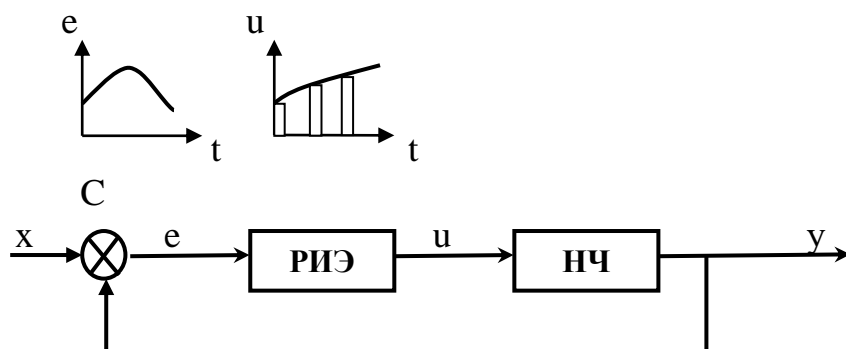


Рис.2.31. Структурная схема импульсной системы с реальным импульсным элементом

Идеальный импульсный элемент (ИИЭ) под воздействием непрерывного входного сигнала формирует идеальные мгновенные импульсы вида  $\delta$ -функций, “амплитуды площадей”, которые равны значениям входного сигнала в момент квантования (рис.2.32).

Формирующий элемент (ФЭ) преобразует эти импульсы в импульсы, соответствующие выходной импульсной последовательности  $u(t)$  реального импульсного элемента (рис.2.31).

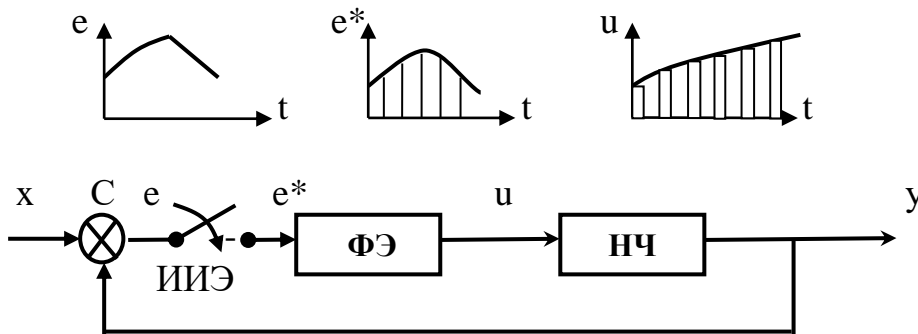


Рис.2.32. Структурная схема импульсной системы с идеальным импульсным элементом

Идеальными импульсами следует считать импульсы бесконечно большой амплитуды и бесконечно малой длительности с площадями, численно равными значениям непрерывного сигнала  $e(t)$  в дискретные моменты квантования.

ИИЭ представляет собой амплитудно-модульный модулятор, непрерывный входной сигнал которого  $e(t)$  модулирует несущую последовательность мгновенных  $\delta$ -импульсов бесконечно большой амплитуды с единичной площадью, т. е. импульсов вида  $\delta$ -функций с постоянным периодом повторения  $T$ , но не единичной, а переменной площади, которая является мерой входного сигнала в дискретные моменты времени.

Формирующий элемент ФЭ – это некоторый непрерывный фильтр, реакция которого на мгновенный импульс последовательности  $e^*(t)$  совпадает по своей форме с реальным импульсом последовательности  $u(t)$  на выходе реального импульсного элемента (рис.2.31.).

Для удобства анализа ФЭ и непрерывную часть импульсной системы объединяют. Приведенной непрерывной частью (ПНЧ) называют последовательное соединение ФЭ и непрерывной части (рис.2.33.).

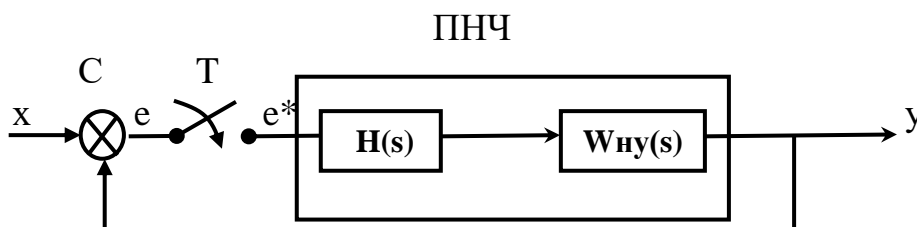


Рис.2.33. Эквивалентная схема импульсной системы с амплитудно-импульсной модуляцией

Передаточная функция приведенной непрерывной части равна:

$$W_{\text{пнч}} = H(s) W_{\text{нч}}(s). \quad (2 - 27)$$

Обычно коэффициент усиления импульсного элемента  $k_{\text{и}}$  относят к непрерывной части системы, учитывая, что коэффициент передачи формирующего элемента равен единице.

В цифровых системах управления (рис.2.34) непрерывные сигналы квантуются по времени и по уровню. Квантование по времени осуществляется мультиплексором с периодом дискретности  $T$ , а квантование по уровню (округление или усечение) – в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). Мультиплексор обычно конструктивно объединяется с устройством масштабирования и АЦП. Цифровой сигнал обрабатывается процессором (цифровым вычислителем – ЦВ) и поступает в цифроаналоговый преобразователь (ЦАП).

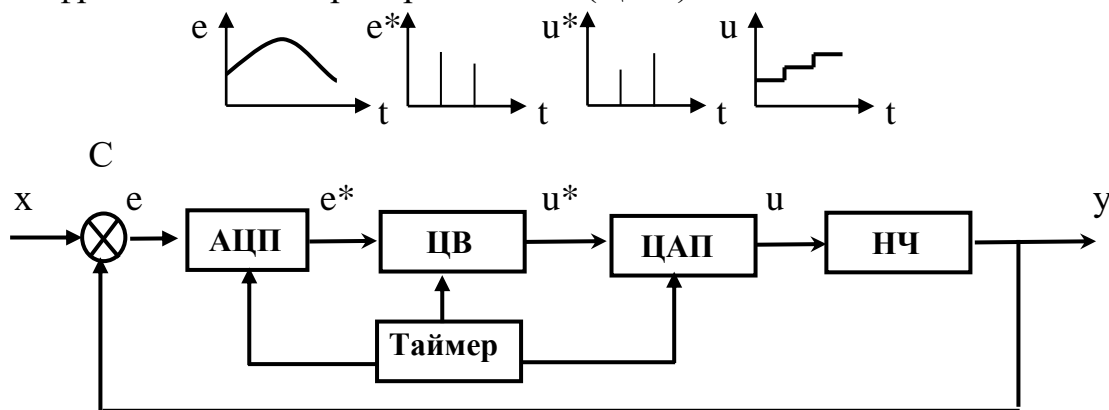


Рис. 2.34. Блок-схема цифровой системы управления

Время  $\tau_{\text{ц}}$ , затраченное на преобразование аналогового сигнала  $e(t)$  в цифровую форму с последующей его обработки в процессоре, представляет собой задержку в канале управления. Обычно  $\tau_{\text{ц}}$  часто пренебрегают.

Таким образом, обобщенная структурная схема цифровой автоматической системы можно представить в виде, приведенной на рис.2.35.

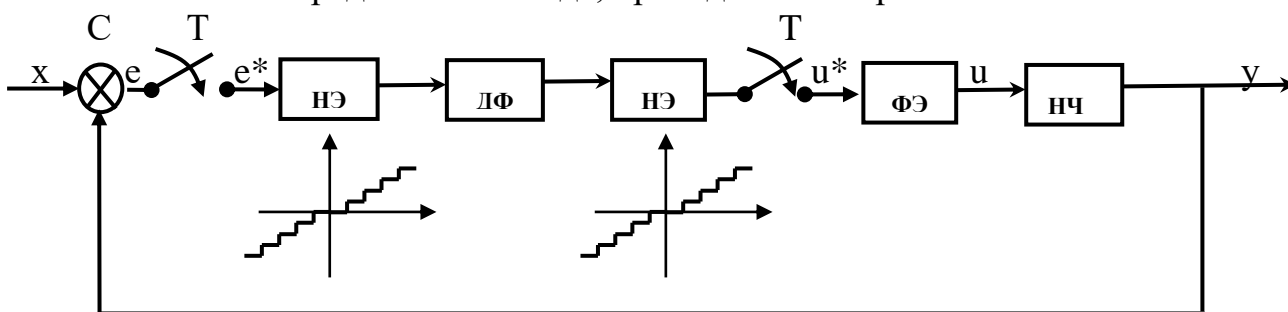


Рис.2.35. Обобщенная структурная схема цифровой системы управления

Идеальные импульсные элементы соответствуют квантователям на входе и выходе процессора, сам процессор представлен в виде дискретного фильтра (ДФ), а квантование по уровню учитывается многоступенчатыми элементами (НЭ).

При использовании аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей, имеющих достаточно большое число разрядов, эффекты квантования по уровню часто можно не учитывать.

Структурная схема цифровой системы управления в этом случае соответствует амплитудно-импульсной системе с импульсной частью в виде линейного дискретного фильтра (ЛДФ), рис.2.36.

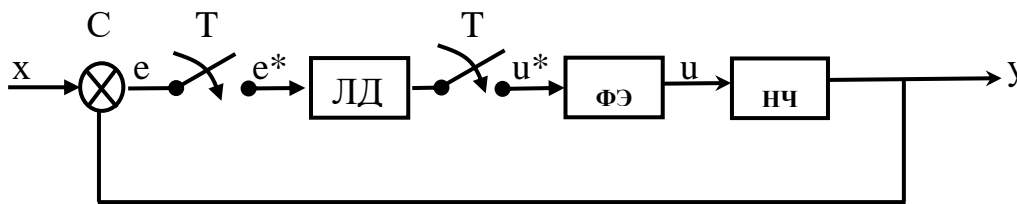


Рис.2.36. Структурная схема цифровой системы управления без учета квантования по уровню

Выходной сигнал ЛДФ преобразуется фильтрующим устройством типа экстраполятора нулевого порядка (фиксатора).

### Тестирование.

1. Управление, что это?
2. Модель управления?
3. Объект управления?
4. АСУ?
5. Цель управления?

### Выбери правильный ответ.

- а) Совокупность операций для достижения целей
  - б) Совокупность элементов для достижения целей
  - в) Совокупность систем для достижения целей -
- а) Прообраз реальной системы управления
  - б) Адекватность системы управления
  - в) Имитация системы управления
- а) Преобразователь переменных входа-выхода.
  - б) Модель преобразования входа-выхода.
  - в) Устройство преобразования входа-выхода.
- а) Автоматическая система управления.
  - б) Адаптивная система управления.
  - в) Автоматизированная система управления.
- а) Изменения  $y(t)$  по заданной программе.
  - б) Изменения  $y(t)$  по заданному алгоритму.
  - в) Изменения  $y(t)$  по заданному закону.

### Вопросы самоконтроля.

1. Система управления, ее назначение.
2. Объекты управления.
3. Принципы управления.

4. Классификация систем управления.
5. Задачи теории управления.
6. Способы построения моделей.
7. Характеристики систем управления.
8. Анализ систем управления.
9. Типовые звенья систем управления.
10. Критерии управления и их назначение.
11. Синтез систем управления.
12. Задачи синтеза систем управления.
13. Дискретные системы управления.
14. Цифровые системы управления.