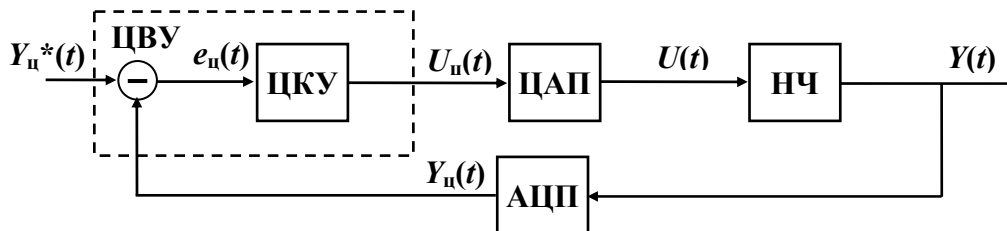


Г.В. Зырянов

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие



## ВВЕДЕНИЕ

Современные технические средства, используемые для реализации управляющих устройств в системах управления (СУ), чрезвычайно разнообразны и могут отличаться физической природой, принципами работы, а также формой представления рабочих сигналов. Часто среди них встречаются такие устройства, у которых либо выходные, либо входные сигналы описываются *прерывистыми* функциями времени и имеют вид последовательностей цифровых кодов (*цифровые сигналы*) или импульсов определенной формы (*импульсные сигналы*).

Системы управления, содержащие такие устройства и сигналы, называются, соответственно, *цифровыми* и *импульсными*. Из-за прерывистого (дискретного) характера некоторых сигналов в таких системах для них обычно используется более общее название – *дискретные системы управления* (ДСУ) [6].

Применение импульсных и цифровых устройств и сигналов оправдано стремлением улучшить эксплуатационно-технические характеристики СУ. Функциональное назначение таких устройств может быть различным: датчики обратных связей, задающие, усилительно-преобразовательные и согласующие устройства, корректирующие звенья и т.п. Современным и перспективным видом ДСУ являются *микропроцессорные* системы управления (МП СУ), в которых различные микропроцессорные средства (микроЭВМ, программируемые микроконтроллеры и др.) используются для реализации управляющих алгоритмов [2].

Достоинствами ДСУ являются их повышенная чувствительность, отсутствие дрейфа, более высокая надежность и устойчивость к шумам и возмущениям, меньшие размеры, масса и стоимость. Для цифровых управляющих устройств (регуляторов), по сравнению с аналоговыми устройствами, характерна более высокая гибкость, так как программы их работы можно легко изменять и модернизировать без каких-либо изменений в аппаратуре [4, 5]. Кроме того, цифровые компоненты электронных схем часто оказываются надежнее, прочнее и компактнее, чем аналоговые компоненты того же назначения. Эти и некоторые другие преимущества все чаще определяют выбор проектировщиков в пользу дискретных систем управления [6].

С точки зрения формального математического описания и аналитических методов исследования, главной особенностью ДСУ является то, что *информационные параметры* некоторых сигналов (значения кода  $N$ , амплитуда  $A$ , ширина  $\tau$  или временное расположение  $\theta$  очередного импульса) могут изменять (обновлять) свои значения только в некоторые «разрешенные» *дискретные* моменты времени  $t_k$ . Во многих практически важных случаях их можно считать равноотстоящими на величину *постоянного* шага дискретизации  $T_0$ , когда  $t_k = kT_0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Именно по этой причине точное описание свойств ДСУ средствами непрерывного математического аппарата и их исследование методами непрерывной теории в принципе невозможно. Для этих целей разработаны особые методы, объединенные в специальный раздел теории управления [1, 6, 7]. Математической основой этих методов является *дискретный математический анализ* (исчисление конечных разностей, разностные уравнения, дискретное преобразование Лапласа и др.). Наиболее разработанным здесь является раздел теории *линейных дискретных систем управления*.

Из-за специфики математического описания, самостоятельное освоение основ теории ДСУ часто вызывает затруднения даже у тех, кто хорошо знаком с теорией непрерывных СУ [7]. Главная цель данного учебного пособия состоит в том, чтобы помочь в

изучении и практическом освоении основ теории линейных ДСУ. При этом существенное внимание уделяется цифровым системам управления (ЦСУ) при рассмотрении их в рамках линейной теории.

## 1. РАСЧЕТНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В состав дискретных СУ, кроме обычных устройств непрерывного действия (УНД), обязательно входят такие технические устройства, выходы (или входы) которых представляют собой прерывистые (цифровые или импульсные) сигналы. Это могут быть, например, импульсные элементы (ИЭ), импульсные цепи, аналого-цифровые (АЦП) и цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП), цифровые вычислительные устройства (ЦВУ). Для краткости последующего изложения, будем называть их *устройствами дискретного действия (УДД)*.

Из-за наличия УДД, *исходная* математическая модель ДСУ всегда будет *дискретно-непрерывной* и поэтому точное исследование ее методами непрерывной теории в принципе невозможно. Для теоретического исследования ДСУ ее математическое описание (модель) необходимо преобразовать к специальному *расчетному виду*, представляющему собой совокупность уравнений и функциональных зависимостей относительно функций дискретного аргумента – *решетчатых функций*  $f_i(kT_0) = f_i[k]$ . Это могут быть формулы, алгебраические и разностные уравнения, а также их различные сочетания.

Структурная схема такой *дискретной модели* представляет собой соединение абстрактных *однонаправленных дискретных звеньев*, входы и выходы которых являются *дискретными сигналами* с математическим описанием в виде решетчатых функций  $f_i[k]$ . В составе полученной таким образом *расчетной структурной схемы* могут встретиться как типовые (последовательное, параллельное, встречно-параллельное), так и другие, более сложные, соединения дискретных звеньев.

Для исследования свойств и особенностей цифровых и импульсных систем управления на основе их дискретных математических моделей разработаны специальные методы, составляющие содержание теории ДСУ. Наиболее простым для изучения здесь является раздел линейных дискретных систем. Рассматриваемые здесь проблемы и задачи, в основном, те же, что и в теории непрерывных линейных СУ (устойчивость, стабилизация, качество, анализ, синтез, расчет корректирующих устройств и др.). Методы их решения, а также основные понятия и терминология, также аналогичны, но есть и специфика, связанная с применением дискретного математического аппарата. Кроме того, здесь возникают и дополнительные задачи, связанные с получением *расчетных дискретных математических моделей* ДСУ, в состав которых всегда входят как УДД, так и традиционные устройства непрерывного действия.

Точная дискретизация исходных дискретно-непрерывных математических моделей дискретных систем управления в общем случае невозможна. Однако во многих практически важных и типовых случаях это можно сделать относительно просто с помощью *структурного метода*, основанного на использовании *эквивалентных схем замещения* для УДД и последующих преобразованиях полученных структурных схем ДСУ к специальному расчетному виду.

### 1.1. Эквивалентные схемы замещения для УДД

Из-за наличия в составе ДСУ устройств как непрерывного, так и дискретного действия, в них всегда присутствуют преобразования непрерывных сигналов в прерывистые

(в импульсные или цифровые). Они осуществляются специальными техническими устройствами – импульсными элементами (ИЭ) и аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). Часто их называют, соответственно, импульсными и кодоимпульсными *модуляторами*, понимая под модуляцией изменение информационных параметров импульсных или кодовых последовательностей в соответствии с *выборочными* (по времени) значениями непрерывного сигнала  $X(t)$  при  $t = t_k$ . Как при кодоимпульсной, так и при импульсной модуляции *всегда* происходит *дискретизация* непрерывного сигнала *по времени*, т.е. выборка его дискретных (решетчатых) значений.

При этом, если значения информационного параметра для кодовой или импульсной последовательности определяются только решетчатой функцией входного сигнала  $X(kT_0)=X[k]$ , то будет иметь место *модуляция первого рода*, а во всех других случаях – *модуляция второго рода* [6]. Более простой для математического описания и исследования является модуляция первого рода.

Импульсный элемент ИЭ является *импульсным модулятором*. В зависимости от вида *информационного параметра*  $\alpha$  для импульсной последовательности на выходе ИЭ (амплитуда импульса, ширина, частота следования, фаза) различают следующие виды импульсной модуляции: амплитудная (АИМ), широтная (ШИМ), частотная (ЧИМ), фазовая (ФИМ). Соответственно этому меняются и названия типов ИЭ и импульсных систем. При этом форма импульсов может быть различной и математически описывается функцией  $S(t)$  на интервале времени  $[0, T_0]$ . Вид импульсных сигналов для АИМ, ШИМ и ФИМ с прямоугольной формой импульсов и модуляцией первого рода при линейном сигнале на входе ИЭ показан на рис. 1.1.

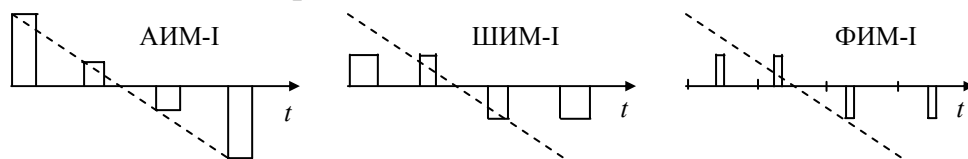


Рис. 1.1. Виды импульсной модуляции I-го рода

Зависимость значений информационного параметра  $\alpha$  от выборочных значений  $X(t_k)$  входного сигнала называется *модуляционной* (статической) характеристикой ИЭ, график которой в общем случае нелинейный. Важно заметить, что из всех видов модуляции *только* АИМ при линейной статической характеристике ИЭ является линейным преобразованием сигнала. Во всех остальных случаях свойство линейности и принцип суперпозиции не выполняются, что значительно усложняет описание и исследование таких импульсных СУ.

Преобразование непрерывного сигнала  $X(t)$  в последовательность цифровых двоичных кодов (кодовых импульсов) осуществляется аналого-цифровым преобразователем (АЦП), который является кодоимпульсным модулятором (КИМ). Формальное отличие КИМ от АИМ с прямоугольной формой импульсов при  $\gamma = 1$  состоит лишь в том, что информационный параметр  $\alpha$  (величина  $N$  цифрового кода) может принимать только целочисленные значения, соответствующие равноотстоящим на  $\delta_x$  уровням входного сигнала. Поэтому, при формировании кодовой последовательности из непрерывного сигнала  $X(t)$ , кроме дискретизации его по времени *всегда* происходит еще и дискретизация (квантование, округление) по уровню. Эта особенность цифровых сигналов часто используются как характерный признак при делении ДСУ на цифровые (ЦСУ) и импульсные системы управления (ИСУ) [1, 3]. Модуляционная (статическая) характеристика АЦП является существенно нелинейной и имеет вид многоступенчатой релейной характеристики, показанной на рис. 1.2, а.

При этом если  $n$  - число двоичных разрядов АЦП, а  $X_m$  - диапазон изменения входного сигнала, то "цена" единицы младшего разряда двоичного кода (шаг квантования сигнала по уровню) равна  $\delta_x = \frac{X_m}{2^n - 1}$ .

При большом числе разрядов  $n$  величина  $\delta_x \ll X_m$  и влиянием такой нелинейности (по крайней мере, на первых этапах исследования) можно пренебречь. Тогда модуляционная характеристика АЦП заменяется линейной (линеаризуется по методу секущих) с коэффициентом наклона  $K_1 = \delta_x^{-1}$ . В этом случае исчезает всякое формальное отличие КИМ от АИМ, а значит и формальное различие (с точки зрения вида математического описания и методов анализа) цифровых и амплитудно-импульсных ДСУ.

При получении расчетных схем и моделей ДСУ структурным методом для всех УДД (ИЭ, АЦП, ЦАП, ЦВУ) необходимы их эквивалентные схемы замещения, учитывающие основные этапы и особенности преобразования сигналов этими устройствами.

Эквивалентная схема замещения для ИЭ, выполняющего импульсную модуляцию *первого рода*, изображена на рис. 1.3, а. Она имеет вид последовательного соединения абстрактного ключа, преобразующего непрерывный сигнал  $X(t)$  в дискретный  $X[k]$ , безынерционного звена БНЗ с характеристикой  $\alpha = \varphi(X)$  и формирователя импульсов ФИ с формой импульса  $S(t)$ .

Для АИМ-I с линейной статической характеристикой, с целью упрощения последующего анализа, коэффициент ее наклона  $K_n$  можно отнести к другим элементам системы, последовательно включенным с ИЭ. Поскольку суть АИМ состоит в умножении  $S(t)$  на значение амплитуды очередного импульса  $A = \alpha$ , то максимальное значение  $S(t)$  при АИМ равно единице. Так, например, для АИМ-I с прямоугольной формой импульсов длительностью  $\tau = \gamma T_0$ ,  $S(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T_0)$  имеет вид, показанный на рис. 1.2, б. Если при этом коэффициент  $\gamma = 1$ , то формирователь ФИ представляет собой *фиксатор*  $\Phi_0$ , называемый также *экстраполятором нулевого порядка* [8]. ИЭ в этом случае часто называют *устройством выборки-хранения* (УВХ), так как его выход (при  $K_n = 1$ ) будет иметь вид ступенчатой аппроксимации непрерывного входного сигнала  $X(t)$  с уровнями «ступенек», равными выборочным значениям сигнала  $X[k]$ . Структурное представление УВХ показано на рис. 1.3, б.

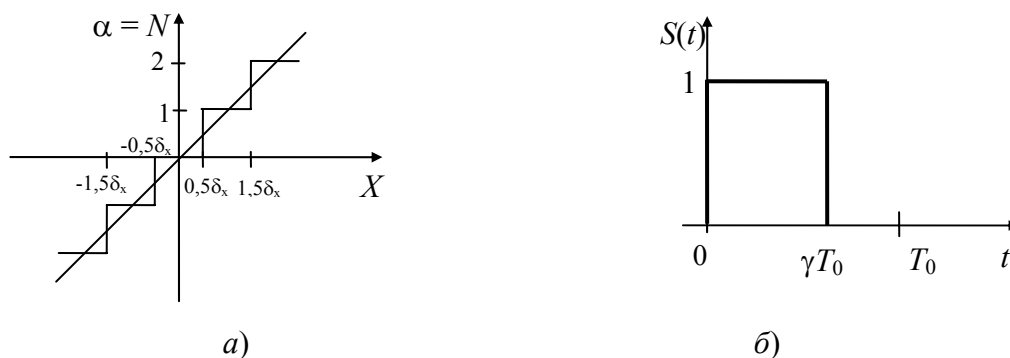


Рис. 1.2. Статическая характеристика АЦП, а) и форма импульса для АИМ-I, б)

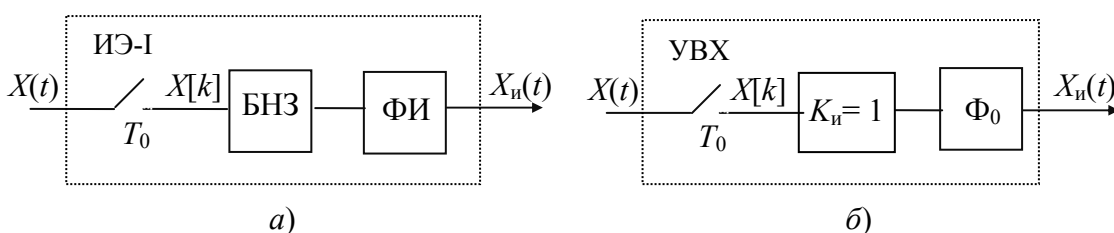


Рис. 1.3. Структурные представления для ИЭ-I и УВХ

Аналого-цифровые преобразователи в составе ЦСУ необходимы для согласования формы представления выходов непрерывных звеньев с входами цифровых вычислительных устройств. В процессе такого преобразования можно выделить следующие этапы:

- а) выборка дискретного по времени значения входного сигнала;
- б) двоичное кодирование (определение соответствующего значения цифрового кода за некоторое конечное время преобразования  $\tau_1$ );
- в) запоминание полученного значения кода в регистре данных АЦП.

Эквивалентная схема замещения, учитывающая эту последовательность действий для АЦП с периодическим запуском (величина периода  $T_0$ ), изображена на рис. 1.4. Она имеет вид последовательного соединения «ключа», безынерционного нелинейного звена (БНЗ) со статической характеристикой "многоступенчатое реле", фиксатора  $\Phi_0$  и звена запаздывания на время преобразования  $\tau_1$  в АЦП. При необходимости, это запаздывание (задержку) можно учесть в составе других звеньев, расположенных за АЦП в последовательной цепи прохождения сигнала. Если  $\tau_1 \ll T_0$ , то его не учитывают.

Периодический ключ с периодом  $T_0$  в этих схемах замещения – это абстрактный структурный элемент, который преобразует непрерывный сигнал  $X(t)$  в *дискретный сигнал*  $X[k]$ . Математической моделью получаемого дискретного сигнала является *решетчатая функция*. Прерывистый сигнал на выходе ИЭ и АЦП полностью определяется решетчатой функцией входного сигнала и не зависит от его значений в промежуточные моменты времени.

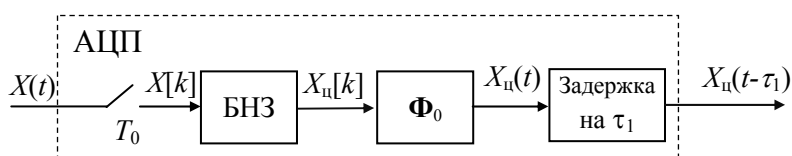


Рис. 1.4. Эквивалентная схема замещения для АЦП

Для согласования формы представления цифровых сигналов и входов непрерывных звеньев в составе ЦСУ применяются цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП). Процесс преобразования сигнала в ЦАП удобно разбить на три этапа:

- а) периодический прием с периодом  $T_0$  очередного кода  $N_k$  (выборка);
- б) сохранение на время  $T_0$  полученного цифрового кода  $N_k$  (фиксация);
- в) преобразование принятого цифрового двоичного кода  $N_k$  в соответствующий уровень аналогового сигнала (обычно в напряжение).

Статическая характеристика ЦАП в общем случае нелинейная. Часто ее считают линейной с коэффициентом наклона  $K_2 = \delta_y$ , где  $\delta_y$  – величина выходного сигнала ЦАП, соответствующая единице разряда двоичного кода ("цена" младшего разряда). Временем преобразования  $\tau_2$  в ЦАП, ввиду его относительной малости, обычно пренебрегают. С учетом этого, эквивалентная схема замещения ЦАП изображена на рис. 1.5, а. Она представляет собой последовательное соединение «ключа», фиксатора  $\Phi_0$  и безынерционного линейного звена с коэффициентом передачи  $K_2$ , который иногда учитывают в составе других, последовательно включенных с ЦАП, звеньев. Если предположение о малости времени преобразования  $\tau_2$  в ЦАП не выполняется, то эквивалентная схема дополняется звеном запаздывания, аналогично тому, как это было сделано для АЦП.

Цифровое вычислительное устройство (ЦВУ), работающее по циклической программе с периодом повторения во времени  $T_0$ , используется в ЦСУ для реализации алгоритмов управления. При этом на каждом периоде  $T_0$  оно выполняет следующие действия над цифровым сигналом:

- а) прием очередного цифрового кода от АЦП или от другого ЦВУ (выборка);
- б) преобразование принятого кода в соответствии с некоторым математическим правилом (оператором преобразования  $\mathcal{A}_k$ ) за время  $\tau_b$  и с некоторой погрешностью, обусловленной конечной длиной разрядной сетки ЦВУ;
- в) запоминание полученного результата до следующего его обновления.

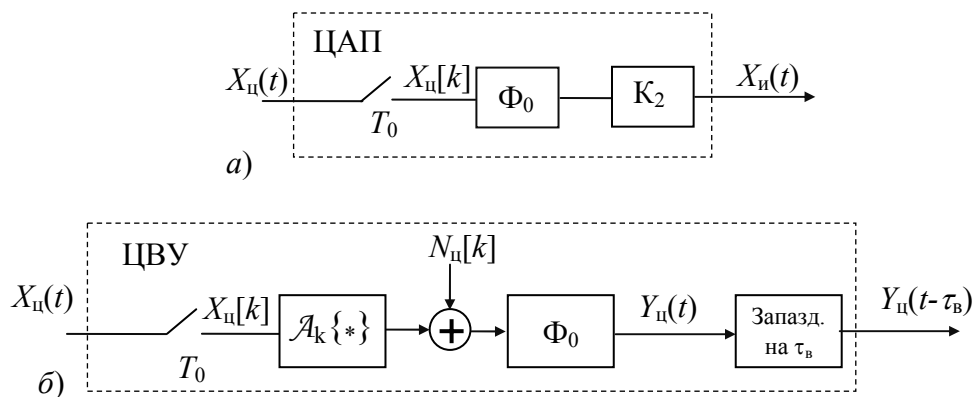


Рис. 1.5. Эквивалентные схемы замещения для ЦАП и ЦВУ

Эти этапы преобразования условно отображены в графическом виде на эквивалентной схеме замещения ЦВУ, представленной на рис. 1.5, б. Здесь погрешности округления учтены аддитивным дискретным шумом  $N_u[k]$ , а конечное время выполнения арифметических операций – звеном запаздывания на время  $\tau_b$ . Если  $\tau_b \ll T_0$ , то запаздывание не учитывают. При высокой разрядности ЦВУ, шумом округления  $N_u[k]$  также пренебрегают. В этих случаях эквивалентная схема замещения ЦВУ соответственно упрощается.

ЦВУ совместно с АЦП и ЦАП образуют *управляющее вычислительное устройство* (УВУ). Для работы его в *реальном масштабе времени* должно выполняться *обязательное* и очевидное условие:  $\tau_1 + \tau_b + \tau_2 \leq T_0$ . В противном случае УВУ не будет успевать вычислять очередное значение управляющего воздействия за период повторения программы  $T_0$ .

## 1.2. Расчетные математические модели и схемы ДСУ

Точная математическая модель ДСУ является дискретно-непрерывной и для использования теоретических методов исследования ее необходимо преобразовать к дискретному виду относительно решетчатых функций  $f_i[k]$  (функций дискретного аргумента).

В общем случае задача дискретизации математической модели смешанного типа точными методами не решается. Но для некоторых несложных типовых структур ДСУ точное решение этой задачи можно получить *структурным методом*, основанным на замене “нестандартных” элементов, какими являются УДД, их эквивалентными схемами замещения с последующими структурными преобразованиями. Простые типовые структуры ДСУ представлены на рис. 1.6:

- а) импульсная СУ с одним ИЭ; б) импульсная СУ с двумя ИЭ; в) цифровая СУ с АЦП в цепи ошибки; г) цифровая СУ с АЦП в обратной связи.

Основными этапами структурного метода при получении расчетных структурных схем ДСУ являются следующие:

1. *Замещение*. Все «нестандартные» устройства, т.е. устройства дискретного действия (УДД) в составе исходной структурной схемы заменяются своими эквивалентными схемами замещения. Формирователи импульсов ФИ, а также фиксаторы  $\Phi_0$  объединяются с расположенными следом за ними непрерывными частями НЧ с образованием *приведенных непрерывных частей* (ПНЧ) [3, 6].

2. *Дискретизация выхода.* Выходной сигнал системы рассматривается (*наблюдается*) только в дискретные моменты времени  $t_k = kT_0$ . Формально это соответствует размещению фиктивного (методического) ключа в цепи наблюдения на выходе непрерывной части и не влияет на вид процессов в системе. При необходимости получения информации о значениях выхода непрерывной части НЧ в промежуточные (смещенные) моменты времени  $t_k = kT_0 + \varepsilon T_0$ , в цепь наблюдения (перед ключом!) дополнительно размещается звено временного сдвига (упреждения!) на время  $\tau = \varepsilon T_0$ . При этом параметр смещения  $\varepsilon$  задается некоторым значением из интервала  $(0; 1)$ .

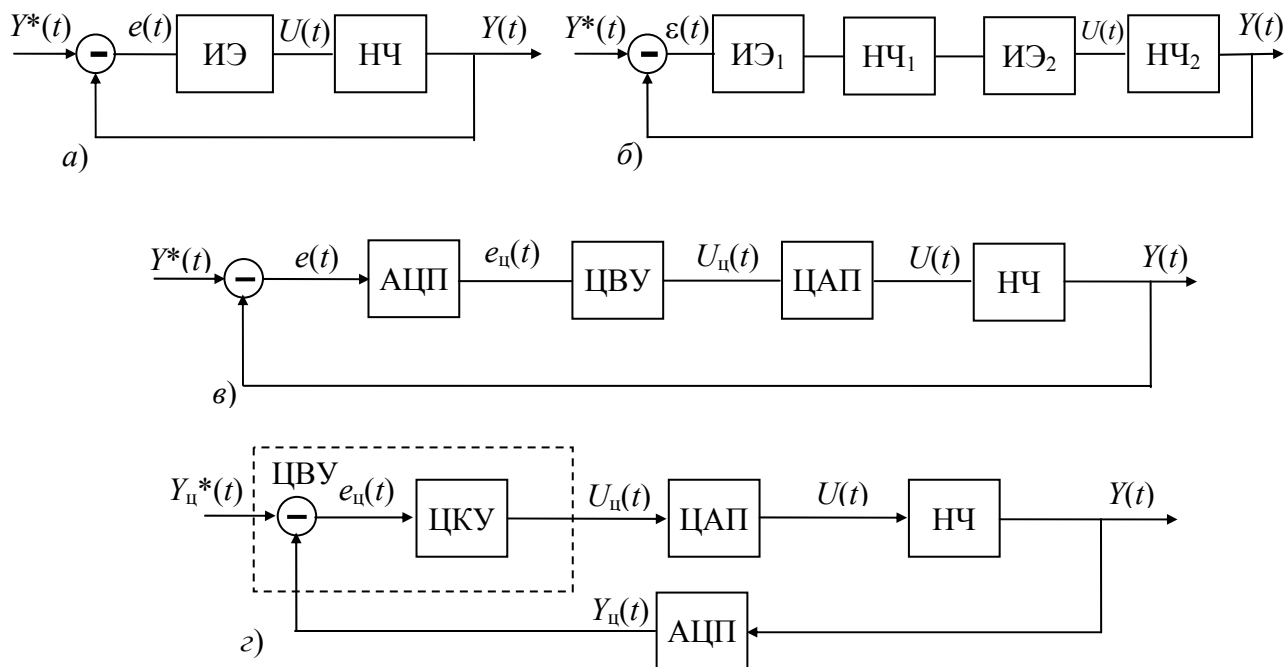


Рис. 1.6. Типовые структуры дискретных систем управления

3. *Структурные преобразования.* Выполняются *допустимые* преобразования полученной выше промежуточной структурной схемы (перенос ключа с выхода сумматора на его входы и наоборот; перенос ключа через безынерционное звено; изменение порядка следования линейных звеньев и др.). Кроме того, последовательно расположенные *фиксатор и ключ (на выходе фиксатора!)* не изменяют дискретного сигнала. Поэтому *такое* их соединение можно заменить тривиальным безынерционным звеном с коэффициентом передачи, равным единице.

4. *Определение дискретных звеньев.* Выявляются участки (фрагменты) структурной схемы, для которых как входы, так и выходы являются дискретными сигналами. Эти участки структурной схемы объявляются *дискретными звеньями*. Так, например, ПНЧ с ключом на выходе образуют *дискретное звено приведенной непрерывной части (ДЗ ПНЧ)*. Последовательно соединенные ПНЧ, звено упреждения на время  $\tau = \varepsilon T_0$  и ключ образуют дискретное звено *модифицированной приведенной части (ДЗ МПНЧ)*. При этом суть модификации состоит в размещении и учете дополнительного звена *упреждения в цепи наблюдения*.

Результатом выполнения указанных действий будет некоторое соединение *однаправленных дискретных звеньев*, каждое из которых выполняет преобразование одного дискретного сигнала в другой дискретный сигнал. Это соединение и будет представлять собой *искомую расчетную структурную схему ДСУ*.

В качестве примера использования структурного метода дискретизации для получения расчетной схемы, рассмотрим типовую структуру цифровой СУ с АЦП в цепи об-



ратной связи (рис. 1.6, з). Вид получаемых при этом промежуточных структурных схем после выполнения этапов 1, 2, 3, и 4 показан на рис. 1.7.

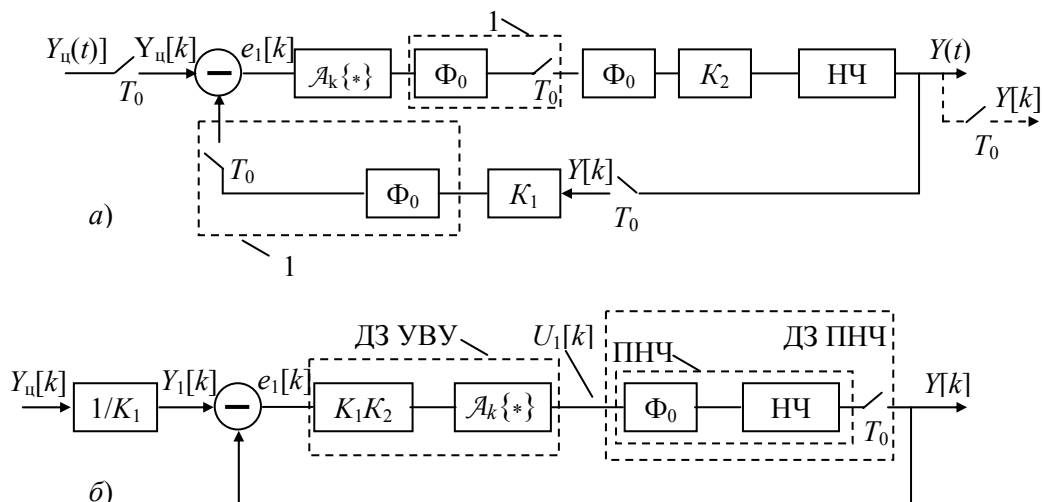


Рис. 1.7. Пример применения структурного метода дискретизации

Здесь обозначено: ПНЧ – приведенная непрерывная часть; ДЗ ПНЧ – дискретное звено приведенной непрерывной части; ДЗ УВУ – дискретное звено управляющего вычислительного устройства;  $K_1$  и  $K_2$  – коэффициенты передачи для АЦП и ЦАП в предположении линейности их статических характеристик. Оператор преобразования ЦВУ  $\mathcal{A}_k$  предполагается линейным, задержки на преобразования и вычисления, а также шумы округления не учитываются.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Расчетные структурные схемы дискретных систем управления всегда представляют собой некоторые соединения однонаправленных абстрактных дискретных звеньев (ДЗ). Каждое из них преобразует входной дискретный сигнал в выходной, тоже дискретный сигнал. Получение расчетных схем является начальным этапом теоретического исследования ДСУ. Для дальнейшего исследования свойств ДЗ и их соединений (систем) необходимо располагать соответствующими математическими описаниями (моделями). Аналогично непрерывным моделям, формы записи дискретных математических описаний могут быть различными, заданными как в произвольной, так и в стандартной (общепринятой, канонической) форме [3, 6]. Это могут быть, например, разностные уравнения «вход-выход», дискретные уравнения состояния, суммарные уравнения и т.п.

### 2.1. Операторы преобразования ДЗ. Виды и способы задания

Рассмотрим дискретное звено с входом  $f(kT_0) = f[k]$  и выходом  $y[k]$  (рис.2.1). Преобразование  $f[k]$  в  $y[k]$  осуществляется в соответствии с некоторым набором математических правил и операций – оператором преобразования  $\mathcal{A}_k$  звена, определенном на множестве функций дискретного аргумента. Символически это обычно записывают в следующем виде:  $y[k] = \mathcal{A}_k\{f[k]\}$ .

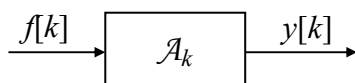


Рис. 2.1. Преобразование сигнала дискретным звеном

Аналогично непрерывным операторам, дискретные операторы преобразования  $A_k$  принято классифицировать, подразделяя их на следующие типы:

- Одномерные и многомерные.
- Линейные и нелинейные.
- Стационарные и нестационарные.
- Детерминированные и стохастические.
- Безынерционные и динамические.

Тип оператора преобразования определяет название и тип соответствующего дискретного звена (ДЗ), и его характерные свойства.

*Многомерные* дискретные звенья имеют несколько входов или выходов.

*Линейные* ДЗ преобразуют линейную комбинацию (взвешенную сумму) нескольких сигналов в линейную комбинацию точно таких же преобразований каждого из сигналов, т.е.  $y[k] = A_k \{ \sum c_i f_i[k] \} = \sum c_i A_k \{ f_i[k] \}$ . Если это свойство линейности не выполняется, то ДЗ и его оператор преобразования будут *нелинейными*.

*Стационарные* ДЗ во времени не меняют своих свойств, поэтому временной сдвиг входного сигнала (например, запаздывание) приводит к такому же временному сдвигу выходного сигнала:  $A_k \{ f[k-m] \} = y[k-m]$ . В противном случае вид реакции ДЗ будет зависеть не только от вида входного сигнала, но и от момента начала подачи его на вход звена. Такое звено будет нестационарным.

*Детерминированные* ДЗ преобразуют входной сигнал известного вида в выходной сигнал, значение которого можно предсказать точно в любой момент времени, если точно задан оператор преобразования звена. Для стохастических звеньев некоторые (хотя бы один!) параметры принимают случайные значения, и предсказание выхода ДЗ становится возможным лишь в вероятностном смысле.

*Безынерционные* (статические) ДЗ – это звенья "без памяти". Для таких дискретных звеньев значение выхода в текущий момент времени  $t_k$  получается функциональным преобразованием значения входного сигнала *в тот же самый* дискретный момент времени:  $y[k] = \varphi(f[k])$ . В качестве таких функциональных преобразований здесь могут использоваться любые композиции алгебраических, тригонометрических и других, в общем случае нелинейных математических операций. При этом значения входа (или выхода) в какие-то другие моменты времени в безынерционных преобразованиях не участвуют.

*Динамические* ДЗ отличаются от статических звеньев тем, что значения выхода  $y(t_k)$  в текущий момент времени  $t_k$  в общем случае зависят еще и от значений входа (и, возможно, выхода) в какие-то другие моменты времени.

Как безынерционные, так и динамические операторы преобразования ДЗ могут быть заданы *явно*, с помощью формул, так и *неявно*, в виде одного или нескольких функциональных уравнений. Самым простым (тривиальным) дискретным оператором преобразования безынерционного типа является *единичный* (тождественный) оператор  $A_k=I$ . Он не изменяет входного дискретного сигнала, т.е.  $y[k] = I \{ f[k] \} = f[k]$ .

Примерами простых дискретных линейных операторов динамического типа являются операторы *сдвигов*, *разностей* и *сумм*. Вид соответствующих им операций, символы (обозначения) и действие этих операторов приведены в табл. 2.1.

Среди них *элементарными* динамическими операторами являются операторы прямого ( $E$ ) и обратного ( $E_1$ ) сдвига. Они представляют собой взаимно обратные операторы ( $E_1=E^{-1}$ ). Их *последовательное* применение эквивалентно единичному оператору ( $E E_1=I$ ). Операторы разностей и суммирования, аналогичны операторам дифференцирования и интегрирования в непрерывном анализе и также являются взаимно обратными,

то есть  $\nabla^{-1}=\sigma_1$ ,  $\Delta^{-1}=\sigma$ . Кроме того, есть ряд других полезных *формальных* соотношений между приведенными выше линейными операторами. В частности, легко убедиться в том, что  $\Delta=E-I$ ;  $\nabla=I-E_1$ ;  $\nabla=E_1\Delta$ , а  $\sigma_1=E\sigma$ . Такие соотношения удобно использовать при эквивалентных преобразованиях сложных операторных выражений. При этом с символами линейных операторов можно формально обращаться как с обычными алгебраическими переменными (перемножать, выносить общим множителем за скобки, рассматривать относительно них операторные полиномы и др.).

Таблица 2.1

Простые линейные операторы динамического типа

№ п.п.	Название оператора	Символ	Действие оператора
1	Прямого сдвига	$E$	$E f[k] = f[k+1]$
2	Обратного сдвига	$E_1$	$E_1 f[k] = f[k-1]$
3	Прямой разности	$\Delta$	$\Delta f[k] = f[k+1] - f[k]$
4	Обратной разности	$\nabla$	$\nabla f[k] = f[k] - f[k-1]$
5	Неполного суммирования	$\sigma$	$\sigma f[k] = f[0] + f[1] + \dots + f[k-1]$
6	Полного суммирования	$\sigma_1$	$\sigma_1 f[k] = f[0] + f[1] + \dots + f[k]$

Сложные операторы динамического типа всегда можно выразить некоторым образом через более простые динамические и безынерционные операторы. Обычно для такой цели используются простейшие линейные операторы сдвига  $E$  и  $E_1$ . Соответственно этому можно изобразить детализированные (до уровня звеньев временного сдвига) *структурные схемы* для более сложных динамических операторов. Такие детализированные схемы иногда называют схемами моделирования или схемами реализации [1, 8].

Многократному применению одноптипных дискретных операторов на структурных схемах соответствует *последовательное* соединение соответствующих этим операторам дискретных ДЗ. Аналогично этому, сумме операторов соответствует *параллельное* соединение дискретных звеньев.

В качестве примера на рис.2.2 приведены детализированные (до уровня операторов сдвига) структурные схемы для операторов прямой (*a*) и обратной (*б*) разностей, а также для операторов полной (*б*) и неполной (*з*) суммы.

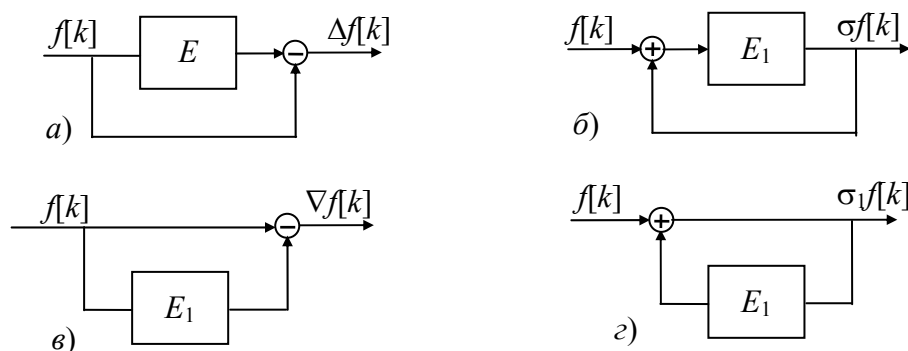


Рис. 2.2. Структурное представление операторов преобразования

Как отмечалось выше, важной особенностью линейных операторов является то, что с их символами можно формально оперировать как с обычными алгебраическими переменными при упрощениях операторных выражений. Так, например, для операций вторых разностей можно записать:

$$\Delta\{\Delta f[k]\} = \Delta^2 f[k] = (E-1)^2 f[k] = (E^2 - 2E + 1)f[k] = f[k+2] - 2f[k+1] + f[k];$$

$$\nabla\{\nabla f[k]\} = \nabla^2 f[k] = (1-E_1)^2 f[k] = (1 - 2E_1 + E_1^2)f[k] = f[k] - 2f[k-1] + f[k-2].$$

Оператор преобразования  $\mathcal{A}_k$  для ДЗ может быть задан *явно* (формулой, алгоритмом), либо *неявно* (одним или несколькими функциональными уравнениями). Если при этом искомая функция  $y[k]$  входит в уравнения под знаки операторов разностей или сдвигов, то подобные функциональные уравнения называются *разностными*.

Заметим, что вследствие указанной ранее простой алгебраической связи операторов разностей и сдвигов, уравнение в прямых ( $\Delta$ ) или в обратных ( $\nabla$ ) разностях всегда можно эквивалентно записать, используя операторы сдвига  $E$  или  $E_1$ . При этом за порядок разностного уравнения  $n$  принимается *старшая степень* операторов сдвига  $E$  или  $E_1$ .

Так, например, нелинейное разностное уравнение "вход-выход"  $n$ -го порядка для одномерного ДДЗ, первоначально записанное относительно прямых разностей различных порядков, всегда можно привести к одной из двух форм:

$$\Phi_1(y[k], \dots, y[k+n], f[k], \dots, f[k+m]) = 0; \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(y[k], \dots, y[k-n], f[k], \dots, f[k-m]) = 0. \quad (2.2)$$

Первая из этих форм более удобна для теоретического исследования, а вторая – для программирования и численного решения разностных уравнений. Такие формы записи разностных уравнений часто называют рекуррентными, т.к. разрешив уравнение (2.1) относительно  $y[k+n]$  (или (2.2) относительно  $y[k]$ ), получим рекуррентную формулу для расчета *последующих* значений искомой функции через *предыдущие* ее значения при  $k \geq 0$ . Возможны также и другие эквивалентные формы записи разностного уравнения "вход-выход" ДДЗ, которые будут *неявно* задавать тот же динамический оператор преобразования звена  $\mathcal{A}_k$ .

Для начала процесса рекуррентных вычислений всегда необходимо задавать *начальные условия*. Это будут  $n$  значений искомой функции выхода  $y[0], \dots, y[n-1]$  (или  $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ ), которым часто задают *нулевые* значения. Физический смысл нулевых начальных условий состоит в том, что ДДЗ до подачи внешнего воздействия находилось в состоянии покоя.

Оператор преобразования ДДЗ может быть также задан неявно с помощью *уравнений состояния*, каноническая форма записи которых имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{F}_1(\mathbf{x}[k], f[k]); \\ y[k] &= \mathbf{F}_2(\mathbf{x}[k], f[k]), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{x}[k]$  – это  $n$ -мерный вектор вспомогательных (математических) переменных – координат состояния  $\{x_i\}$ , которые часто назначают как выходы *звеньев задержки* на  $T_0$  (выходы элементарных дискретных звеньев с оператором преобразования  $E_1$ ) в детализированной структурной схеме ДДЗ (рис.2.3). Начальными условиями в этом случае будут значения выходов звеньев задержки при  $k=0$ .

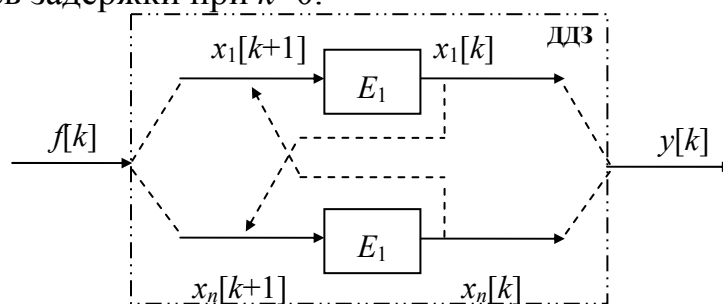


Рис. 2.3. Детализированное структурное представление ДДЗ

## 2.2. Линейные ДДЗ. Математические модели, свойства и временные характеристики

Для операторов преобразования линейных дискретных звеньев (ЛДДЗ) выполняется свойство линейности, и это существенно упрощает как формы их представления (записи), так и методы исследования.

Разностное уравнение "вход-выход" ЛДДЗ (2.1) принято записывать в стандартной форме (с правой частью):

$$a_0 y[k] + \dots + a_n y[k+n] = b_0 f[k] + \dots + b_m f[k+m]. \quad (2.4)$$

Операторная форма записи этого уравнения имеет следующий вид

$$A(E)y[k] = B(E)f[k], \quad (2.5)$$

где  $A(E)$  и  $B(E)$  – полиномы относительно оператора сдвига  $E$  (*операторные полиномы*) с коэффициентами  $a_i$  и  $b_i$  соответственно.

Аналогично можно записать в операторной форме разностные уравнения "вход-выход" относительно операторов обратного сдвига ( $E_1$ ), прямой разности ( $\Delta$ ) и обратной разности ( $\nabla$ ):

$$a) A_1(E_1)y[k] = B_1(E_1)f[k]; \quad б) A_2(\Delta)y[k] = B_2(\Delta)f[k]; \quad в) A_3(\nabla)y[k] = B_3(\nabla)f[k].$$

Переход от формы записи уравнений (2.5) к другой можно выполнить формально, используя алгебраические связи между операторами  $E$ ,  $E_1$ ,  $\Delta$ , и  $\nabla$ :

$$E_1 = E^{-1}; \quad \Delta = E - I; \quad \nabla = I - E_1; \quad \nabla = E_1 \Delta$$

Решение линейного разностного уравнения имеет следующий вид:

$$y[k] = y_1[k] + y_2[k], \quad (2.6)$$

где  $y_1[k]$  – общее решение *однородного* (без правой части) уравнения. Это свободная составляющая реакции ЛДДЗ;

$y_2[k]$  – некоторое частное решение уравнения с правой частью. Если оно ищется в форме вынуждающей функции  $f[k]$ , то это будет *вынужденная* составляющая реакции ЛДДЗ. В этом случае  $y_1[k]$  называют *переходной* составляющей выхода дискретного динамического звена.

Общее решение однородного уравнения имеет (в простых случаях, когда нет кратных корней) следующий вид:

$$y_1[k] = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k, \quad (2.7)$$

где  $C_i$  – произвольные постоянные, в конкретном случае зависящие от заданных начальных условий и от выбранного частного решения;  $z_i$  – *характеристические корни*, то есть корни характеристического полинома

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

Линейное дискретное динамическое звено называется *асимптотически устойчивым*, если переходная составляющая его выхода затухает, т.е.  $y_1[k] \rightarrow 0$ . При этом полная реакция  $y[k]$  стремится к вынужденной составляющей  $y_2[k]$ .

Как следует из (2.7), условие затухания свободной (переходной) составляющей  $y_1[k]$  зависит только от характеристических корней  $z_i$ . Для устойчивости ЛДДЗ необходимо и достаточно, чтобы для *каждого* из характеристических корней  $z_i$  выполнялось условие

$|z_i| = \text{mod}(z_i) < 1$ . На комплексной плоскости это означает, что для устойчивого ЛДДЗ все характеристические корни расположены *внутри* единичного круга. Только тогда каждая из парциальных составляющих свободной реакции вида  $C_i z_i^k$  будет стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . В противном случае переходная составляющая реакции ЛДДЗ не затухает со временем и звено будет или неустойчивым, или находится на границе устойчивости.

Заметим, что если все коэффициенты  $a_i$  характеристического полинома  $A(z)$ , *кроме коэффициента при старшей степени*, равны нулю, то характеристическое уравнение имеет вырожденный вид:  $a_n z^n = 0$ . При этом все из  $n$  характеристических корней будут одинаковы и равны нулю ( $z_1 = 0$  – корень  $n$ -ой кратности), а свободная (переходная) составляющая выхода отсутствует. В этом случае полная реакция звена будет представлена только своей вынужденной составляющей, ординаты которой представляют собой линейную комбинацию ординат вынуждающей функции  $f[k]$ , т.е.

$$y[k+n] = (b_0 f[k] + \dots + b_m f[k+m]) / a_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

В этом случае принято считать, что ЛДДЗ имеет *бесконечную степень устойчивости*, а процесс в звене имеет конечную длительность [7].

Второй распространенной формой неявного задания оператора преобразования  $\mathcal{A}_k$  являются дискретные уравнения состояния, которые для линейного стационарного ДДЗ обычно записывают в *канонической* форме

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}f[k], \\ y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}f[k], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – матричные коэффициенты соответствующих размеров.

Аналитическое решение уравнений (2.9) дается следующей формулой [6]:

$$y[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-m-1} \mathbf{B}f[m] + \mathbf{D}f[k]. \quad (2.10)$$

Здесь первое слагаемое описывает собственное (свободное) движение ЛДДЗ при *ненулевых* начальных условиях, а второе слагаемое – это частное решение уравнений (2.9), соответствующее *нулевым начальным условиям*. А так как устойчивость ЛДДЗ определяется собственным движением, то это свойство будет зависеть только от матрицы  $\mathbf{A}$  и ее элементов.

Условие устойчивости для матрицы  $\mathbf{A}$  *простой структуры* легко получить, представив ее в эквивалентном виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{L}\mathbf{S}^{-1},$$

где  $\mathbf{L} = \text{diag}\{z_i\}$  – диагональная матрица *собственных значений* для  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{S}$  – матрица, столбцами которой являются *собственные векторы* для  $\mathbf{A}$ .

Тогда степени матрицы  $\mathbf{A}^k = \mathbf{S} \cdot \text{diag}\{z_i^k\} \mathbf{S}^{-1}$  в (2.10) при  $k \rightarrow \infty$  будут асимптотически стремиться к нулевой матрице, а собственная составляющая реакции звена будет затухать лишь только в том случае, когда для каждого из собственных значений  $z_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  выполняется условие  $\text{mod}(z_i) = |z_i| < 1$ .

Напомним, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  – это корни уравнения

$$A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица;  $\det(\cdot)$  – определитель матрицы;  $A(z)$  – полином  $n$ -ой степени относительно комплексной переменной  $z$ .

Таким образом, для устойчивости ЛДДЗ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  (корни характеристического полинома  $A(z)$ ), были по модулю *меньше единицы*, т.е. принадлежали единичному кругу комплексной  $z$ -плоскости с центром в начале координат.

Непосредственная проверка этого условия для полиномов порядка выше второго затруднена. В то же время применение обычных алгебраических критериев устойчивости (Рауса–Гурвица, Ляпунова–Шипара и других), известных из теории линейных непрерывных систем [7], невозможно, т.к. условие устойчивости для каждого из корней  $z_i$  полинома  $A(z)$  имеет существенно *другой вид*, чем для непрерывных систем.

Известно обобщение алгебраического критерия устойчивости на дискретный случай – критерий Шура–Кона, который имеет две формы: табличную (дискретный аналог критерия Рауса) и аналитическую (дискретный аналог критерия Гурвица). В аналитической форме критерий устойчивости требует составления специальных определителей разных порядков из коэффициентов  $a_i$  и чередования их знаков. Более подробно об этом будет сказано в *четвертой* главе. Получаемые при этом условия для коэффициентов полинома  $a_i$  имеют значительно более сложный, чем для непрерывных систем, вид. Так, например, для характеристического полинома второго порядка  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$  условия устойчивости, полученные с помощью критерия Шура–Кона, выглядят следующим образом:

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0; \quad a_2 - a_1 + a_0 > 0; \quad a_2 - a_0 > 0. \quad (2.12)$$

Для дискретных звеньев и систем, порядок которых выше второго, применение критерия Шура–Кона будет еще более сложным.

При невысоком порядке дискретного звена задачу исследования устойчивости можно существенно упростить, применяя дробно-линейные подстановки вида

$$z = \frac{1 + 0,5T_0u}{1 - 0,5T_0u} = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (2.13)$$

в характеристическое уравнение  $A(z) = 0$ . При этом будет получено *преобразованное* характеристическое уравнение, левая часть которого будет по-прежнему иметь вид полинома с вещественными коэффициентами относительно переменных  $u$  или  $w$ . Замечательной особенностью таких *дробно-линейных* (билинейных) преобразований, иногда называемых преобразованиями Мёбиуса, является то, что они (при  $T_0 > 0$ ) отображают внутреннюю часть единичного круга комплексной  $z$ -плоскости на *левую* полуплоскость комплексных переменных " $u$ " или " $w$ ". Убедимся в справедливости этого свойства, записав выражение для модуля комплексной переменной  $z$ , полагая  $w = \operatorname{Re} w + j \operatorname{Im} w$ :

$$|z| = \sqrt{\frac{(1 + \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2}{(1 - \operatorname{Re} w)^2 + (-\operatorname{Im} w)^2}}.$$

Отсюда следует, что  $|z| < 1$  (точка  $z$  принадлежит единичному кругу) только в том случае, когда числитель подкоренного выражения меньше знаменателя. А это возможно тогда, когда  $\operatorname{Re} w < 0$  (точка  $w$  расположена в левой полуплоскости).

Аналогичное свойство будет выполняться и по отношению к переменной  $u$ , так как  $w = uT_0/2$ , а  $T_0 > 0$ . Но так как левая часть *преобразованного* с помощью (2.13) *характеристического уравнения* сохраняет вид полинома, то вопрос о расположении его корней относительно мнимой оси решается с помощью *обычных*, известных из линейной непрерывной теории алгебраических критериев устойчивости или по критерию Михайлова.

Пример 2.1. Исследовать устойчивость ЛДДЗ второго порядка, если характеристическое уравнение имеет вид

$$A(z) = 2z^2 - z + 1 = 0$$

*Решение.* Легко проверить, что условия устойчивости (2.12) выполняются и, следовательно, ЛДДЗ устойчиво. Получим тот же результат, преобразовав с помощью (2.13) это характеристическое уравнение относительно  $w$  переменной:

$$A_1(w) = 3w^2 + 2w + 2 = 0.$$

Известно, что для полиномов с вещественными коэффициентами *не выше второго* порядка положительность коэффициентов является и необходимым, и достаточным условием "левого" расположения корней. В данном примере это условие выполняется и, следовательно, ЛДДЗ устойчиво. Во всех других случаях требуется проверка выполнения некоторых дополнительных условий типа неравенств относительно коэффициентов полинома.

*Важнейшей особенностью* линейных динамических звеньев является то, что их свойства полностью проявляются в *реакциях* на простейшие входные воздействия. Такие реакции ЛДДЗ (*при нулевых начальных условиях!*) принято называть *временными характеристиками*. С их помощью можно судить как о *собственных* динамических свойствах звена в переходных режимах, так и о преобразовательных свойствах звена. Так, например, можно определить реакцию ЛДДЗ на произвольное воздействие  $f[k]$ , поступающее на его вход при  $k \geq 0$ .

В качестве простейших входных воздействий используются такие функции дискретного аргумента, как а) решетчатая функция одиночного импульса  $\delta_0[k]$  и б) решетчатая единичная ступенчатая функция  $1[k]$ . Они формально определяются следующим образом:

$$\delta_0[k] = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}; \quad 1[k] = \begin{cases} 1, k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}. \quad (2.13)$$

Эти функции связаны между собой следующими очевидными соотношениями:

$$\delta_0[k] = \nabla 1[k]; \quad 1[k] = \sigma_1 \delta_0[k]. \quad (2.14)$$

Реакция ЛДДЗ, *находящегося в покое*, на  $f[k] = \delta_0[k]$  называется его *весовой функцией*, а реакция на  $f[k] = 1[k]$  – *переходной функцией* ЛДДЗ, т.е.

$$w[k] = \mathcal{A}_k \{ \delta_0[k] \} \quad \text{и} \quad h[k] = \mathcal{A}_k \{ 1[k] \}. \quad (2.15)$$

Взаимосвязь временных характеристик  $w[k]$  и  $h[k]$  будет такой же, как и для функций  $\delta_0[k]$  и  $1[k]$ , т.е.

$$w[k] = \nabla h[k]; \quad h[k] = \sigma_1 w[k]. \quad (2.16)$$

Из физического смысла рассмотренных выше временных характеристик следует, что при  $k < 0$  они должны принимать нулевые значения, т.к. *до подачи* воздействий на вход ЛДДЗ, оно находилось в состоянии покоя. Формально это записывают так:  $w[k] \equiv 0$  и  $h[k] \equiv 0$  при  $k < 0$ . Эту особенность временных характеристик называют *условием физической реализуемости* ЛДДЗ. Оно является, по сути, проявлением принципа причинности объективного мира, в котором следствие не может опережать во времени причину своего возникновения.

Понимая «физический» смысл весовой функции, можно найти ее связь с матричными коэффициентами уравнений состояния ЛДДЗ. Для этого в (2.10) достаточно положить



$\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$  и  $f[k] = \delta_0[k]$ . Тогда, с учетом определения (2.13) для функции  $\delta_0[k]$  выражение для  $y[k] = w[k]$  примет следующий вид:

$$w[k] = \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta_0[k]. \quad (2.17)$$

Для устойчивого ЛДДЗ весовая функция при бесконечном возрастании  $k$  будет стремиться к нулю (затухает), а ЛДДЗ будет возвращаться в прежнее (невозмущенное) состояние. При этом, в соответствии с (2.16), переходная функция устойчивого звена будет приближаться с некоторому постоянному значению.

Зная весовую функцию, можно определить реакцию ЛДДЗ, находящегося в покое при  $k < 0$ , на произвольное внешнее воздействие  $f[k]$ . А это значит, что оператор преобразования линейного динамического звена всегда можно задать явно в виде некоторого аналитического выражения (формулы). Чтобы убедиться в этом, для  $f[k]$  при  $k \geq 0$  запишем следующее формальное равенство:

$$f[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0[k-m]f[m]. \quad (2.18)$$

Подставляя это выражение в формулу для выхода  $y[k] = \mathcal{A}_k\{f[k]\}$  для *стационарного* линейного дискретного звена, получим

$$\begin{aligned} y[k] = \mathcal{A}_k\{f[k]\} &= \mathcal{A}_k\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_0[k-m]f[m] \right\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_k \delta_0[k-m]f[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-m]f[m] = w[k] \otimes f[k]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Последняя часть (2.19) известна как *дискретная формула свертки* во временной области и представляет собой дискретный аналог интеграла свертки из непрерывного анализа. С учетом условия физической реализуемости для  $w[k]$  и того, что  $f[k] = 0$  при  $k < 0$ , формулу свертки можно записать в более привычном виде:

$$y[k] = \sum_{m=0}^k w[k-m]f[m] = w[k] \otimes f[k]. \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что оператор преобразования стационарного ЛДДЗ  $\mathcal{A}_k$  всегда можно задать явно в виде формулы свертки (2.20).

### 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Исследование собственных динамических и преобразовательных свойств ЛДДЗ, а также их соединений можно значительно упростить, если с помощью специальных *операционных преобразований* из временной области перейти в комплексную область. Получаемые при этом математические уравнения относительно *изображений* решетчатых функций получаются более простыми для решения и последующего анализа. На этом основаны большинство методов исследования и синтеза в классической теории линейных дискретных систем управления.

#### 3.1. Дискретные операционные преобразования. Виды и свойства

Анализ преобразований дискретных сигналов линейными дискретными звеньями существенно упрощается, если для этого использовать *дискретные операционные преобразования*, которые для решетчатой функции  $f[k]$  (оригиналу) ставят в соответствие

некоторую функцию комплексной переменной (изображение). Известно несколько таких преобразований, но все они тесно связаны между собой, т.к. получены из одного, базового, заменой переменных определенного вида. В качестве такого базового преобразования обычно используется *дискретное преобразование Лапласа* (ДПЛ,  $D_p$ -преобразование) [1, 6, 7]:

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] e^{-pkT_0}. \quad (3.1)$$

При довольно общих ограничениях на скорость роста ординат функции-оригинала  $f[k]$ , этот ряд сходится к аналитической функции  $F^*(p)$ , которая имеет вид дробно-рационального выражения относительно  $e^{pT_0}$  или  $e^{-pT_0}$ .

Формально, дискретные операционные преобразования можно применить и для *смещенных* решетчатых функций [6], получаемых из непрерывных функций при  $t = kT_0 + \varepsilon T_0$ . Здесь  $\varepsilon$  – параметр смещения, *назначаемый* из интервала  $(0; 1)$ . Получаемые при этом изображения  $F^*(p, \varepsilon)$  называют *модифицированными* преобразованиями, которые будут зависеть еще и от параметра смещения  $\varepsilon$ .

В качестве примера, найдем операционные изображения для некоторых простейших решетчатых функций-оригиналов:

$$a) f[k] = \delta_0[k]; \quad F^*(p) = 1 \cdot e^{-0pT_0} + 0 \cdot e^{-pT_0} + 0 \cdot e^{-2pT_0} + \dots = 1.$$

$$б) f[k] = 1[k];$$

$$F^*(p) = 1 \cdot e^{-0pT_0} + 1 \cdot e^{-pT_0} + 1 \cdot e^{-2pT_0} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-pT_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - 1}.$$

$$в) f[k] = e^{-\alpha kT_0};$$

$$F^*(p) = e^{-0\alpha T_0} e^{-0pT_0} + e^{-\alpha T_0} e^{-pT_0} + e^{-2\alpha T_0} e^{-2pT_0} + \dots + e^{-k\alpha T_0} e^{-kpT_0} + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-(p+\alpha)T_0}} = \frac{1}{1 - e^{-pT_0} e^{-\alpha T_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - e^{-\alpha T_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - d}, \quad d = e^{-\alpha T_0}.$$

$$г) f[k, \varepsilon] = e^{-\alpha(kT_0 + \varepsilon T_0)} = e^{-\alpha kT_0 - \alpha \varepsilon T_0} = e^{-\alpha kT_0} e^{-\alpha \varepsilon T_0} = e^{-\alpha kT_0} d^\varepsilon;$$

$$F^*(p, \varepsilon) = \frac{e^{pT_0} d^\varepsilon}{e^{pT_0} - d}.$$

В случаях б) и в) при нахождении суммы бесконечного ряда была использована формула для суммы геометрической прогрессии. Для большого набора часто встречающихся решетчатых функций  $f[k]$  такие изображения найдены, и они помещаются в специальные справочные таблицы. Обычно в них дополнительно приводятся также и изображения Лапласа  $F(p)$  для непрерывной огибающей (производящей функции)  $f(t)$ .

Так как функция  $f[k]$  получена из  $f(t)$  при  $t = kT_0$ , то между изображениями  $F^*(p)$  и  $F(p)$ , кроме табличной связи, существует и математическая связь вида

$$F^*(p) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(\xi) \frac{1}{1 - e^{-(p-\xi)T_0}} d\xi. \quad (3.2)$$

Здесь  $\Gamma$  – замкнутый контур интегрирования, охватывающий полюсы одного из сомножителей подынтегрального выражения [6, 7].

При этом, если контур  $\Gamma = \Gamma_1$  охватывает полюсы *первого* сомножителя, то из (3.2) следует формула, имеющая вид суммы *вычетов* в полюсах изображения Лапласа непрерывной огибающей:

$$F^*(p) = \sum_i \text{Res}_{s_i} \frac{F(s)}{1 - e^{-pT_0} e^{sT_0}}, \quad (3.3)$$

где  $\text{Res}_{s_i}(\cdot)$  – вычет выражения  $(\cdot)$  в полюсе  $s_i$  функции  $F(s)$ .

В том случае, если контур  $\Gamma = \Gamma_2$  охватывает полюсы *второго* сомножителя подынтегрального выражения в (3.2), то формула связи изображений дискретного и непрерывного сигналов принимает следующий вид:

$$F^*(p) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(p - jr\omega_0) + \frac{f(0)}{2}, \quad (3.4)$$

где  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  – частота дискретизации сигнала по времени.

Этой формулой связи изображений  $F^*(p)$  и  $F(p)$  обычно пользуются в предположении того, что  $f(0) = 0$  и в этом случае ее можно получить другим, более простым способом, не прибегая к формуле вычетов. Рассмотрим его более подробно, так как он дает лучшее понимание закономерностей взаимосвязи изображений Лапласа для дискретного и непрерывного сигналов [3].

Для этого формально запишем следующие очевидные равенства:

$$f(kT_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - kT_0)dt; \quad q^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0); \quad f^*(t) = f(t)q^*(t).$$

Здесь  $q^*(t)$  – *периодическая* (с периодом, равным  $T_0$ ) последовательность идеальных  $\delta$ -импульсов *единичной* интенсивности, а  $f^*(t)$  – модулированная (по интенсивности) последовательность таких же импульсов.

Если считать, что  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , то для  $D_p$ -изображения соответствующей решетчатой функции  $f[k]$  можно получить следующие эквивалентные выражения:

$$\begin{aligned} F^*(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)e^{-pkT_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt}\delta(t - kT_0)dt \right) = \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)dt = \int_0^{\infty} f(t)q^*(t)e^{-pt} dt = L\{f^*(t)\}. \end{aligned}$$

Другими словами,  $D_p$ -изображение  $F^*(p)$  формально совпадает с изображением интегрального преобразования Лапласа для функции  $f^*(t)$ .

Поскольку  $q^*(t)$  – периодическая функция времени, то ее можно представить рядом Фурье в комплексной форме:

$$q^*(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{jr\omega_0 t}; \quad C_r = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} q^*(t) e^{-jr\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Тогда, подставляя это выражение в предыдущую формулу и используя свойства преобразования Лапласа (линейность, изображение функции, умноженной на экспоненту), получим

$$F^*(p) = L \left\{ f(t) \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_0 t} \right\} = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(p - jr\omega_0) .$$

Ввиду симметричности пределов суммирования, в этой формуле вместо выражения  $F(p - jr\omega_0)$  можно записывать  $F(p + jr\omega_0)$ .

В зависимости от решаемой задачи, используется подходящий вариант формулы связи изображений  $F^*(p)$  и  $F(p)$ . В частности, вариант формулы (3.3) в виде суммы вычетов можно использовать наряду с табличным методом для нахождения  $D_p$ -изображения по известному изображению  $F(p)$ . Формулу (3.4) при  $p=j\omega$  удобно применять при изучении спектров дискретных сигналов и их связи со спектрами непрерывных сигналов. Эта формула, в частности, наглядно демонстрирует, что  $D_p$ -изображения являются периодическими функциями комплексной переменной  $p$  с периодом, равным  $j\omega_0$  в направлении мнимой оси.

Полезно напомнить, что вычет некоторой функции комплексной переменной  $\Phi(s)$  в полюсе  $s_i$  кратности  $m_i$  находится по следующей формуле [6]:

$$\text{Res}_{s_i, m_i} \Phi(s) = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{1}{(m_i - 1)!} \frac{d^{m_i - 1}}{ds^{m_i - 1}} \left( (s - s_i)^{m_i} \Phi(s) \right). \quad (3.5)$$

Громоздкость записи формул  $D_p$ -изображений, а также ряд других неудобств, связанных с их периодической зависимостью от переменной  $p$ , можно уменьшить или устранить путем замены переменных в формулах для  $F^*(p)$ . При этом получают новые дискретные операционные преобразования и соответствующие им изображения. Основные из них приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Другие типы дискретных операционных преобразований**

№ п.п.	Наименование преобразования	Подстановка
1	$D_q$ - преобразование	$pT_0 = q$
2	$D_z$ - или Z-преобразование	$e^{pT_0} = z$
3	$D_w$ - преобразование	$e^{pT_0} = \frac{1+w}{1-w}$
4	$D_u$ -преобразование	$e^{pT_0} = \frac{1+u\frac{T_0}{2}}{1-u\frac{T_0}{2}} = \frac{2+uT_0}{2-uT_0}$

Чаще других используют Z-преобразования в соответствии с формулами

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}; \quad F(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k, \varepsilon]z^{-k}. \quad (3.6)$$

Таблицы операционных изображений в разных источниках, в зависимости от вкусов авторов, обычно приводят для одного из них [1, 7]. Фрагмент одной из таких таблиц для  $Z$ -изображений, приводится ниже в табл. 3.2.

Все названные выше дискретные операционные преобразования имеют ряд полезных свойств, благодаря которым и становится целесообразным их использование, переводящее анализ свойств дискретных сигналов и дискретных звеньев (или их соединений, т.е. систем) из временной области в комплексную. Ниже, на примере  $Z$ -преобразования, приводится список основных свойств таких преобразований [1, 2, 6].

### 1. Свойство линейности

$$\sum_i C_i f_i[k] \Rightarrow \sum_i C_i F_i(z), \quad (3.7)$$

где  $F_i(z)$  – изображение для  $f_i[k]$ .

Таблица 3.2

**Операционные изображения некоторых функций**

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$	$f(kT_0), k \geq 0$	$F(z)$	$F(z, \varepsilon)$
-	-	$\delta_0[k]$	1	
1(t)	$\frac{1}{p}$	1[k]	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$kT_0$	$\frac{zT_0}{(z-1)^2}$	$\frac{zT_0}{(z-1)^2} + \frac{zT_0\varepsilon}{z-1}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha kT_0} = d^k$	$\frac{z}{z-d}$	$\frac{z}{z-d} d^\varepsilon; d = e^{-\alpha T_0}$
$K(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{K\alpha}{(p+\alpha)p}$	$K(1 - d^k)$	$\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-d}$	$\frac{Kz}{z-1} - \frac{Kzd^\varepsilon}{z-d}$

### 2. Изображения смещенных на $i$ тактов функций

$$E^i f[k] = f[k+i] \Rightarrow z^i F(z) + N_1(z); \quad (3.8)$$

$$E_1^i f[k] = f[k-i] \Rightarrow z^{-i} F(z) + N_2(z).$$

где  $N_1(z)$  – полином с коэффициентами, зависящими от  $f[0], \dots, f[i-1]$ ;  $N_2(z)$  – полином, коэффициенты которого зависят от  $f[-1], \dots, f[-i]$ .

### 3. Изображения разностей $i$ -го порядка

$$\Delta^i f[k] \Rightarrow (z-1)^i F(z) + M_1(z); \quad (3.9)$$

$$\nabla^i f[k] \Rightarrow (1-z^{-1})^i F(z) + M_2(z),$$

где  $M_1(z)$  – полином с коэффициентами, зависящими от  $f[0], \dots, f[i-1]$ ;  $M_2(z)$  – полином, коэффициенты которого зависят от  $f[-1], \dots, f[-i]$ .

### 4. Изображения сумм $i$ -го порядка

$$\begin{aligned}\sigma^i f[k] &= \Delta^{-i} f[k] \Rightarrow (z-1)^{-i} F(z) \\ \sigma_1^i f[k] &= \nabla^{-i} f[k] \Rightarrow (1-z^{-1})^{-i} F(z)\end{aligned}\quad (3.10)$$

5. Изображение свертки двух решетчатых функций

$$f_1[k] \otimes f_2[k] = \sum_{k=0}^k f_1[k-m] f_2[k] \Rightarrow F_1(z) F_2(z). \quad (3.11)$$

6. Начальное значение решетчатой функции

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} (1-z^{-1})F(z). \quad (3.12)$$

7. Установившееся значение решетчатой функции (если оно *существует*)

$$f[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z). \quad (3.13)$$

8. Формула обратного Z-преобразования

$$f[k] = \sum_i \text{Res}_{z_i} (F(z) z^{k-1}), \quad (3.14)$$

где  $z_i$  – полюсы изображения  $F(z)$ .

Выражение (3.14) позволяет найти *формулу* для функции-оригинала  $f[k]$  по известному изображению  $F(z)$ . Часто в этом нет необходимости, т.к. для построения графика  $f[k]$  достаточно знать лишь конечное число ее начальных ординат. Найти их можно численным методом, раскладывая  $F(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ . Тогда, согласно формуле (3.6)  $F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + f[2]z^{-2} + \dots$ , а коэффициенты этого ряда и будут являться ординатами искомой функции-оригинала.

### 3.2. Передаточные функции ЛДДЗ

Применим перечисленные выше свойства  $D$ -изображений для исследования преобразования дискретных сигналов линейным дискретным динамическим звеном (ЛДДЗ). В связи с этим рассмотрим три варианта исходных данных для решения поставленной задачи.

А. Пусть нам известна весовая функция ЛДДЗ  $w[k]$  и оно находится в состоянии покоя (*нулевые начальные условия!*) до начала действия на его вход внешнего сигнала  $f[k]$  при  $k=0$ . Тогда, в соответствии с (2.20), выход звена  $y[k]$  при  $k \geq 0$  определится по формуле свертки:  $y[k] = w[k] \otimes f[k]$ .

Аналогично  $Z$ -преобразованию, *свойство 5*, связанное с изображением для свертки двух решетчатых функций, оказывается справедливым для каждого из приведенных в табл. 3.1  $D$ -преобразований. Тогда  $D$ -изображение выхода ЛДДЗ будет равно *произведению*  $D$ -изображения весовой функции  $w[k]$  звена на  $D$ -изображение входного воздействия  $f[k]$ :

$$D\{y[k]\} = D\{w[k]\} \cdot D\{f[k]\} \quad (3.15)$$

Здесь  $D\{w[k]\}$  – функция комплексной переменной, устанавливающая простую *алгебраическую* связь  $D$ -изображений выхода и входа ЛДДЗ при нулевых начальных условиях. Она играет роль коэффициента передачи звена в комплексной области и называется его *передаточной функцией* [1, 6, 7].

В соответствии с (3.15), можно дать и другое, *эквивалентное* определение для передаточной функции ЛДДЗ, как отношение  $D$ -изображений выхода и входа при нулевых начальных условиях:

$$D\{w[k]\} = \frac{D\{y[k]\}}{D\{f[k]\}}. \quad (3.16)$$

Формуле (3.15) соответствует простейшая (*тривиальная*) структурная схема, представленная на рис. 3.1, которая в графическом виде отображает связь  $D$ -изображений выхода и входа ЛДДЗ.

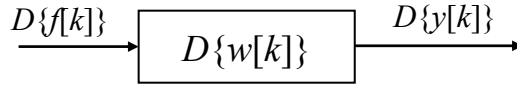


Рис. 3.1. Преобразование дискретного сигнала

В условиях конкретной решаемой задачи под  $D$ -изображением может пониматься как  $D_p$ -преобразование, так и другие дискретные операционные преобразования решетчатых функций, приведенные в табл. 3.1. Так, например, для  $Z$ -преобразования выражение (3.15) примет следующий вид

$$y(z) = W(z)f(z), \quad (3.17)$$

где  $W(z) = D_z\{w[k]\} = Z\{w[k]\}$  – передаточная функция линейного дискретного звена, которую можно определить еще и как отношение  $Z$ -изображений выхода и входа (*при нулевых начальных условиях!*).

Если конфигурация структурной схемы более сложная и представляет собой соединение одномерных ЛДДЗ с известными передаточными функциями, то ее можно эквивалентно (в смысле равенства передаточных функций) преобразовать к некоторому требуемому, например тривиальному, виду. При этом справедливы все *без исключения* правила структурных преобразований, известные в теории линейных непрерывных систем. Например, это формулы *эквивалентных* передаточных функций для всех *типовых* соединений ЛДДЗ (параллельное, последовательное, встречно-параллельное), правила переноса узлов и сумматоров через дискретные звенья и др.

**Б.** Рассмотрим другой случай, когда оператор преобразования  $\mathcal{A}_k$  ЛДДЗ задан неявно с помощью уравнения "вход-выход" (2.4), которое запишем для удобства в операторной форме

$$A(E)y[k] = B(E)f[k], \quad (3.18)$$

где  $A(E)$  и  $B(E)$  – полиномы относительно оператора прямого сдвига  $E$  (операторные полиномы) с коэффициентами  $a_i$  и  $b_i$  соответственно.

При этом по-прежнему будем считать начальные условия нулевыми, т.е. предполагаем, что звено находилось в покое до начала действия входного сигнала  $f[k]$  в начальный момент времени при  $k = 0$ . Тогда, применяя  $Z$ -преобразование к левой и правой частям уравнения "вход-выход" и учитывая свойства (3.7), (3.8), получим линейное алгебраическое уравнение относительно  $y(z)$ :

$$A(z)y(z) = B(z)f(z). \quad (3.19)$$

Отсюда можно определить изображение выхода  $y(z)$ :

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} f(z) = W(z)f(z). \quad (3.20)$$

Тогда передаточная функция ЛДДЗ  $W(z)$  будет равна отношению операторных полиномов правой и левой частей разностного уравнения при формальной замене в них оператора сдвига  $E$  на комплексную переменную  $z$ :

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (3.21)$$

Этот результат можно считать еще одним, но *эквивалентным* определением понятия передаточной функции ЛДДЗ. При этом, очевидно, что знаменатель передаточной функции звена  $W(z)$  является характеристическим полиномом, а ее полюсы  $z_i$  – это характеристические корни.

Аналогично поступают в том случае, когда уравнение «вход-выход» звена задано в форме оператора обратного сдвига, или в форме прямых или обратных разностей. При этом используются свойства  $Z$ -преобразования об изображении (при нулевых начальных условиях) прямых и обратных разностей различных порядков. Тогда в обозначениях формул (2.5) для полиномов правых и левых частей разностных уравнений «вход-выход», соответствующая им передаточная функция запишется следующим образом:

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z^{-1})}{A_1(z^{-1})} = \frac{B_2(z-1)}{A_2(z-1)} = \frac{B_3(1-z^{-1})}{A_3(1-z^{-1})}.$$

Таким образом, передаточная функция линейного дискретного звена будет равна отношению операторных полиномов в правой и левой части уравнения «вход-выход» при замене в них символов соответствующих операторов на следующие выражения:  $E \rightarrow z$ ;  $E_1 \rightarrow z^{-1}$ ;  $\Delta \rightarrow z-1$ ;  $\nabla \rightarrow 1-z^{-1}$ .

Из (3.19) – (3.21) следует также, что, зная полиномы числителя и знаменателя передаточной функции ЛДДЗ, несложно записать уравнение "вход-выход" звена в форме оператора сдвига  $E$ . Для этого нужно предварительно получить выражение (3.19), а затем перейти к (3.18).

Часто требуется записать разностное уравнение «вход-выход» в форме оператора обратного сдвига  $E_1$ . Это необходимо, например, для последующего программирования при микропроцессорной реализации дискретного корректирующего устройства. В этом случае выражение для  $W(z)$  нужно сначала записать в виде отношения полиномов по степеням  $z^{-1}$ , поделив для этого числитель и знаменатель на старшую степень переменной  $z$ , а затем поступить так же, как и в предыдущем случае, используя *свойство 2*. Если нужно записать уравнение "вход-выход" в обратных разностях, то далее можно воспользоваться формулой связи операторов обратного сдвига и обратной разности  $E_1 = I - \nabla$ .

**Пример 3.1.** Записать разностное уравнение "вход-выход" и формулу для вычисления очередного значения выхода при  $k \geq 0$ , если передаточная функция ЛДДЗ имеет следующий вид:

$$W(z) = \frac{2z+1}{z^2-2z+1} = \frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{y(z)}{f(z)}.$$

*Решение.* От передаточной функции  $W(z)$  перейдем к разностному уравнению:

$$(1-2z^{-1}+z^{-2})y(z) = (2z^{-1}+z^{-2})f(z) \Leftrightarrow (1-2E_1+E_1^2)y[k] = (2E_1+E_1^2)f[k].$$

Тогда формула вычисления  $y[k]$ , удобная для программирования, запишется так:

$$y[k] = 2y[k-1] - y[k-2] + 2f[k-1] + f[k-2], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Для начала вычислений по этой рекуррентной формуле необходимо задать значения  $y[-1]$ ,  $y[-2]$ ,  $f[k-1]$ ,  $f[k-2]$ , которые часто считают нулевыми.

Уравнение «вход-выход» в форме оператора обратной разности для этого примера запишется следующим образом:

$$\nabla^2 y[k] = 3 f[k] - 4 \nabla f[k] + \nabla^2 f[k].$$

В. Рассмотрим третий случай, когда оператор преобразования  $\mathcal{A}_k$  для ЛДДЗ задан *неявно* с помощью уравнений состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}f[k], \\ y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}f[k], \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – числовые матрицы соответствующих размеров.

Полагая, как и ранее, начальные условия нулевыми ( $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ ), перейдем к  $Z$ -преобразованиям в этих уравнениях:

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}f(z), \\ y(z) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}f(z). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Исключив из них  $\mathbf{x}(z)$ , найдем изображение выхода ЛДДЗ:

$$y(z) = \{\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\}f(z) = W(z)f(z),$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Отсюда следует выражение для передаточной функции  $W(z)$ :

$$W(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.24)$$

Из этой формулы видно, что корни уравнения  $\det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$ , т.е. *собственные значения* матрицы  $\mathbf{A}$ , являются *полюсами* передаточной функции ЛДДЗ.

Отметим, что передаточная функция  $W(z)$  в той же мере, что и весовая функция, характеризует: *а)* преобразовательные свойства ЛДДЗ; *б)* свойство его устойчивости, а также определяет *в)* условие его физической реализуемости. Ниже приводятся необходимые разъяснения по этим вопросам.

*а)* Если найти изображение выхода  $y(z)$  по формуле (3.20), то далее по формуле обратного  $Z$ -преобразования (см. *свойство 8*) можно определить оригинал искомой функции  $y[k]$ . При этом аналитическое выражение для решетчатой функции  $y[k]$  можно определить по формуле вычетов или табличным методом в комбинации со свойствами  $Z$ -преобразования. Кроме того, необходимые для построения графика значения функции выхода  $y[k]$  можно получить и как коэффициенты разложения  $y(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ , например методом деления полинома числителя на полином знаменателя (или каким-то другим способом).

Пример 3.2. Определение функции-оригинала по изображению.

$$f(z) = \frac{1}{z-d} = \frac{z}{z-d} z^{-1} \Leftarrow f[k] = E_1 d^k = d^{k-1}.$$

*Решение.* Здесь был использован табличный метод определения оригинала в сочетании со *свойством 2*  $Z$ -преобразования об изображении запаздывающей на такт решетчатой функции. Так как несмещенная функция-оригинал  $f_1[k] = d^k$ , найденная по таблице 3.2, равна нулю при  $k < 0$ , то запаздывающая искомая функция  $f[k] = E_1 f_1[k] = d^{k-1}$  должна рассматриваться при  $k \geq 1$ , принимая нулевые значения при  $k < 1$ .

*б)* Весовая функция ЛДДЗ является оригиналом передаточной функции и поэтому ее можно определить по формуле обратного  $Z$ -преобразования:

$$w[k] = \sum_i \operatorname{Res}_{z_i} (W(z)z^{k-1}) = \sum_i C_i z_i^k, \quad (3.25)$$

где  $z_i$  – полюсы дробно-рациональной передаточной функции  $W(z)$ . Отсюда следует, что вид и характер весовой функции, а значит и свойство ее затухания во времени определяется только корнями знаменателя (полюсами) передаточной функции  $z_i$ . Поэтому для устойчивого дискретного звена все корни  $z_i$  должны лежать внутри единичного круга, т.е. должны иметь модули меньше единицы ( $|z_i| < 1$ ).

в) Поскольку ординаты графика  $w[k]$  совпадают с коэффициентами разложения  $W(z)$  в ряд по степеням  $z^{-1}$ , то условие физической реализуемости (равенство нулю ординат  $w[k]$  при  $k < 0$ ) будет выполняться только в том случае, когда порядок полинома числителя в  $W(z)$  не выше порядка полинома знаменателя. Иначе в разложении в ряд будут ненулевые коэффициенты при *положительных* степенях переменной  $z$ . Физически это условие означает то, что выход реального звена (следствие) не может опережать во времени входной сигнал (причину).

### 3.3. Частотные спектры дискретных и непрерывных сигналов. Условия их информационной эквивалентности

Преобразование дискретных сигналов линейными дискретными звеньями удобно изучать, рассматривая не сами сигналы или их изображения, а соответствующие им *комплексные спектры*. Аналогично непрерывному случаю, комплексный спектр дискретного сигнала  $f[k]$  определяется как комплекснозначная функция вещественной переменной  $\omega$ , получаемая из  $f^*(p)$  заменой  $p = j\omega$ :

$$f^*(j\omega) = f^*(\omega) e^{j\varphi^*(\omega)}, \quad (3.26)$$

где  $f^*(\omega) = \operatorname{mod}(f^*(j\omega))$ ;  $\varphi^*(\omega) = \operatorname{arg}(f^*(j\omega))$ .

При этом зависимость  $f^*(\omega)$  называется *амплитудным*, а  $\varphi^*(\omega)$  – *фазовым* спектром дискретного сигнала. Если известно  $Z$ -изображение сигнала  $f(z)$ , то его комплексный спектр получается подстановкой  $z = e^{j\omega T_0}$ .

В тех случаях, когда дискретный сигнал  $f[k]$  получен дискретизацией по времени с шагом  $T_0$  непрерывного сигнала  $f(t)$ , то в соответствии с формулой (3.4) связь их комплексных спектров имеет следующий вид [6]:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - r\omega_0)). \quad (3.27)$$

Из этой формулы следует, что спектр дискретного сигнала с точностью до постоянного множителя  $1/T_0$  равен бесконечной сумме спектров непрерывного сигнала, *смещенных* по оси частот на величины, кратные частоте дискретизации  $\omega_0$ .

Характерной особенностью спектров дискретных сигналов является их периодическая зависимость от частоты  $\omega$  с периодом  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Это следует из свойства периодичности

выражения  $e^{j\omega T_0}$  и из формулы (3.27). При этом амплитудные спектры являются четными, а фазовые – нечетными функциями частоты  $\omega$ . Типичный их вид показан на рис. 3.2. С учетом этого, спектры дискретных сигналов можно рассматривать только на половине *главного периода*, т.е. при  $\omega \in [0, \frac{\omega_0}{2}]$ .

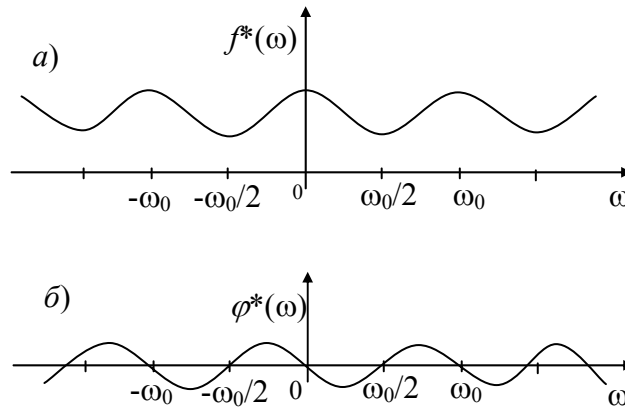


Рис. 3.2. Спектры дискретного сигнала

При изучении связи спектров дискретного и непрерывного сигналов существенное значение имеет соотношение граничной частоты спектра непрерывного сигнала  $\omega_s$  и частоты дискретизации  $\omega_0$ .

В том случае, когда выполняется следующее условие для этих частот

$$\omega_s \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0}, \quad (3.28)$$

то спектры соседних слагаемых в формуле (3.27) не перекрываются по частотным диапазонам и поэтому на главном периоде, где  $\omega \in \left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$ , будет выполняться *точное* равенство следующего вида

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} F(j\omega). \quad (3.29)$$

При этом дискретный и непрерывный сигналы будут эквивалентны в смысле содержащейся в них информации. Только в этом случае с помощью *идеального полосового фильтра нижних частот* (ИФ) из спектра дискретного сигнала  $f[k]$  можно, удалив (отфильтровав) все его высокочастотные составляющие, *точно* восстановить непрерывный сигнал  $f(t)$ . Поэтому неравенство (3.28) называют условием *информационной эквивалентности* Котельникова–Шеннона, которое играет важную роль в теории передачи сигналов и в теории информации. Картинки амплитудных спектров для трех отдельных слагаемых в этом случае показаны на рис. 3.3. Там же изображена амплитудно-частотная характеристика идеального фильтра  $M_{\text{ИФ}}(\omega)$ .

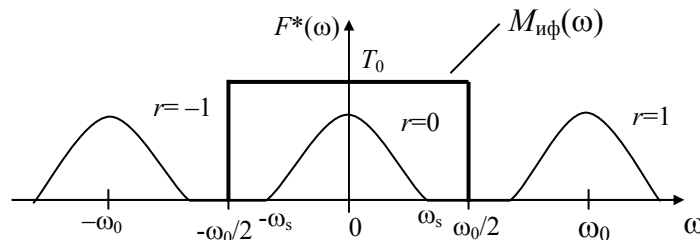


Рис. 3.3. Условие информационной эквивалентности

Из сказанного выше следует, что если  $T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_s}$ , то последовательное соединение ключа, выполняющего дискретизацию сигнала по времени, и идеального фильтра ниж-

них частот (ИФ), выполняющего функцию восстановления сигнала, эквивалентно безынерционному звену с коэффициентом передачи  $K_{и}=1$  (рис. 3.4).

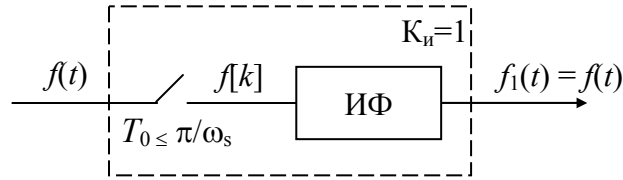


Рис. 3.4. Точное восстановление сигнала

Во всех других случаях, когда условие (3.28) не выполняется, спектры соседних слагаемых в (3.27) при  $r = 0, \pm 1, \pm 2$  и т.д. будут перекрываться по частотным диапазонам. В результате этого на главном периоде изменения частоты, где  $\omega \in \left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$ , равенство

(3.29) не выполняется. Тогда даже с помощью идеального фильтра ИФ *принципиально невозможно* точно восстановить непрерывный сигнал и  $f_1(t) \neq f(t)$ . Иначе, *невыполнение* условия Котельникова–Шеннона при дискретизации непрерывного сигнала по времени приводит к *невосполнимой* потере информации, которая будет тем существеннее, чем больше значение периода дискретности  $T_0$ . Картинки амплитудных спектров дискретного сигнала и отдельных его слагаемых в формуле (3.27) для этого случая показаны на рис. 3.5. Именно такая ситуация имеет место в действительности, так как граничная частота спектра  $\omega_s$  для непрерывного сигнала *теоретически* не ограничена, т.е. равна бесконечности. Практически  $\omega_s$  назначается как граница *полосы существенных частот*, содержащей основную, например, 95%-ную долю энергии сигнала  $f(t)$ .

Восстановить точно непрерывную производящую функцию  $f(t)$  из дискретного сигнала  $f[k]$  невозможно и по другой причине: идеальный фильтр нижних частот ИФ относится к физически нереализуемым звеньям, т.к. его весовая функция  $w_{и\Phi}(t) \neq 0$  при  $t < 0$ .

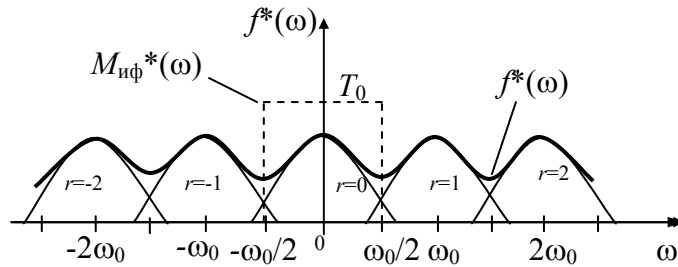


Рис. 3.5. Условие восстановления не выполнено

Чтобы убедиться в этом, запишем формулу частотной передаточной функции ИФ и определим соответствующую ей весовую функцию как обратное преобразование Фурье.

$$W_{и\Phi}(j\omega) = \begin{cases} T_0, & -\frac{\omega_0}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}; \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_0}{2}. \end{cases} \quad (3.30)$$

$$w_{и\Phi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{и\Phi}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} T_0(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{\omega_0 t}{2}}. \quad (3.31)$$

В этой формуле переменная  $t \in (-\infty, \infty)$ , поэтому идеальный полосовой фильтр с П-образной АЧХ и нулевой фазовой характеристикой физически не реализуем и является всего лишь теоретической абстракцией.

В реальных системах функции фильтра нижних частот по восстановлению непрерывного сигнала из дискретного сигнала приближенно выполняют формирователи импульсов (ФИ). Для АИМ – это линейные непрерывные звенья, передаточные функции которых совпадают с изображением Лапласа функции  $S(t)$ , описывающей форму импульса. В частности, таким формирователем может быть экстраполятор нулевого порядка – фиксатор  $\Phi_0$ . Покажем это, рассмотрев изображение Лапласа для последовательности амплитудно-модулированных импульсов  $Y_1(t)$  на выходе ФИ с формой импульса  $S(t)$ :

$$Y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)S(t - kT_0);$$

$$Y_1(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)S(p)e^{-pkT_0} = f^*(p)S(p);$$

Здесь  $f^*(p)$  – это  $D_p$ -изображение для дискретного сигнала  $f[k]$ , полученного из непрерывной огибающей  $f(t)$  в результате дискретизации по времени с шагом  $T_0$ . Отсюда следует, что передаточная функция формирователя импульсов (ФИ)  $W_{\text{фи}}(p) = S(p)$ . Если ФИ – это  $\Phi_0$ , то его передаточная функция определится следующей формулой:

$$W_{\Phi}(p) = L\{\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_0)\} = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p};$$

Чтобы оценить различие свойств фиксатора  $\Phi_0$  и идеального фильтра ИФ, исследуем амплитудные и фазовые частотные характеристики  $\Phi_0$ :

$$W(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_0}}{j\omega} = \frac{e^{j\omega \frac{T_0}{2}} e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} e^{-j\omega \frac{T_0}{2}}}{j\omega} =$$

$$= e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} \frac{e^{j\omega \frac{T_0}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_0}{2}}}{j\omega} = T_0 \frac{\sin \frac{\omega T_0}{2}}{\frac{\omega T_0}{2}} e^{-j\omega \frac{T_0}{2}} = M^*(\omega) e^{j\varphi^*(\omega)}, \quad (3.32)$$

где  $M^*(\omega) = T_0 \frac{\sin 0,5\omega T_0}{0,5\omega T_0}$  – амплитудно-частотная, а  $\varphi^*(\omega) = -0,5\omega T_0$  – фазовая частотная характеристика фиксатора  $\Phi_0$ . Легко заметить, что они отличаются от частотных характеристик идеального фильтра нижних частот. Причем фазовая частотная характеристика фиксатора *точно* такая же, как у звена *запаздывания* на время  $\tau = 0,5T_0$ . График АЧХ фиксатора  $\Phi_0$  изображен на рис. 3.6. Отрицательные полуволны этого графика можно заменить положительными (показаны точечными линиями), если в этих же частотных диапазонах значения фазовых сдвигов изменить (увеличить) на 180 градусов.

Как следует из рисунка, если граничная частота  $\omega_s$  для амплитудного спектра непрерывного сигнала  $F(\omega)$  не превосходит величины  $2/T_0$ , то в этой полосе частот различиями в амплитудно-частотных характеристиках идеального фильтра ИФ и фиксатора  $\Phi_0$  можно пренебречь, а учитывать только фазовую частотную характеристику фиксатора  $\varphi^*(\omega) = -\omega \frac{T_0}{2}$ .

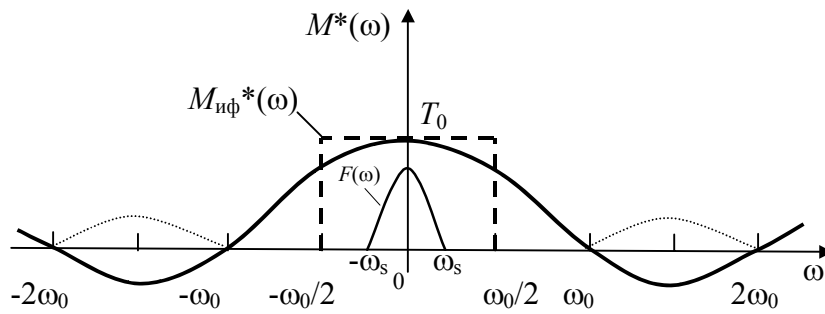


Рис. 3.6. Частотные свойства фиксатора  $\Phi_0$

Тогда действие последовательно включенных ключа и фиксатора  $\Phi_0$  («устройство выборки и хранения» – УВХ) относительно сигнала  $f(t)$  будет *приближенно* эквивалентно действию звена запаздывания на время  $\tau = 0.5T_0$  (рис.3.7).

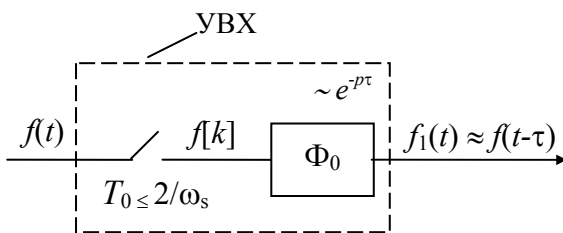


Рис. 3.7. Запаздывание сигнала в УВХ

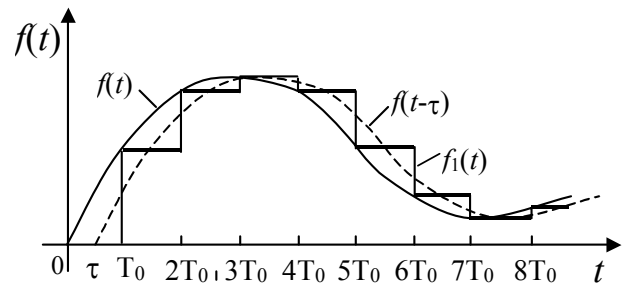


Рис. 3.8. Графики сигналов в УВХ

На рис.3.8 показаны графики этих сигналов для реального случая, когда шаг дискретизации по времени  $T_0 > 2/\omega_s$  и сигнал на выходе фиксатора (в составе УВХ) имеет вид ступенчатой аппроксимации входного сигнала  $f(t)$ .

Таким образом, при  $T_0 < 2/\omega_s$  УВХ можно заменить непрерывным линейным звеном *запаздывания* на время  $\tau = 0,5T_0$ . Этот результат является весьма важным и полезным при получении *приближенных непрерывных моделей* для цифровых и импульсных систем управления.

Аналогичное исследование можно выполнить для других формирователей, имеющих другую форму импульсов  $S(t)$ . При этом передаточная функция «эквивалентного» непрерывного звена для приближенной замены импульсного элемента и условия такой замены, естественно, будут другими.

### 3.4. «Эквивалентные» и «предельные» непрерывные системы для дискретных САУ. Метод аналогового прототипа

Приближенная замена устройства «выборки-хранения» (УВХ) *звеном запаздывания* на  $\tau=0,5T_0$  с передаточной функцией  $W_e(p)=e^{-p\tau}$  позволяет для некоторых дискретных систем *при выполнении определенных условий* рассматривать «эквивалентные» им (в смысле близости динамических свойств) непрерывные системы. Их можно получить из условия информационной эквивалентности Котельникова–Шеннона дискретных и непрерывных сигналов в контуре управления. При выполнении таких условий появляется возможность исследовать свойства ДСАУ методами непрерывной теории. *Простейшим* примером такой дискретной системы является импульсная САУ, содержащая в прямой цепи УВХ и линейную непрерывную часть с передаточной функцией  $W_0(p)$  и частотой среза  $\omega_c$ . Структурная схема такой импульсной САУ изображена на рис. 3.9.

Так как в этой ИСАР граница спектра сигнала на входе УВХ  $\omega_s \approx \omega_c$ , то при  $T_0 < 2/\omega_c$  УВХ можно *приблизительно* заменить звеном запаздывания на время  $\tau = T_0/2$ . В результате получается эквивалентная непрерывная система (рис. 3.10).

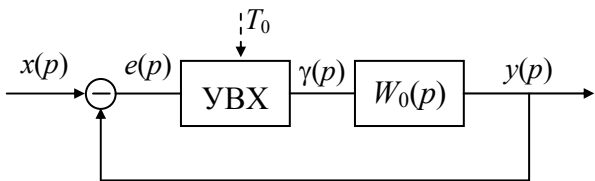


Рис. 3.9. Простейшая импульсная САР

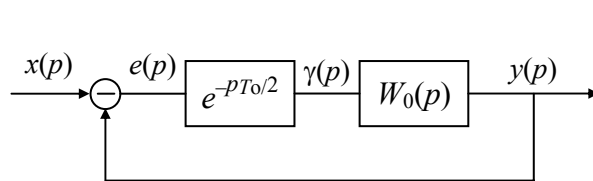


Рис. 3.10. Эквивалентная непрерывная система

Назовем «предельной» систему, получаемую из эквивалентной непрерывной системы при  $\tau=0$ . Различие динамических свойств этих двух систем определяется наличием звена запаздывания. При этом для обеих разомкнутых систем амплитудные частотные характеристики (АЧХ) будут одинаковыми, а фазовые частотные характеристики будут отличаться на ФЧХ звена запаздывания, которое на частоте  $\omega$  вносит фазовый сдвиг  $\Delta\varphi = -\omega T_0/2$ . Поэтому запас устойчивости эквивалентной непрерывной системы будет всегда *меньше* запаса устойчивости предельной системы на величину  $\Delta\varphi_3 = \omega_c \tau = \omega_c T_0/2$ .

Задавая предельную величину уменьшения запаса устойчивости  $\Delta\varphi_3$ , можно определить наибольшее допустимое значение периода дискретности:

$$T_0 \leq \frac{2\Delta\varphi_3}{\omega_c}. \quad (3.33)$$

Максимально допустимую величину  $\Delta\varphi_3$  удобно задавать в долях от значения запаса устойчивости по фазе *предельной* системы, например  $\Delta\varphi_3 = 0,1\varphi_3$ . При этом значение  $\varphi_3$  должно быть измерено в *радианах*.

«Эквивалентная» система представляет собой приближенную непрерывную модель исходной дискретной системы. С ее помощью без применения специального математического описания и методов дискретной теории, можно исследовать устойчивость, качество и вид процессов в простейшей импульсной системе.

В качестве второго, более сложного примера на эту тему рассмотрим микропроцессорную САР со структурной схемой, показанной на рис. 3.11.

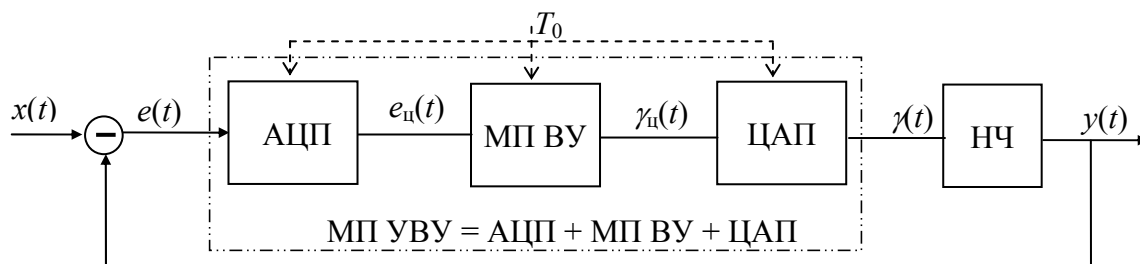


Рис. 3.11. Микропроцессорная САР

Предположим сначала, что оператор преобразования МП ВУ тривиальный (единичный), т.е.  $\mathcal{A}_k = I$ . Тогда *управляющее вычислительное устройство* МП УВУ, работающее по циклической программе с периодом  $T_0$ , эквивалентно по своему действию УВХ: АЦП выполняет выборку дискретных значений сигнала, а ЦАП – их запоминание (хранение) на  $T_0$ . Если непрерывная часть НЧ имеет передаточную функцию  $W_0(p)$  и частоту среза  $\omega_c$ , то при  $T_0 < 2/\omega_c$  для исследования такой МП СУ можно рассматривать «эквивалентную» непрерывную систему, изображенную на рис.3.10. Кроме того, выбором  $T_0$  в соответствии с (3.33), можно обеспечить запас *по фазе* для МП СУ близким к запасу

устойчивости «предельной» непрерывной системы и отличающимся от него *примерно* на величину  $\Delta\varphi_3$ . Предельная система в этом случае играет роль своеобразного эталона и ее принято называть «аналоговым прототипом» МП СУ.

Рассмотрим более сложный вариант МП СУ, когда оператор преобразования МП ВУ не тривиальный ( $A_k \neq I$ ), а задан с помощью передаточной функции  $W_{цкы}(z)$ . На основе структурного метода представим одну из промежуточных эквивалентных схем МП СУ в виде, изображенном на рис. 3.12.

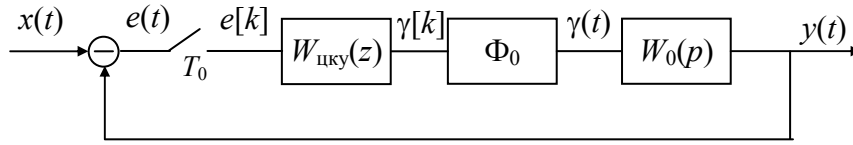


Рис. 3.12. Промежуточная эквивалентная структурная схема МП СУ

Пусть  $\omega_s$  – аналог частоты среза *разомкнутой системы*, т.е. такая частота, на которой амплитуда сигнала ошибки  $e(t)$ , меняющейся по гармоническому закону, *примерно* равна амплитуде колебаний выходного сигнала  $y(t)$ . Тогда, при достаточно малом значении периода дискретности, когда выполняется условие  $T_0 < 2/\omega_s < \pi/\omega_s$ , для исходной МП СУ можно рассмотреть «эквивалентную» непрерывную систему, структурная схема которой изображена на рис. 3.13.

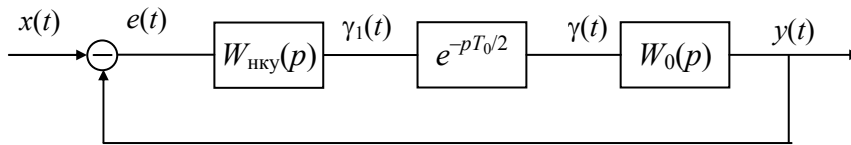


Рис. 3.13. Эквивалентная непрерывная система для МП СУ

Здесь  $W_{нкы}(p)$  – передаточная функция непрерывного линейного звена (корректирующего устройства), получаемая из передаточной функции  $W_{цкы}(z)$  в результате дробно-линейной подстановки следующего вида:

$$z = \frac{1 + p \frac{T_0}{2}}{1 - p \frac{T_0}{2}} = \frac{2 + pT_0}{2 - pT_0}. \quad (3.34)$$

Такая подстановка соответствует приближенной замене процедуры численного интегрирования *по методу трапеций* непрерывной операцией интегрирования:

$$\frac{T_0(\sigma + \sigma_1)f[k]}{2} \approx \int_0^t f(t)dt. \quad (3.35)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\sigma_1$ , соответственно, – это операторы неполного и полного суммирования, определенные на множестве функций дискретного аргумента.

Иногда для тех же целей *при малых* значениях периода дискретности  $T_0$  применяют более простые подстановки вида  $z = 1 + pT_0$  или  $z = (1 - pT_0)^{-1}$ , которые соответствуют численному интегрированию по методу прямоугольников (методы Эйлера-I и Эйлера-II). Формально эти выражения совпадают с двумя первыми слагаемыми разложений в степенные ряды функций  $z = e^{pT_0}$  и  $z^{-1} = e^{-pT_0}$ :



$$z = e^{pT_0} = 1 + pT_0 + (pT_0)^2 + \dots; \quad z^{-1} = e^{-pT_0} = 1 - pT_0 + (-pT_0)^2 + \dots \quad (3.36)$$

Важно отметить, что с получением «эквивалентной» непрерывной модели МП СУ, далее открывается возможность исследования ее свойств и особенностей методами и средствами непрерывной теории управления.

Для рассматриваемой МП СУ с ЦКУ «предельная» непрерывная система (*аналоговый прототип*) может быть получена из «эквивалентной» непрерывной системы удалением звена запаздывания. Структурная схема такой предельной непрерывной системы представлена на рис. 3.14.

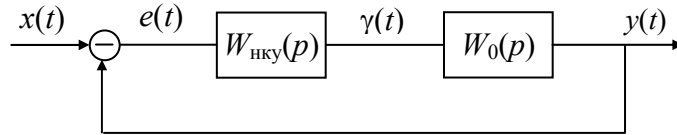


Рис. 3.14. Система – "аналоговый прототип" для МП СУ

Различие динамических свойств "эквивалентной" непрерывной и "предельной" систем определяется влиянием запаздывания на  $\tau = T_0/2$ . Эти свойства будут мало отличаться, если период дискретности  $T_0$  достаточно мал. Тогда запас устойчивости по фазе эквивалентной непрерывной системы, (а значит и МП СУ), будет всегда *меньше* чем в предельной непрерывной системе (прототипе), имеющей частоту среза  $\omega_c$ , на величину  $\Delta\varphi_3 = \omega_c T_0/2$ .

Приведенные выше результаты могут служить основой простого инженерного метода синтеза МП САУ, который называется методом «аналогового прототипа». Он позволяет назначить шаг дискретности по времени  $T_0$  (период повторения программы МП ВУ) и передаточную функцию  $W_{нкк}(z)$ , обеспечивающие выполнение заданных требований и ограничений на качество процесса управления.

Суть этого метода состоит в том, что по заданным требованиям технического задания *предварительно* выполняется динамический синтез непрерывной системы-прототипа (см. рис. 3.14). В результате этого становится известной передаточная функция последовательного непрерывного корректирующего устройства  $W_{нкк}(p)$ , а также частота среза  $\omega_c$  разомкнутой системы-прототипа и запас ее устойчивости по фазе  $\varphi_3$  (в радианах). В тех случаях, когда ставится задача модернизации ("переоборудование") уже существующей непрерывной САУ с переходом от непрерывного управления к цифровому, эта информация также известна.

Зная частоту среза  $\omega_c$  и запас устойчивости  $\varphi_3$  системы-прототипа, по формуле (3.33) можно определить необходимое значение периода дискретности  $T_0$ , обеспечивающего допустимое *уменьшение* запаса устойчивости МП СУ (по сравнению с прототипом!) *примерно* на величину  $\Delta\varphi_3 = \delta \cdot \varphi_3$ . Значение  $\delta$  обычно задают в диапазоне 0,05...0,1. Это соответствует ухудшению запаса устойчивости на (5÷10)% относительно прототипа. А так как при таком подходе запас устойчивости МП СУ *всегда будет меньше*, на величину  $\delta \cdot \varphi_3$ , то при расчете прототипа требования к  $\varphi_3$  необходимо соответствующим образом изменить.

Передаточную функцию цифрового корректирующего устройства  $W_{цкк}(z)$  в составе МП СУ можно получить из передаточной функции  $W_{нкк}(p)$  формальной заменой переменной в соответствии с выбранным способом аппроксимации оператора интегрирования (см. табл. 3.3).

Методы приближений при интегрировании

Метод интегрирования	Подстановка для $z$	Подстановка для $p$	Формула аппроксимации
Трапеций	$z = \frac{2 + pT_0}{2 - pT_0}$	$p = \frac{2}{T_0} \frac{z - 1}{z + 1}$	$\frac{T_0(\sigma + \sigma_1)f[k]}{2} \approx \int_0^t f(t)dt$
Эйлера-I	$z = 1 + pT_0$	$p = \frac{z - 1}{T_0}$	$T_0\sigma f[k] \approx \int_0^t f(t)dt$
Эйлера-II	$z = (1 - pT_0)^{-1}$	$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_0}$	$T_0\sigma_1 f[k] \approx \int_0^t f(t)dt$

Напомним еще раз, что подстановки для  $z$  и  $p$  из таблицы 3.3 можно использовать *только* для определения передаточных функций *корректирующих устройств* при получении «эквивалентной» непрерывной системы и при переходе от «аналогового прототипа» к МП СУ. Во всех других случаях такие подстановки недопустимы. Кроме того необходимо отметить, что метод Эйлера-I имеет существенное ограничение: его можно применять *только тогда*, когда все постоянные времени знаменателя в выражении для  $W_{\text{нкы}}(p)$  *больше* величины  $0,5T_0$ . В противном случае  $W_{\text{цкы}}(z)$  будет иметь часть полюсов с модулем больше единицы и ЦКУ окажется неустойчивым. Подобных проблем не возникает в двух других методах. Из них наиболее часто при «переоборудовании» непрерывной системы в цифровую систему используют метод трапеций.

Достоинством метода аналогового прототипа является его исключительная простота, «плата» за которую – несколько завышенные требования к частоте дискретизации, а значит и к быстродействию МП ВУ. Однако на фоне современных достижений в областях микроэлектроники и микропроцессорной техники указанный недостаток метода становится все менее существенным.

Другие методы синтеза МП СУ более сложны и требуют применения специальных знаний из теории дискретных систем управления.

### 3.4. Частотные характеристики дискретных звеньев, их виды и свойства

Каждое дискретное звено преобразует входной дискретный сигнал  $f[k]$  в выходной, тоже дискретный, сигнал  $y[k]$ . При этом, в общем случае, происходит изменение формы входного сигнала, а следовательно и его комплексного спектра.

Для описания и исследования этих изменений вводится понятие частотных характеристик звена. Наиболее полезным оно оказывается при исследовании свойств стационарных линейных дискретных динамических звеньев (ЛДДЗ).

Рассмотрим ЛДДЗ (рис.3.15) с передаточной функцией  $W(z)$ .

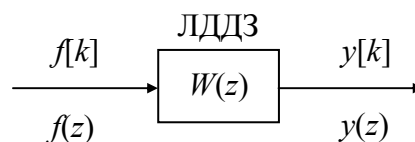


Рис. 3.15. Линейное дискретное динамическое звено

Для этого звена  $Z$ -изображения выхода и входа (при нулевых начальных условиях) связаны следующей формулой

$$y(z) = W(z)f(z). \quad (3.37)$$

Определим комплексный спектр выходного сигнала звена, полагая  $z = e^{j\omega T_0}$ :

$$y^*(j\omega) = W^*(j\omega)f^*(j\omega). \quad (3.38)$$

Здесь  $W^*(j\omega)$  – комплексный коэффициент передачи звена, устанавливающий связь комплексных спектров входного и выходного сигналов. Его принято называть *частотной передаточной функцией* звена (ЧПФ). Формально, ЧПФ получается из передаточной функции звена  $W(z)$  при  $z = e^{j\omega T_0}$  и представляет собой одностороннее *дискретное преобразование Фурье* весовой функции звена, т.е. ее комплексный спектр. Можно также определить понятие ЧПФ как отношение комплексных спектров сигналов выхода и входа линейного стационарного звена.

Из комплексного равенства (3.38) следуют два вещественных равенства для модулей и аргументов комплекснозначных функций переменной  $\omega$ :

$$\text{mod } W^*(j\omega) = M^*(\omega) = \frac{\text{mod } y^*(j\omega)}{\text{mod } x^*(j\omega)}; \quad (3.39)$$

$$\arg W^*(j\omega) = \varphi^*(\omega) = \arg y^*(j\omega) - \arg x^*(j\omega). \quad (3.40)$$

Здесь  $M^*(\omega)$  – это *амплитудная частотная характеристика* (АЧХ) ЛДДЗ. Она описывает изменение амплитудного спектра входного сигнала при прохождении его через ЛДДЗ и представляет собой отношение амплитудных спектров сигналов выхода и входа. Аналогично  $\varphi^*(\omega)$  – *фазовая частотная характеристика* (ФЧХ) ЛДДЗ. Она описывает изменение фазового спектра сигнала при прохождении его через ЛДДЗ и равна разности фазовых спектров выхода и входа.

Физический смысл этих характеристик точно такой же, что и для непрерывных звеньев. Так, если вход линейного дискретного звена изменяется по гармоническому закону  $x[k] = A_x \sin(\omega k T_0)$ , то *вынужденная* составляющая выхода будет меняться также по гармоническому закону, но с измененными значениями амплитуды и фазы колебаний:  $y_{\text{вын}}[k] = A_y M^*(\omega) \sin(\omega k T_0 + \varphi^*(\omega))$ . При этом  $A_y = A_x M^*(\omega)$ , а  $\varphi_y = \varphi^*(\omega)$ . Здесь переменная  $\omega$  имеет смысл циклической (круговой) частоты гармонических колебаний. Именно поэтому зависимость  $M^*(\omega)$  называют *амплитудной частотной*, а  $\varphi^*(\omega)$  – *фазовой частотной* характеристикой ЛДДЗ [1, 6]. Важно отметить, что свободная составляющая процесса на выходе звена при определении этих понятий не используется, а это означает, что по частотным характеристикам ЛДДЗ *принципиально невозможно* судить о его устойчивости или неустойчивости.

Особенностью частотных характеристик ЛДДЗ по сравнению с такими же характеристиками для непрерывных звеньев является их периодическая зависимость от частоты  $\omega$  с периодом  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . Это следует из свойства периодичности функции  $z = e^{j\omega T_0} = \cos(\omega T_0) + j \sin(\omega T_0)$ , относительно которой  $W^*(j\omega)$  имеет вид отношения полиномов с вещественными коэффициентами. Кроме того, АЧХ является четной, а ФЧХ – нечетной функцией  $\omega$ .

Учитывая свойства периодичности и "четности-нечетности", частотные характеристики ЛДДЗ имеет смысл рассматривать только на положительной части главного пе-

риода, т.е. на интервале частот  $\omega \in [0, \pi/T_0]$ . Конечная величина верхней границы этого диапазона делает невозможным применение широко распространенных в частотном анализе непрерывных систем и звеньев *асимптотических* логарифмических характеристик, т.к. асимптотические свойства ЛАХ на ограниченном диапазоне частот еще не успевают существенно проявиться.

Для устранения названных недостатков целесообразно выполнить неравномерное растяжение конечного частотного интервала  $0 \leq \omega \leq \pi/T_0$  на полубесконечный диапазон изменения некоторой другой, расчетной переменной  $0 \leq \lambda < \infty$  с помощью специального нелинейного преобразования. При этом желательно, чтобы это преобразование обладало следующими свойствами:

$$\text{а) } \omega = 0 \rightarrow \lambda = 0; \quad \text{б) } \omega = \pi/T_0 \rightarrow \lambda = \infty; \quad \text{в) } 0 < \omega < \pi/T_0 \rightarrow \omega \approx \lambda.$$

Перечисленным свойствам вполне удовлетворяет тригонометрическое преобразование с помощью функции тангенса:

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}. \quad (3.41)$$

Переменную  $\lambda$  в этом случае называют *абсолютной псевдочастотой* (далее, для краткости, – *псевдочастотой*). Она, в отличие от  $\omega$ , не имеет физического смысла, но при расчетах дискретных систем формально выполняет ту же самую роль. Примерный вид графика зависимости  $\lambda$  от  $\omega$  изображен на рис. 3.16.

Построенные в зависимости от  $\lg(\lambda)$  графики  $L_w(\lambda) = 20 \lg |W(j\lambda)|$  и  $\varphi_w(\lambda) = \arg(W(j\lambda))$  (псевдочастотные ЛАХ и ЛФХ) формально будут похожи на аналогичные частотные характеристики для непрерывных звеньев. В частности, точно так же будут проявляться их асимптотические свойства.

Перестроение графиков с использованием формулы (3.41) выполняют только в тех случаях, когда графики  $M^*(\omega)$  и  $\varphi^*(\omega)$  уже получены, например, по результатам экспериментов или компьютерных расчетов. При ручных построениях асимптотических логарифмических псевдочастотных характеристик (ЛПЧХ) такой подход нецелесообразен ввиду его трудоемкости.

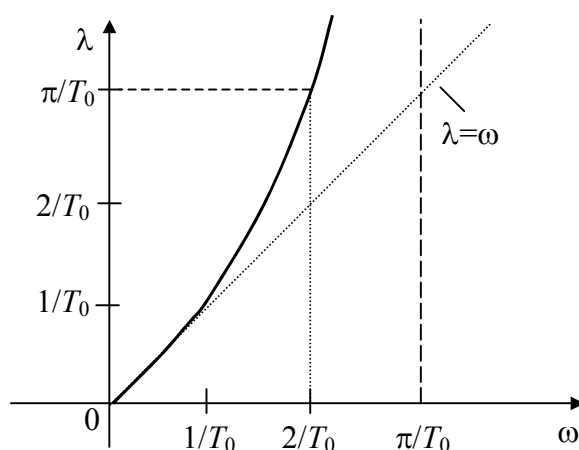


Рис. 3.16. Связь частоты  $\omega$  и псевдочастоты  $\lambda$

Более удобным является построение ЛПЧХ по преобразованной (с помощью  $D_u$ -преобразования) передаточной функции  $W(u)$ . Покажем, что в этом случае при подстановке  $u = j\lambda$  и  $p = j\omega$  между переменными  $\omega$  и  $\lambda$  будет иметь место соотношение (3.41).

Воспользуемся формулой взаимосвязи переменных  $z$ ,  $p$  и  $u$ :

$$z = e^{pT_0} = \frac{2 + uT_0}{2 - uT_0}. \quad (3.42)$$

Подставляя сюда значения этих переменных, которые используются при построении частотных ( $p = j\omega$ ) и псевдочастотных ( $u = j\lambda$ ) характеристик, получим зависимости между  $\omega$  и  $\lambda$ :

$$z = e^{j\omega T_0} = \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0} = e^{j2 \arctg \frac{\lambda T_0}{2}} \Rightarrow \omega = \frac{2}{T_0} \arctg \frac{\lambda T_0}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}. \quad (3.43)$$

Отсюда следует, что последняя из приведенных здесь зависимостей дает нам искомую связь псевдочастоты  $\lambda$  и частоты  $\omega$ . В том случае, когда известна передаточная функция  $W(z)$ , то расчет и построение ЛПЧХ целесообразно проводить в следующей последовательности:

а) с помощью подстановки (3.42) определяется *преобразованная* передаточная функция  $W(u)$ . Для упрощения последующих действий рекомендуется предварительно представить выражение для  $W(z)$  в виде произведения возможно более простых сомножителей;

б) передаточная функция  $W(u)$  представляется в форме произведения типовых множителей *стандартного* вида:  $K$ ;  $u^{\pm 1}$ ;  $(1 \pm uT)^{\pm 1}$ ;  $(1 \pm 2\xi Tu + u^2 T^2)^{\pm 1}$ ;

в) логарифмические псевдочастотные характеристики (ЛПЧХ) ЛДДЗ строятся по методике, разработанной для непрерывных динамических систем и звеньев. При этом формальное отличие состоит только в обозначениях переменных: вместо  $p \rightarrow u$ , а вместо  $\omega \rightarrow \lambda$ .

Отметим некоторые специфические особенности ЛПЧХ:

1) Если порядок знаменателя  $W(z)$  выше порядка ее числителя, то в выражении для  $W(u)$  *обязательно* появятся множители вида  $(1 - 0,5uT_0)$ , соответствующие неминимально-фазовым звеньям. Они будут вносить отрицательные фазовые сдвиги, аналогично устойчивым апериодическим звеньям первого порядка.

2) Если  $z = -1$  не является нулем или полюсом  $W(z)$ , то высокочастотная асимптота ПЧЛАХ располагается горизонтально на уровне  $20 \lg |W(-1)|$ , а фазовая характеристика стремится к уровню, кратному  $-\pi$ .

Пример 3.3. Пусть  $W(z) = \frac{KT_0}{z-1}$ . Тогда  $W(u) = \frac{K(1-0,5uT_0)}{u}$ , а соответствующие

ЛПЧХ можно строить, как суммы логарифмических псевдочастотных характеристик, построенных для безынерционного, интегрирующего и неминимально-фазового форсирующего звена первого порядка (рис.3.17).

Псевдочастотные характеристики (ПЛЧХ) широко используются для решения различных задач анализа и синтеза линейных ДСУ, например:

а) определение амплитудных и фазовых искажений, вносимых отдельными ЛДДЗ или их соединениями;

б) анализ устойчивости и показателей качества регулирования для структур с обратными связями;

в) синтез корректирующих звеньев по заданным требованиям к запасам устойчивости, быстродействию и точности ДСУ.

С переходом к псевдочастоте  $\lambda$ , методы решения перечисленных выше задач (при известном  $T_0$ ) по форме мало отличаются от соответствующих методов теории непрерывных систем. Возможные особенности, как правило, связаны с наличием неминимально-фазовых множителей в формулах для  $W(u)$  ЛДДЗ.

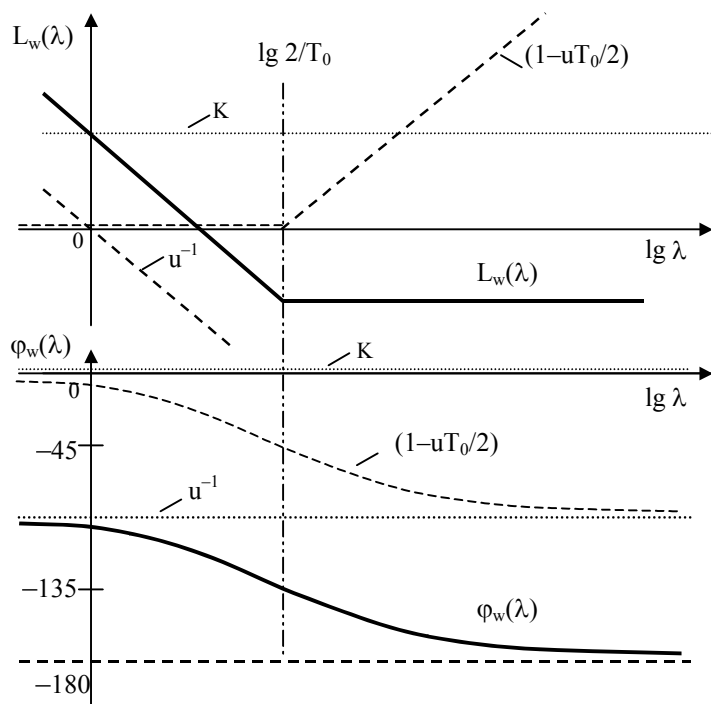


Рис. 3.17. Пример построения ЛПЧХ

### 3.5. Математические модели дискретного звена ПНЧ

Расчетные структурные схемы ДСУ имеют вид соединений дискретных звеньев. Среди них всегда будет хотя бы одно, называемое *дискретным звеном приведенной непрерывной части* (ДЗ ПНЧ). Оно представляет собой последовательное соединение формирователя импульсов ФИ с формой импульса  $S(t)$ , непрерывной части НЧ с передаточной функцией  $W_{\text{нч}}(p)$  и ключа, выполняющего дискретизацию непрерывного сигнала по времени с шагом  $T_0$  (рис. 3.18).

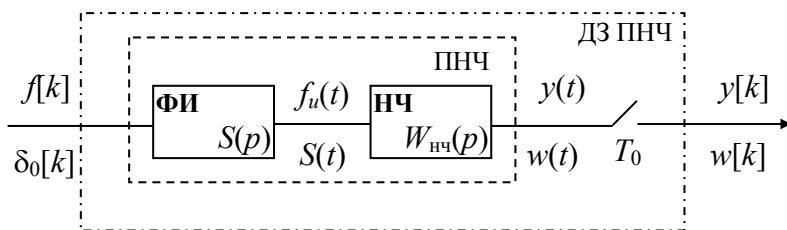


Рис. 3.18. Структурное представление ДЗ ПНЧ

Для теоретического исследования свойств и особенностей ДСУ необходимы математические модели для всех звеньев расчетной схемы, включая и ДЗ ПНЧ, в одной из канонических (стандартных) форм. Это могут быть, например, такие, как а) разностное уравнение «вход-выход»; б) дискретные уравнения состояния; в) дискретная передаточная функция; г) функция веса. Их все можно получить на основе описания (модели) ФИ и НЧ, причем способ получения математической модели ДЗ ПНЧ будет существенно зависеть от формы представления этих описаний.

♦ Сначала рассмотрим *первую* задачу, заключающуюся в определении передаточной функции  $W(z)$  для ДЗ ПНЧ, считая форму импульса  $S(t)$  формирователя и передаточную функцию  $W_{\text{нч}}(p)$  непрерывной части известными.

Будем находить передаточную функцию  $W(z)$  для ДЗ ПНЧ как  $Z$ -изображение реакции этого звена на одиночный импульс  $\delta_0[k]$  при нулевых начальных условиях, т.е. как  $D_z$ -преобразование его весовой функции  $w[k]$ . Для этого рассмотрим сигналы в разных точках схемы, приведенной на рис. 3.18 при  $f[k] = \delta_0[k]$ . Тогда выходом ФИ будет сигнал  $f_n(t) = S(t)$ . При этом выход непрерывной части НЧ определится по формуле свертки и будет равен  $y(t) = w_{\text{нч}}(t) \otimes S(t) = w(t)$ , а его изображение Лапласа  $y(p) = S(p)W_{\text{нч}}(p) = W_{\text{пнч}}(p)$ . Но так как  $w[k]$  – это решетчатая функция для  $w(t)$ , то  $Z\{w[k]\} = W(z)$  можно определить по  $W_{\text{пнч}}(p)$ , используя таблицу соответствий, либо формулу вычетов. В результате этого будет найдена искомая передаточная функция ДЗ ПНЧ [1,6]:

$$W(z) = Z\{S(p)W_{\text{нч}}(p)\}. \quad (3.43)$$

Если формирователь импульсов является фиксатором ( $\Phi\text{И} = \Phi_0$ ), то форма импульса описывается функцией  $S(t) = 1(t) - 1(t - T_0)$  с изображением по Лапласу  $S(p) = (1 - e^{-pT_0}) / p$ . Это соответствует прямоугольному импульсу с шириной (длительностью) равной  $T_0$ . Тогда формула (3.43) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\left\{\frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{нч}}(p)\right\} = Z\left\{\frac{W_{\text{нч}}(p)}{p}\right\} - Z\left\{\frac{W_{\text{нч}}(p)e^{-pT_0}}{p}\right\} = \\ &= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{W_{\text{нч}}(p)}{p}\right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

При получении этой формулы использовано *свойство 2*  $Z$ -преобразования об изображении запаздывающей на один такт  $T_0$  решетчатой функции.

Аналогично можно найти передаточную функцию ДДЗ *модифицированной* приведенной непрерывной части:

$$W(z, \varepsilon) = Z\{S(p)W_{\text{нч}}(p)e^{p\varepsilon T_0}\}. \quad (3.45)$$

Для случая, когда формирователь импульсов является фиксатором ( $\Phi\text{И} = \Phi_0$ ), эта формула запишется в следующем виде:

$$W(z, \varepsilon) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{W_{\text{нч}}(p)}{p} e^{p\varepsilon T_0}\right\} = (1 - z^{-1})Z_{\varepsilon}\left\{\frac{W_{\text{нч}}(p)}{p}\right\}. \quad (3.46)$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр смещения, *задаваемый* из интервала  $(0, 1)$ , а  $Z_{\varepsilon}\{*\}$  – это так называемое *модифицированное*  $Z$ -преобразование.

Пример 3.4. Пусть  $S(t) = 1(t) - 1(t - \gamma T_0)$ , при  $\gamma \leq 1$ , а  $W_{\text{нч}}(p) = \frac{K}{1 + pT_1}$ .

*Решение.* Введем вспомогательный параметр  $\varepsilon = 1 - \gamma$  и запишем изображение Лапласа для функции формы импульса в виде  $S(p) = \frac{1 - e^{-p(1-\varepsilon)T_0}}{p}$ .

Тогда из формулы (3.43) с помощью таблицы  $Z$ -преобразований можно получить выражение для дискретного звена приведенной непрерывной части:

$$\begin{aligned}
W(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT_0} e^{p\varepsilon T_0}}{p} \frac{K}{1 + pT_1} \right\} = Z \left\{ \frac{1}{p} \frac{K}{1 + pT_1} \right\} - z^{-1} Z \left\{ \frac{e^{p\varepsilon T_0}}{p} \frac{K}{1 + pT_1} \right\} = \\
&= \left\{ \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-d} \right\} - z^{-1} \left\{ \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-d} d^\varepsilon \right\} = K \left\{ 1 - \frac{z - d^\varepsilon}{z-d} \right\} = \\
&= K \frac{d^\varepsilon - d}{z-d} = K \frac{d(d^{-\gamma} - 1)}{z-d}, \quad d = e^{-\frac{T_0}{T_1}}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Рассмотрим наиболее простой, но часто встречающийся в приложениях случай, когда «коэффициент заполнения»  $\gamma = 1$  и функция формы импульса  $S(t) = 1(t) - 1(t - T_0)$ . Тогда формирователь импульсов является фиксатором ( $\Phi И = \Phi_0$ ) и из формулы (3.47) при  $\gamma = 1$  получим передаточную функцию дискретного звена приведенной непрерывной части, содержащую в своем составе  $\Phi_0$ :

$$\begin{aligned}
W(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} \frac{K}{1 + pT_1} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{p} \frac{K}{1 + pT_1} \right\} = \\
&= (1 - z^{-1}) \left\{ \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-d} \right\} = K \left\{ 1 - \frac{z}{z-d} \right\} = K \frac{(1-d)}{z-d}, \quad d = e^{-\frac{T_0}{T_1}}. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

При исследовании и динамическом синтезе линейных ДСУ широкое применение находит  $D_u$ -преобразование. Оно получается из  $D_z$ -преобразования в результате подстановки  $z = \frac{2 + uT_0}{2 - uT_0}$ . При этом преобразованные передаточные функции ДДЗ  $W(u)$  и  $W(u, \varepsilon)$  будут представлять собой дробно-рациональные выражения относительно комплексной переменной  $u$ .

В частном случае, когда формирователь импульсов  $\Phi И$  в составе ПНЧ является фиксатором  $\Phi_0$ , для  $W(u)$  и  $W(u, \varepsilon)$  можно получить  $D_u$ -преобразования следующего вида:

$$W(u) = D_u \left\{ \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{нч}}(p) \right\} = \tilde{D}_u \{W_{\text{нч}}(p)\}; \tag{3.49}$$

$$W(u, \varepsilon) = D_u \left\{ \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{нч}}(p) e^{p\varepsilon T_0} \right\}. \tag{3.50}$$

Такие соответствия найдены для многих часто встречающихся выражений  $W_{\text{нч}}(p)$  и это существенно упрощает задачу получения преобразованных передаточных функций  $W(u)$  и  $W(u, \varepsilon)$  для ДЗ ПНЧ. Формулу (3.49) часто рассматривают как новое (специальное)  $\tilde{D}_u$ -преобразование для  $W_{\text{нч}}(p)$  и таблицы соответствий для него приводятся в литературе по дискретным системам управления. Достаточно полный список таких соответствий приводится ниже в табл. 3.4.

♦ Рассмотрим далее *вторую задачу*, заключающуюся в получении уравнений состояния для ДЗ ПНЧ. При этом если известна передаточная функция ДЗ ПНЧ  $W(z)$  или



$W(z, \varepsilon)$ , записанная в форме отношения полинома числителя  $B(z)$  и полинома знаменателя  $A(z)$ , то матричные коэффициенты  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  в уравнениях состояния можно определить по специальным формулам через коэффициенты этих полиномов.

Таблица 3.4

$\tilde{D}_u$  - изображения для некоторых передаточных функций

$W_{\text{нч}}(p)$	$W(u) = D_u \left\{ \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{нч}}(p) \right\} = \tilde{D}_u \{W_{\text{нч}}(p)\}$
$K$	$K$
$\frac{K}{p}$	$\frac{K(1 - u \frac{T_0}{2})}{u}$
$\frac{K}{p^2}$	$K \frac{\left(1 - u \frac{T_0}{2}\right)}{u^2}$
$\frac{K}{p^3}$	$\frac{K \left(1 - u \frac{T_0}{2}\right) \left(1 - \frac{u^2 T_0^2}{12}\right)}{u^3}$
$\frac{K}{1 + pT_1}$	$\frac{K(1 - u \frac{T_0}{2})}{1 + uT_c}; T_c = \frac{T_0}{2} \frac{1+d}{1-d}; d = e^{-\frac{T_0}{T_1}}$
$\frac{K}{p(1 + pT_1)}$	$\frac{K \left(1 - u \frac{T_0}{2}\right) (1 + uT_x)}{u(1 + uT_c)}; T_x = T_c - T_1$
$K \frac{1 + p\tau}{p}$	$\frac{K(1 + u\tau_1)}{u}; \tau_1 = \tau - \frac{T_0}{2}$
$\frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}$	$\frac{1 + uT_1^1}{1 + uT_2^1}; T_1^1 = \frac{T_0}{2} \left( \frac{2\beta}{1 - d_2} - 1 \right); T_2^1 = \frac{T_0}{2} \frac{1 + d_2}{1 - d_2}; \beta = \frac{T_1}{T_2}; d_2 = e^{-\frac{T_0}{T_2}}$

Следует заметить, что такие формулы для матричных коэффициентов как в дискретных, так и в непрерывных уравнениях состояния динамических звеньев не являются единственными (однозначными), а их вид существенным образом зависит от способа назначения переменных состояния. Обычно при этом используются формулы для какой-то одной из общепринятых, канонических форм. Так, например, если передаточная функция ЛДДЗ  $W(z)$  имеет вид дробно-рационального выражения относительно комплексной переменной  $z$ :

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}, \quad (3.51)$$

то искомые матрицы, соответствующие канонической форме управляемости, можно получить по следующим формулам:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} 0 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots \\ \dots & \dots & 0 & a_n \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{a_n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \frac{b_n}{a_n};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 \frac{b_n}{a_n} & b_1 - a_1 \frac{b_n}{a_n} & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}.$$

В тех случаях, когда порядок непрерывной части НЧ достаточно высокий (например, больше десяти), то определение передаточной функции  $W(z)$  для дискретного звена приведенной непрерывной части (ДЗ ПНЧ) представляет собой сложную задачу даже в тех случаях, когда формирователь импульсов ФИ в составе ПНЧ является фиксатором (рис.3.19). Возникающие при этом трудности связаны, в основном, с необходимостью определения  $Z$ -преобразований по известным изображениям интегрального преобразования Лапласа.

Однако если для непрерывной части НЧ известны матрицы уравнений состояния  $\mathbf{A}_н$ ,  $\mathbf{B}_н$ ,  $\mathbf{C}_н$ ,  $\mathbf{D}_н$ , а формирователь импульсов является фиксатором, то коэффициенты  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  для ДЗ ПНЧ можно определить приближенным численным методом без нахождения передаточной функции  $W(z)$  [6, 8].

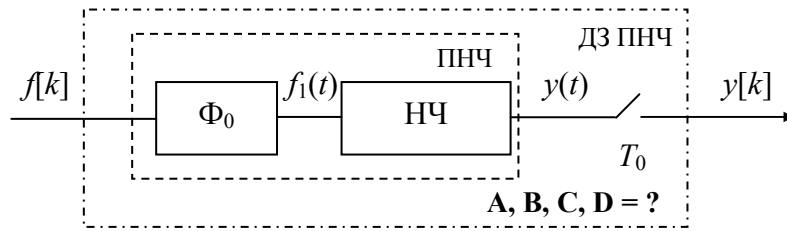


Рис. 3.19. Определение матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  для ДЗ ПНЧ

Пусть  $f_1(t)$  – выход фиксатора, поступающий на вход непрерывной части НЧ, математическая модель которой имеет форму уравнений состояния

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}f_1(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}f_1(t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Тогда вектор состояния непрерывной части  $\mathbf{x}(t)$  при  $kT_0 \leq t \leq kT_0 + T_0$  определится по формуле общего решения для первого из этих уравнений:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_н(t-kT_0)} \mathbf{x}[k] + \int_{kT_0}^t e^{\mathbf{A}_н(t-\tau)} \mathbf{B}_н f_1(\tau) d\tau \quad (3.54)$$

Полагая в этом выражении  $t = kT_0 + T_0$  и учитывая то, что на интервале изменения  $\tau$ , где  $kT_0 \leq \tau < kT_0 + T_0$ ,  $f_1(\tau) = f[k]$ , получим первое из уравнений состояния ДЗ ПНЧ:

$$\mathbf{x}[k+1] = e^{\mathbf{A}_н T_0} \mathbf{x}[k] + \int_{kT_0}^{kT_0+T_0} e^{\mathbf{A}_н(kT_0+T_0-\tau)} \mathbf{B}_н f[k] d\tau = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}f[k], \quad (3.55)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_H T_0}; \quad \mathbf{B} = \int_{kT_0}^{kT_0+T_0} e^{\mathbf{A}_H(kT_0+T_0-\tau)} d\tau \mathbf{B}_H = \int_0^{T_0} e^{\mathbf{A}_H \tau} d\tau \mathbf{B}_H. \quad (3.56)$$

Так как выражение для  $y(t)$  в уравнениях (3.53) соответствует безынерционному преобразованию, то при дискретизации аргумента оно сохраняет свой вид и поэтому  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_H$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_H$ .

Для получения численных значений матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в соответствии с (3.56), можно воспользоваться формулами, основанными на разложении матричного экспоненты в степенной ряд:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_H T_0} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_H T_0 + \frac{\mathbf{A}_H^2 T_0^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_H^i T_0^i}{i!}; \quad (3.57)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{T_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_H^i \tau^i}{i!} d\tau \mathbf{B}_H = T_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_H^i T_0^i}{(i+1)!} \mathbf{B}_H. \quad (3.58)$$

При практическом использовании этих формул количество слагаемых, учитываемых при суммировании, определяется в процессе вычислений исходя из требуемой точности, когда вес очередного слагаемого (по норме) становится достаточно малым.

### 3.6. Частотные характеристики ДЗ ПНЧ

Частотные методы анализа и синтеза линейных ДСУ используются столь же широко, как и для непрерывных систем. При этом необходимо уметь рассчитывать те или иные частотные характеристики (ЧХ) для всех звеньев *расчетной* схемы ДСУ, и *в первую очередь* – для дискретного звена приведенной непрерывной части ДЗ ПНЧ. Метод их расчета существенно зависит от типа частотных характеристик и от вида исходных данных. В связи с этим рассмотрим несколько характерных случаев.

◆ При известной передаточной функции  $W(z)$  для ДЗ ПНЧ расчет любых ЧХ осуществляется точно так же, как и для всех других дискретных звеньев в составе расчетной схемы. Напомним, что при расчете *обычных* частотных характеристик по передаточной функции  $W(z)$  используется подстановка  $z = e^{j\omega T_0}$ , где переменная  $\omega$  имеет физический смысл циклической частоты гармонических колебаний, назначаемая из диапазона  $[0; \pi/T_0]$ . Вне этого диапазона частотные характеристики можно продолжить с учетом свойств «четности-нечетности» и периодичности, но такой необходимости, как правило, не возникает. Ввиду сложной трансцендентной зависимости модуля и аргумента частотной передаточной функции  $W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T_0})$  от переменной  $\omega$ , такой метод при «ручных» расчетах не используется.

◆ Если для ДЗ ПНЧ известны матричные коэффициенты уравнений состояния  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ , определенные, например, по формулам (3.57), (3.58), то расчет частотных характеристик следует выполнять, используя формулу

$$W^*(j\omega) = \mathbf{C}[e^{j\omega T_0} \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.59)$$

◆ В том случае, когда передаточная функция  $W(z)$  и матричные коэффициенты  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  неизвестны, или их определение затруднено, то для компьютерных расчетов удобно воспользоваться следующей формулой:

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{ПНЧ}}(j(\omega - r \frac{2\pi}{T_0})), \quad (3.60)$$

которая связывает частотные передаточные функции (т.е. комплексные спектры весовых функций) ДЗ ПНЧ и ПНЧ. Здесь  $W_{\text{ПНЧ}}(p) = S(p)W_{\text{нч}}(p)$  – передаточная функция приведенной непрерывной части, где  $S(p)$  – изображение Лапласа для функции формы импульса  $S(t)$ . В частности, если формирователь импульсов является фиксатором ( $\Phi = \Phi_0$ ), то

$$S(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p}.$$

Число слагаемых, учитываемых в формуле (3.60), определяет точность получаемого результата. Для непрерывной части НЧ с явно выраженными инерционными свойствами этот ряд быстро сходится и достаточно высокая точность достигается уже при  $|r| \approx 6 \div 7$ .

При расчетах ДСУ от частоты  $\omega$  обычно переходят к псевдочастоте  $\lambda$ . Получаемые при этом псевдочастотные характеристики можно определять различными способами. Напомним кратко смысл основных из них:

а) используется подстановка  $u = j\lambda$  в выражение для преобразованной передаточной функции  $W(u)$ .

б) используется подстановка  $z = \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0}$  в выражение (3.24) для  $W(z)$ :

$$W(j\lambda) = \mathbf{C} \left[ \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.61)$$

в) используется формула пересчета значений аргумента  $\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}$  при *пере-*  
*строении* графиков АЧХ и ФЧХ. В результате этого из графиков зависимостей  $M^*(\omega)$  и  $\varphi^*(\omega)$  получают графики для  $M(\lambda)$  и  $\varphi(\lambda)$ .

Если требуется построить *асимптотические* ПЧЛХ для ДЗ ПНЧ, то сначала следует получить преобразованную передаточную функцию  $W(u)$  и представить ее в виде произведения элементарных множителей стандартного вида, совпадающих (с точностью до обозначения переменной) с передаточными функциями типовых звеньев, изучаемых в теории непрерывных систем. При «ручных» расчетах при переходе от  $W(z)$  к  $W(u)$  с помощью дробно-линейной подстановки, для упрощения аналитических преобразований *рекомендуется*  $W(z)$  представлять в виде произведения более простых выражений, а затем выполнять такие подстановки в каждом множителе отдельно. Далее может быть использована стандартная методика построения *асимптотических* характеристик.

Если передаточная функция непрерывной части  $W_{\text{нч}}(p)$  имеет высокий порядок, то получение соответствующих передаточных функций  $W(z)$  и  $W(u)$  для ДЗ ПНЧ «ручным» методом может оказаться трудноразрешимой проблемой даже тогда, когда  $\Phi = \Phi_0$ . Именно для этого случая был разработан и долгое время успешно *применялся приближенный* метод построения логарифмических псевдочастотных характеристик (ЛПЧХ) для ДЗ ПНЧ, основанный на идеях *обособленного*  $D_u$ -преобразования [6]. Несмотря на то, что в наше «компьютеризированное» время этот метод почти не используется, его методологическая значимость остается весьма важной. Более того, с его помощью иногда удается обнаружить грубые ошибки компьютерных расчетов при построении ЛПЧХ ДЗ ПНЧ.

Метод применим тогда, когда НЧ является инерционной, а шаг дискретизации  $T_0$  достаточно мал. В этом случае существует некоторый диапазон частот  $0 \div \omega_{\text{п}}$ , в котором  $\omega \approx \lambda$ , а частотные характеристики дискретного звена и непрерывной части в этом диапазоне также примерно одинаковы:  $W^*(j\omega) \approx W_{\text{нч}}(j\omega)$ . При этом величина  $\omega_{\text{п}}$  обязательно должна удовлетворять условию Котельникова-Шеннона  $\omega_{\text{п}} < \pi/T_0$  и часто принимается равной  $2/T_0$ .

Согласно методу обособленного  $D_u$ -преобразования, логарифмические псевдочастотные характеристики для ДЗ ПНЧ с фиксатором  $\Phi_0$  строятся *раздельно* для низкочастотного (I) и высокочастотного (II) диапазонов. При этом за границу диапазонов принимается частота  $\omega_{\text{п}}$ .

Для построения ЛПЧХ в этих диапазонах используются две различные приближенные формулы:

I. При построении ЛПЧХ в *первом* (низкочастотном) диапазоне, где выполняется условие  $\lambda \approx \omega < \omega_{\text{п}}$ , используется *приближенное* выражение для преобразованной передаточной функции ДДЗ ПНЧ

$$W(u) \approx W_{\text{нч}}(u). \quad (3.62)$$

Очевидно, что для этого частотного диапазона ЛЧХ непрерывной части и ПЧЛХ ДЗ ПНЧ, построенные на совмещенной плоскости с общей осью  $\lg(\lambda)$  и  $\lg(\omega)$  будут совпадать.

II. Для расчета и построения ЛПЧХ во *втором* (высокочастотном) диапазоне при значениях  $\lambda > \omega_{\text{п}}$  используется другое приближенное равенство:

$$W(u) \approx \tilde{D}_u \left\{ \frac{K_x}{p^v} W_{\text{в}}(p) \right\}, \quad (3.63)$$

где  $v$  – коэффициент кратности наклона "средней" *асимптоты* ЛАХ для  $W_{\text{нч}}(p)$  на частоте  $\omega = \omega_{\text{п}}$ ;  $K_x = 10^{\frac{L_x}{20}}$ , где  $L_x$  – ордината точки пересечения "средней" асимптоты с вертикальной осью координат плоскости ЛАХ;  $W_{\text{в}}(p)$  – часть выражения для  $W_{\text{нч}}(p)$ , содержащая "малые" постоянные времени, для которых частоты сопряжения *больше*, чем  $\omega_{\text{п}}$ . При этом предполагается, что формула для  $W_{\text{в}}(p)$  имеет вид произведения множителей, соответствующих апериодическим и форсирующим звеньям первого порядка.

Выбор величины  $\omega_{\text{п}}$  является неоднозначным и противоречивым: чем меньше значение этой частоты, тем точнее будет приближенное выражение (3.63), но тем сложнее окажется процедура определения  $\tilde{D}_u$ -изображения в этой формуле и наоборот, чем больше величина  $\omega_{\text{п}}$ , тем проще решается эта проблема ценой снижения точности получаемого решения.

Справедливость приближенного равенства (3.62) вытекает из следующих рассуждений. В соответствии с (3.60), для частотной передаточной функции ДЗ ПНЧ можно записать выражение

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{пнч}}(j(\omega - r \frac{2\pi}{T_0})). \quad (3.64)$$

Если частота среза для ПНЧ меньше величины  $\omega_0/2 = \pi/T_0$ , то спектры соседних слагаемых в этой сумме «слабо» перекрываются и поэтому при рассмотрении частотных ха-

характеристик ДЗ ПНЧ в полосе частот  $0 \div \omega_n < 2/T_0$  можно ограничиться единственным слагаемым, соответствующим  $r = 0$ . А так как *при этом* частотная передаточная функция фиксатора  $W_{\Phi_0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_0}}{j\omega} \approx T_0$ , то с учетом  $\lambda \approx \omega < \omega_n$ , получим  $W(j\lambda) \approx W_{нч}(j\lambda)$ .

Это соответствует выражению (3.62) при  $u = j\lambda$ .

В ряде случаев более удобна *модификация* метода обособленного преобразования, в которой низкочастотная часть ЛПЧХ (до значения псевдочастоты  $\lambda = 2/T_0$ ) строится точно так же, как и в основном методе (т.е. совпадает с ЛЧХ непрерывной части), а высокочастотная часть (при  $\lambda > 2/T_0$ ) строится приближенно более простым способом. При этом предполагается, что непрерывная часть либо не содержит колебательных и форсирующих звеньев, либо их частоты сопряжения  $\omega_{ci}$  принадлежат низкочастотной области, а соответствующие им постоянные времени  $T_i > T_0/2$ .

Обычно в этой модификации метода рассматривают следующие два распространенных на практике случая:

а) на частоте  $\omega = 2/T_0$  асимптотическая ЛАХ НЧ имеет наклон  $-20$  дБ/дек. Тогда для построения ЛПЧХ во втором (высокочастотном) диапазоне вместо (3.63) используется формула

$$W(u) = \frac{K_x (1 - u \frac{T_0}{2}) (1 + u (\frac{T_0}{2} - T_\Sigma))}{u (1 + u \frac{T_0}{2})}; \quad (3.65)$$

б) при  $\omega = 2/T_0$  асимптотическая ЛАХ НЧ имеет наклон  $-40$  дБ/дек. Тогда для тех же целей (ВЧ диапазон) формула для  $W(u)$  принимается в виде:

$$W(u) = \frac{K_x (1 - u \frac{T_0}{2}) (1 - u T_\Sigma)}{u^2}. \quad (3.66)$$

В этих приближенных формулах  $T_\Sigma$  – это сумма тех "малых" постоянных времени в знаменателе  $W_{нч}(p)$ , значения которых меньше величины  $T_0/2$ .

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость систем управления, независимо от их типа, является *необходимым* условием их работоспособности и нормального функционирования. Проблема исследования и обеспечения устойчивости одинаково важна как для непрерывных, так и для дискретных систем. Любая СУ *обязательно* должна быть устойчивой, иначе из-за нарастающих по величине свободных (собственных) колебаний по всем координатам, в том числе и по выходу, она не в состоянии воспроизводить *требуемый* закон изменения управляемой переменной. В неустойчивой системе *цель управления* – регулирование значений управляемых переменных в соответствии с предписанными законами их изменения *не достигается*.

Общее понятие устойчивости, как свойства динамических систем (и звеньев) возвращаться в первоначальное состояние после прекращения действия возмущений, остается справедливым и для ДСУ [6,7]. Различия будут проявляться только в формах условий устойчивости, обусловленных особенностями математического аппарата, исполь-

зубею для описания и исследования дискретных систем. Соответственно этому могут отличаться методы исследования и обеспечения устойчивости. Для линейных дискретных систем и звеньев свойство устойчивости определяется исключительно особенностями решений *однородных* разностных уравнений, описывающих процессы в автономных (при отсутствии внешних воздействий) системах. При этом, как правило, говоря об устойчивости линейных ДСУ, подразумевают их *асимптотическую* устойчивость, при которой свободная составляющая процессов с течением времени затухает, т.е. стремится к нулю. Математические условия устойчивости для дискретных динамических звеньев (ЛДДЗ) подробно рассматривались во *второй* главе. Для соединений ЛДДЗ (систем) все эти условия и определения, в основном, сохраняют свой вид.

#### 4.1. Условия устойчивости линейных ДСУ и методы ее исследования

Линейная ДСУ *асимптотически* устойчива, если выполняется *любое* из следующих, математически эквивалентных условий:

1) *все* корни характеристического уравнения  $A(z) = 0$  дискретной линейной системы (*характеристические корни*)  $z_i$  по модулю меньше единицы:  $|z_i| < 1$ . Иначе говоря, они располагаются *внутри* единичного круга на  $z$ -плоскости.

2) все корни *преобразованного* (с помощью дробно-линейной подстановки) характеристического уравнения  $A_1(u) = 0$  принадлежат левой полуплоскости комплексной переменной  $u$ , т.е.  $\text{Re } u_i < 0$ ;

3) свободная (переходная) составляющая процесса в системе (по любой координате) с течением времени стремится к нулю;

4) полная реакция системы на внешнее воздействие с течением времени стремится к вынужденной составляющей;

5) весовая функция системы  $w[k]$  при возрастании  $k$  стремится к нулю;

6) переходная функция системы  $h[k]$  стремится к постоянному значению.

Каждое из перечисленных выше условий является не только *необходимым*, но и *достаточным*, т.к. в случае их нарушения система оказывается либо неустойчивой, либо будет находиться на границе устойчивости.

В принципе, возможно исследование (анализ) устойчивости линейной ДСУ путем *непосредственной* проверки какого-либо из перечисленных выше условий. Такие методы называют *прямыми*, а все прочие относят к *косвенным* методам. Необходимую информацию о характеристических корнях или о временных реакциях ДСУ (решениях разностных уравнений) для *конкретно* заданных структур и численных значений параметров можно получить, применяя современные компьютерные средства и специализированные пакеты прикладных программ. Более того, стал практически возможным и динамический синтез ДСУ на основе прямых методов, представляющий собой процедуру *направленного перебора* множества конкретных вариантов с выбором подходящего (или лучшего) среди них. По сути – это современный вариант старинного метода "проб и ошибок", называемый методом "генерации вариантов и проверки гипотез". Для большинства сложных и нелинейных ДСУ именно такой подход к динамическому синтезу является порой единственно возможным и конструктивным.

При исследовании устойчивости *линейных* САУ традиционно используются не прямые, а *косвенные методы*, основанные на проверке специальных математических правил и условий, *не требующих* нахождения характеристических корней и временных реакций системы. Эти правила получили название *критериев устойчивости*. По трудоем-

кости, их применение существенно проще, чем непосредственная проверка указанных выше условий устойчивости. Кроме того, эти правила обычно имеют не числовую, а аналитическую форму, что особенно важно при анализе влияния параметров системы на устойчивость системы с последующим выбором их значений из интервалов устойчивости.

В зависимости от типа математических условий, проверяемых с помощью критериев устойчивости, их можно разделить на две группы:

- А. Алгебраические (аналитические) критерии.
- Б. Частотные (графоаналитические) критерии.

Алгебраические критерии бывают двух видов: а) *коэффициентные* и б) *матричные*. Для коэффициентных критериев исходные данные – это коэффициенты *характеристического* уравнения системы  $A(z)=0$ . Для матричных критериев такими данными является матричный коэффициент  $\mathbf{A}$  в *уравнениях состояния* (2.9) дискретной системы управления. Для применения алгебраических критериев структурная схема ДСУ может быть любой, лишь бы для нее были получены полином  $A(z)$  или матрица  $\mathbf{A}$  [3, 6, 7].

Известны два вида частотных критериев устойчивости для линейных систем: а) *критерий Михайлова* и б) *критерий Найквиста*. Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости *замкнутой САУ* с единичной отрицательной связью по частотным характеристикам разомкнутой системы. Возможно обобщение этого критерия на случай систем с *произвольной структурой* (см. Приложение). Критерий Михайлова позволяет судить об устойчивости линейной ДСУ (с любой структурой) по результатам исследования частотных свойств ее характеристического полинома  $A(z)$ .

Для удобства использования и наглядности, информация о частотных свойствах и характеристиках обычно представляется в графическом виде (например, это может быть частотный годограф для  $A(z)$ , ЛПЧХ разомкнутой ДСУ и др.) [3, 6].

Рассмотрим подробнее перечисленные выше критерии устойчивости.

### А. Алгебраические критерии устойчивости

**Коэффициентные критерии.** Пусть известно характеристическое уравнение исследуемой дискретной системы

$$A(z) = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n. \quad (4.1)$$

Специфичный вид условия устойчивости относительно корней  $|z_i| < 1$  характеристического полинома  $A(z)$  делает невозможным непосредственное применение традиционных для непрерывных систем алгебраических критериев устойчивости таких, как критерий Рауса–Гурвица и Лъенара–Шипара. Так, например, даже требование  $a_i > 0$  для дискретных систем *не является* обязательным.

Как было показано во *второй* главе, применение дробно-линейной подстановки вида (2.13) в характеристическое уравнение (4.1) позволяет перейти к *преобразованному характеристическому уравнению*  $A_1(u)=0$  (или  $A_2(w)=0$ ), для которого можно применять без всяких ограничений все известные из теории непрерывных линейных систем алгебраические критерии устойчивости. Но при этом сама процедура получения преобразованного уравнения для ДСУ высокого порядка может оказаться затруднительной. В таких случаях устойчивость ДСУ можно исследовать, не прибегая к дробно-линейному преобразованию, а непосредственно по коэффициентам исходного характеристического уравнения (4.1). Для этой цели разработаны *дискретные аналоги* алгебраических критериев устойчивости.



Среди алгебраических коэффициентных критериев наиболее известным является критерий Шура–Кона [3]. Для него существуют две формы: аналитическая и табличная. Аналитическая форма критерия является дискретным вариантом критерия Гурвица, а табличная – дискретным вариантом критерия Рауса.

Ниже, без доказательства, рассматриваются оба варианта этого критерия.

*Аналитическая форма критерия.* Для характеристического уравнения (4.1) сначала определяется следующая последовательность определителей, составленная из его коэффициентов:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{0k} & \mathbf{A}_{nk} \\ \mathbf{A}_{nk}^T & \mathbf{A}_{0k}^T \end{vmatrix} = \left| \mathbf{A}_{0k} \mathbf{A}_{0k}^T - \mathbf{A}_{nk}^T \mathbf{A}_{nk} \right|, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.2)$$

$$\text{где } \mathbf{A}_{0k} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{nk} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Далее критерий формулируется следующим образом. Для устойчивости ДСУ необходимо и достаточно, чтобы определители  $\Delta_k$  с четными значениями  $k$  были положительны, а с нечетными – отрицательны.

Ввиду сложности нахождения определителей высоких порядков такой метод мало пригоден для ручных вычислений, но идеально подходит для компьютерной реализации. Для систем не выше третьего порядка условия устойчивости можно получить в общем виде, более удобном для практического применения.

Так, например, для системы *первого* порядка ( $n=1$ ):  $A(z) = a_0 + a_1z$ ;

$$\mathbf{A}_{01} = a_0; \quad \mathbf{A}_{11} = a_1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_1^2 < 0; \quad \text{т.е. } a_0 + a_1 > 0 \text{ и } a_0 - a_1 < 0. \quad (4.4)$$

Для системы *второго* порядка ( $n=2$ ):  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ , а матрицы (4.3) имеют следующий вид

$$\mathbf{A}_{01} = a_0; \quad \mathbf{A}_{21} = a_2; \quad \mathbf{A}_{02} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда в соответствии с (4.2) получим условия устойчивости в виде

$$\Delta_1 = a_0^2 - a_2^2 < 0; \quad \Delta_2 = (a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_1)^2 > 0.$$

После элементарных преобразований, эти условия можно привести к эквивалентному виду в форме трех неравенств:

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0; \quad a_2 - a_1 + a_0 > 0; \quad a_2 - a_0 > 0. \quad (4.5)$$

Для системы *третьего* порядка ( $n=3$ ):  $A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$  и матрицы (4.3) запишутся следующим образом:

$$\mathbf{A}_{01} = a_0; \quad \mathbf{A}_{31} = a_3; \quad \mathbf{A}_{02} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{32} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_{03} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{33} = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти матрицы в (4.2) и учитывая требования критерия Шура–Кона  $\Delta_1 < 0$ ;  $\Delta_2 > 0$ ;  $\Delta_3 < 0$ , после эквивалентных преобразований можно получить следующую систему неравенств, являющихся необходимыми и достаточными условиями устойчивости дискретной системы *третьего* порядка:

$$\begin{aligned} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0; & \quad a_3 - a_2 + a_1 - a_0 > 0; \\ a_3(a_3 - a_1) - a_0(a_0 - a_2) > 0; & \quad 3(a_3 + a_0) - a_2 - a_0 > 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

*Табличная форма критерия.* Для характеристического уравнения (4.1) сначала составляется специальная таблица 4.1. Строки таблицы заполняются парами. В первой строке таблицы выписываются коэффициенты полинома  $A(z)$  в порядке возрастания индексов, а во второй строке – в обратном порядке. Далее определяется элемент  $r_i$  самого левого (ведущего) столбца. Коэффициенты верхних строк всех последующих пар для каждого  $r_i$  находятся по правилу, аналогичному правилу составления таблицы Рауса. Нижние строки пар образуются теми же коэффициентами, но записанными в обратном порядке.

Таблица 4.1

**Табличная форма критерия Шура–Кона**

	$a_0$	$a_1$	...	$a_{n-1}$	$a_n$
	$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$
$r_1 = \frac{a_0}{a_n}$	$c_{0,2} = a_1 - r_1 a_{n-1}$	$c_{1,2} = a_2 - r_1 a_{n-2}$	...	$c_{n-1,2} = a_n - r_1 a_0$	0
	$c_{n-1,2}$	$c_{n-2,2}$	...	$c_{0,2}$	...
$r_2 = \frac{c_{0,2}}{c_{n-1,2}}$	$c_{0,3} = c_{1,2} - r_2 c_{n-2,2}$	$c_{1,3} = c_{2,2} - r_2 c_{n-3,2}$	...	...	...
	$c_{n-2,3}$	$c_{n-3,3}$	...	...	...
$\vdots$	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...

Критерий устойчивости формулируется следующим образом. Для устойчивости ДСУ необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты ведущего столбца таблицы  $r_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), были *по модулю* меньше единицы. Алгоритм заполнения таблицы и проверки модуля коэффициентов  $r_i$  легко программируется и может эффективно применяться для исследования устойчивости ДСУ высокого порядка.

**Матричный критерий устойчивости.** К матричным критериям устойчивости относится критерий Зубова и его различные модификации, исходными данными для которого является матрица  $\mathbf{A}$  в дискретных уравнениях состояния [3]. Для устойчивости ДСУ *необходимо и достаточно*, чтобы пределом последовательных степеней матрицы  $\mathbf{A}$  была нулевая матрица:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Если это условие выполняется, то все характеристические корни (собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ ) будут принадлежать единичному кругу с центром в начале координат комплексной плоскости (достаточность критерия). Справедливо и обратное утверждение: если все корни  $z_i$  по модулю меньше единицы, то будет выполняться условие (4.7) (необходимость критерия).

Справедливость этих утверждений для линейного дискретного звена была показана во второй главе (для простых характеристических корней  $z_i, i=1, 2, \dots, n$ ).

К сожалению, проверить факт выполнения или невыполнения предельного равенства (4.7) непосредственно не представляется возможным. В таком виде критерий пригоден только для теоретических исследований, а практическое применение нашли следующие достаточные формы матричного критерия Зубова.

а) *Достаточное условие неустойчивости* (или необходимое условие устойчивости). Если след матрицы (сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы)  $\text{Sp}\mathbf{A} > n$ , то ДСУ неустойчива. Это утверждение следует из свойства квадратной матрицы  $n$ -го порядка, согласно которому след матрицы всегда равен сумме собственных значений матрицы (с учетом их кратности);

б) *Первое достаточное условие устойчивости*. Если найдется такое  $k$ , при котором норма  $k$ -ой степени матрицы  $\mathbf{A}$  меньше единицы:  $\|\mathbf{A}^k\| < 1$ , то ДСУ устойчива. При этом норму матрицы можно вычислять, например, по следующему выражению (евклидова норма):

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt[2]{\sum_{i,j} a_{ij}^2}.$$

в) *Второе достаточное условие устойчивости*. Если найдется такое  $k$ , начиная с которого следы трех последовательных степеней матрицы  $\mathbf{A}$  образуют убывающую последовательность:  $\text{Sp}\mathbf{A}^k > \text{Sp}\mathbf{A}^{k+1} > \text{Sp}\mathbf{A}^{k+2}$ , то такая ДСУ устойчива.

Проверка всех этих условий легко программируется и поэтому применима для проверки устойчивости (неустойчивости) систем ДСУ практически любого порядка. Следует помнить, что эти условия являются лишь достаточными и их невыполнение не позволяет судить об устойчивости системы данным методом.

Общим недостатком всех рассмотренных выше алгебраических критериев является то, что они лишь позволяют определить, устойчива или неустойчива данная система. Но исследовать запасы устойчивости или давать рекомендации для их обеспечения с помощью таких критериев практически невозможно. В этом отношении более предпочтительны частотные критерии устойчивости.

## Б. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости ДСУ основаны на рассмотрении и исследовании свойств частотных характеристик или некоторых других частотно-зависимых функций. Обычно они применяются в графической форме, но в отдельных случаях, например, для систем невысокого порядка, их удается применить и в аналитическом виде без построения графиков или годографов. Ниже рассмотрены два таких частотных критерия.

**Критерий устойчивости Михайлова.** Дискретный аналог критерия Михайлова имеет ряд особенностей по сравнению с таким же критерием для непрерывных систем, поэтому имеет смысл получить условия этого критерия.

Рассмотрим характеристический полином ДСУ  $A(z)$  и представим его в факторизованном виде (произведением элементарных сомножителей)

$$A(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i), \quad (4.8)$$

где  $z_i$  – корни полинома. Далее поступим формально так же, как при исследовании частотных характеристик, т.е. будем полагать, что  $z = e^{j\omega T_0}$  и изменять переменную  $\omega$  в диапазоне  $\left[-\frac{\pi}{T_0}; \frac{\pi}{T_0}\right]$ . При этом точка  $z$  опишет полную окружность в комплексной плоскости (рис. 4.1), перемещаясь в *положительном* направлении (против часовой стрелки) по границе *единичного круга*, являющегося областью устойчивого расположения характеристических корней. Исследуем *приращение аргумента* комплекснозначной функции

$$A^*(j\omega) = A(e^{j\omega T_0}) = a_n \prod_{i=1}^n (e^{j\omega T_0} - z_i) \quad (4.9)$$

при указанном выше диапазоне изменения переменнй  $\omega$ :

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg (e^{j\omega T_0} - z_i) \quad (4.10)$$

$-\frac{\pi}{T_0} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$

Легко заметить (рис. 4.1), что приращение аргумента (угол поворота вектора) для каждого элементарного сомножителя  $(e^{j\omega T_0} - z_i)$  в (4.9) будет *а)* равно  $2\pi$ , если соответствующий корень  $z_i$  *принадлежит* единичному кругу и *б)* равно нулю, если этот корень расположен *вне круга*. Для простоты полагаем, что характеристические корни на единичной окружности отсутствуют.

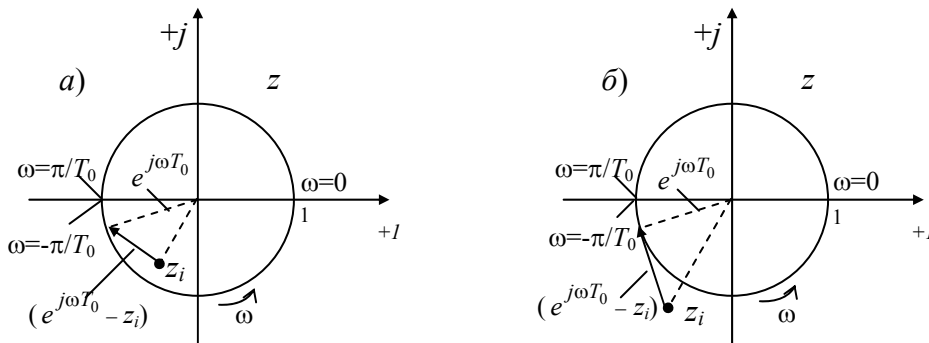


Рис. 4.1. К доказательству критерия Михайлова

Тогда суммарное приращение аргумента в (4.10) будет равно  $2\pi(n-r)$ , где  $r$  – число характеристических корней, по модулю *больших* единицы. Придавая переменнй  $\omega$  только неотрицательные значения (аналогично частоте!) и, тем самым, уменьшая диапазон ее изменения в два раза, из (4.10) с учетом предыдущего замечания об отсутствии корней на единичной окружности получим:

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \pi(n-r) \quad (4.11)$$

$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$

Этот результат является частным случаем принципа аргумента для функции комплексной переменной в виде полинома. Поскольку необходимым и достаточным условием устойчивости ДСУ в этом случае является требование  $r=0$  (отсутствие корней характеристического полинома вне единичного круга), то оно будет эквивалентно следующему равенству:

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \pi n, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0} \quad (4.12)$$

Этому условию можно придать простой геометрический смысл, если рассматривать поведение частотного годографа характеристического вектора  $A^*(j\omega)$ , называемого *годографом Михайлова*: ДСУ будет устойчивой, если ее годограф Михайлова при возрастании  $\omega$  от 0 до значения  $\frac{\pi}{T_0}$  обходит *последовательно в положительном направлении*  $2n$  квадрантов комплексной плоскости. В противном случае система или неустойчива, или находится на границе устойчивости.

*Необходимым* (но не достаточным!) условием нахождения ДСУ на границе устойчивости является прохождение годографа при некотором значении  $\omega=\omega_i$  через начало координат. Придавая годографу вблизи этой точки малые деформации в двух *противоположных* направлениях и применяя критерий Михайлова к «деформированным» годографам, можно уточнить, будет ли в этом «критическом» случае ДСУ неустойчивой или она будет находиться на границе устойчивости. Так, если оба деформированных годографа соответствуют неустойчивой системе, то исходный (недеформированный) годограф будет соответствовать также неустойчивой системе.

Характерной особенностью годографа Михайлова для ДСУ является то, что он начинается при  $\omega=0$ , когда  $z=1$ , на вещественной оси в точке  $A(1)$  и заканчивается при  $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ , когда  $z = -1$ , также на вещественной оси в точке  $A(-1)$ . Тогда для устойчивой системы с *четным* порядком  $n$  начальная  $A(1)$  и конечная  $A(-1)$  точки годографа Михайлова *обязательно* будут располагаться по одну сторону от начала координат, а для системы с *нечетным* порядком  $n$  – по *разные стороны* от него.

Это свойство является *необходимым условием устойчивости* ДСУ. Его можно записать в более удобном виде:  $A(1)A(-1) > 0$ , если  $n$  четно и  $A(1)A(-1) < 0$ , если  $n$  нечетно.

Здесь  $A(1) = \sum_{i=0}^n a_i$  и  $A(-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$ .

В качестве примера, рассмотрим необходимые условия устойчивости для систем *первого* и *второго* порядков и сравним их с условиями устойчивости, полученными ранее с помощью критерия Шура–Кона.

♦  $n=1$  (нечетный порядок):

$$A(1)A(-1) = (a_0+a_1)(a_0-a_1) < 0 \rightarrow (a_0+a_1) > 0; (a_0-a_1) < 0.$$

Это полностью совпадает с условиями устойчивости (4.4). Поэтому для ДСУ *первого* порядка необходимые условия являются также и достаточными.

♦  $n=2$  (четный порядок):

$$A(1)A(-1) = (a_0+a_1+a_2)(a_0-a_1+a_2) > 0 \rightarrow (a_0+a_1+a_2) > 0 \text{ и } (a_0-a_1+a_2) > 0.$$

Но из условия (4.5) следует, что для устойчивости систем второго порядка требуется выполнение еще одного, дополнительного неравенства  $a_2 - a_0 > 0$ .

Таким образом, для ДСУ, начиная уже со второго порядка, необходимые условия устойчивости не совпадают с достаточными условиями и число проверяемых неравенств для исследования устойчивости будет *больше* двух.

Отметим также, что вместо частотного годографа для  $A^*(j\omega)$ , можно строить графики его действительной  $X^*(\omega) = \text{Re } A^*(j\omega)$  и мнимой  $Y^*(\omega) = \text{Im } A^*(j\omega)$  частей. Тогда для устойчивости ДСУ необходимо и достаточно, чтобы корни уравнений  $X^*(\omega) = 0$  и  $Y^*(\omega) = 0$  чередовались, а при  $\omega = 0+$  эти функции имели одинаковые знаки.

*Замечание.* Если предварительно было получено преобразованное с помощью дробно-линейной подстановки характеристическое уравнение  $A_1(u) = 0$ , то для полинома  $A_1(u)$  можно получить функцию Михайлова подстановкой  $u = j\lambda$  и далее применить критерий Михайлова в традиционном для линейных непрерывных систем виде.

**Критерий устойчивости Найквиста.** Этот критерий основан на изучении частотных характеристик *разомкнутой* системы. Его формулировка для ДСУ не имеет каких-либо особенностей по сравнению с тем же критерием для непрерывных систем. Убедимся в этом, применив принцип аргумента к дробно-рациональной функции  $N(z) = 1 + W(z)$ , где  $W(z) = \frac{B(z)}{C(z)}$  – передаточная функция разомкнутого контура ДСУ:

$$N(z) = 1 + W(z) = \frac{B(z) + C(z)}{C(z)} = \frac{A(z)}{C(z)}. \quad (4.13)$$

Отметим, что числитель выражения для  $N(z)$  является характеристическим полиномом  $A(z)$  для замкнутой, а знаменатель  $C(z)$  – характеристическим полиномом для разомкнутой системы. Эти полиномы имеют один и тот же порядок  $n$ , так как при замыкании отрицательной обратной связи порядок системы не меняется.

Полагая  $z = e^{j\omega T_0}$ , будем изменять переменную  $\omega$  в диапазоне  $[0; \pi/T_0]$ . При этом будем рассматривать изменение аргумента для  $N^*(j\omega)$ :

$$\Delta \arg N^*(j\omega) = \Delta \arg A^*(j\omega) - \Delta \arg C^*(j\omega). \quad (4.14)$$

Если полиномы  $C(z)$  и  $A(z)$  имеют, соответственно,  $r$  и  $m$  неустойчивых (с модулем больше единицы) корней, а все остальные – внутри единичного круга, то согласно принципу аргумента (4.11) и (4.14) для  $\Delta \arg N^*(j\omega)$  можно получить:

$$\Delta \arg N^*(j\omega) = \pi(n - m) - \pi(n - r) = \pi(r - m). \quad (4.15)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Тогда необходимое и достаточное условие устойчивости *замкнутой* системы  $m=0$  эквивалентно запишется в следующем виде [3, 6, 7]:

$$\Delta \arg N^*(j\omega) = \pi r = 2\pi \frac{r}{2}. \quad (4.16)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$$

Так как в соответствии с (4.13) *частотная передаточная функция* разомкнутой системы  $W^*(j\omega) = N^*(j\omega) - 1$ , то условие устойчивости замкнутой системы (4.16) можно переформулировать относительно  $W^*(j\omega)$  и придать ему более наглядный геометрический смысл. Предварительно отметим два очевидных факта:

а) изменению  $\Delta \arg N^*(j\omega) = 2\pi$  соответствует один полный оборот (охват) годографом начала координат комплексной плоскости;

б) число оборотов (охватов) годографом  $N^*(j\omega)$  начала координат комплексной плоскости соответствует такому же числу охватов годографом  $W^*(j\omega)$  точки  $(-1, j0)$  в том же направлении.

Тогда критерий устойчивости Найквиста можно сформулировать следующим образом. Для того чтобы замкнутая ДСУ, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая  $r$  полюсов вне единичного круга, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф  $W^*(j\omega)$  (годограф Найквиста) при возрастании частоты  $\omega$  от 0 до  $\frac{\pi}{T_0}$  охватывал точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении  $r/2$  раз.

Если годограф при некотором значении  $\omega$  проходит через точку  $(-1, j0)$ , то замкнутая система либо неустойчива, либо находится на колебательной границе устойчивости. В этом случае необходимо провести дополнительное исследование путем деформации годографа в окрестности этой «критической точки», аналогично тому, как это было сделано с годографом Михайлова.

В простом, но часто встречающемся случае, разомкнутая система может быть устойчивой ( $r=0$ ). Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста не охватывал точку  $(-1, j0)$ .

Таким образом, критерий Найквиста для дискретных и непрерывных линейных систем управления формулируется совершенно одинаково. Некоторое отличие состоит в том, что частота  $\omega$  изменяется в ограниченном диапазоне от 0 до значения  $\frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0}$ . При

этом годограф стремится, за редким исключением, не к началу координат, а к точке  $W(-1)$  на вещественной оси. Если  $W(z)$  имеет полюсы на единичной окружности, то на некоторой частоте  $\omega_i$  годограф будет иметь бесконечный разрыв, поэтому подсчет числа охватов годографом «критической» точки и их направлений становятся неопределенными. Чтобы применять критерий устойчивости в обычном виде, для точек разрыва годограф необходимо дополнить условной (не расчетной!) ветвью. Выясним направление разрыва и способ условного дополнения годографа Найквиста для практически важного частного случая, когда такой разрыв будет на частоте  $\omega=0$ , что соответствует положительному вещественному полюсу  $z_i=1$  с некоторым коэффициентом кратности  $\nu$ .

Для ДСУ с порядком астатизма  $\nu$  передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена в виде  $W(z)=W_0(z)(z-1)^{-\nu}$ , где  $W_0(z)$  – сомножитель, не имеющий полюсов на единичной окружности. Полагая, что при малых значениях  $\omega \approx 0$  и  $z = e^{j\omega T_0} \approx 1 + j\omega T_0$ , получим приближенное выражение для частотной передаточной функции  $W^*(j\omega) \approx W_0^*(j\omega)(j\omega T_0)^{-\nu} \approx W_0(1)(j\omega T_0)^{-\nu}$ .

Отсюда следует, что при  $\omega=0$  годограф Найквиста для четных порядков астатизма  $\nu$  будет иметь бесконечный разрыв в горизонтальном направлении, а для нечетных  $\nu$  – в вертикальном направлении. При этом необходимо учитывать также знак сомножителя  $W_0(1)$ . Так, например, для  $\nu=1$  и  $W_0(1)<0$  разрыв будет в направлении «вверх», а для  $\nu=2$  и  $W_0(1)>0$  – в направлении «влево».

Для того, чтобы выяснить вид и направление условного дополнения годографа на частоте  $\omega=0$ , будем вещественный единичный полюс  $z_i=1$  астатической ДСУ считать пре-

делом положительного вещественного полюса, расположенного внутри единичного круга, т.е.  $z_i = 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)$ .

Тогда выражение для передаточной функции разомкнутой системы с астатизмом  $\nu$ -го порядка можно записать в виде

$$W(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_0(z)}{(z - 1 + \varepsilon)^\nu} \quad (4.17)$$

Подставляя сюда, как и ранее,  $z = e^{j\omega T_0} \approx 1 + j\omega T_0$  (это справедливо при  $\omega T_0 \ll 1$ ) получим *приближенное* выражение для  $W^*(j\omega)$ :

$$W^*(j\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_0(e^{j\omega T_0})}{(j\omega T_0 + \varepsilon)^\nu} \approx W_0(e^{j\omega T_0}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{j\omega \frac{T_0}{\varepsilon} + 1} \right)^\nu \quad (4.18)$$

Поскольку  $W_0(e^{j\omega T_0})$  не имеет разрывов при  $\omega=0$ , то *вид дополнительной части* годографа  $W^*(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до 0+ (для точки разрыва) определяется множителем

$W_x^\nu(j\omega) = \left( \frac{K_x}{1 + j\omega T_x} \right)^\nu$ . Здесь  $W_x(j\omega)$  представляет собой частотную передаточную

функцию устойчивого апериодического звена с постоянной времени  $T_x = \frac{T_0}{\varepsilon}$  и коэффи-

циентом передачи  $K_x = \frac{1}{\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Амплитудная и фазовая частотные характеристики

такого звена описываются формулами

$$M_a(\omega) = \left( \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2 T_0^2} \right)^{-1}, \quad \varphi_a(\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\omega \frac{T_0}{\varepsilon}\right) \quad (4.19)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  эти характеристики приближаются к частотным характеристикам интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_u(p) = \frac{1}{pT_0}$ .

Поскольку из (4.19) следует, что  $\varphi_a(0)=0$ , то при *таком* рассмотрении можно считать, что для интегрирующего звена  $\varphi_u(0)=0$ , а  $\varphi_u(0+) = -\pi/2$ . Иначе говоря, на частоте  $\omega=0$  происходит «скачок» фазовой характеристики интегратора от нуля до  $-\pi/2$ , а ордината АЧХ при этом принимает бесконечное значение.

Тогда в соответствии с (4.18) при изменении частоты  $\omega$  от значения 0 до значения 0+ (точка разрыва) вектор  $W(1)$ , увеличенный по величине в бесконечное число раз, поворачивается на угол, равный  $-\nu \frac{\pi}{2}$  (по часовой стрелке). Это соответствует *условному* до-

полнению годографа Найквиста дугой бесконечного радиуса с угловым размером  $-\nu \frac{\pi}{2}$ .

Такая дуга условно изображается пунктирной линией. Она «начинается» на вещественной оси справа от начала координат, если  $W_0(1) > 0$ , и слева от него, если  $W_0(1) < 0$ .

Типовые случаи дополнения на бесконечности основной (расчетной) ветви годографа Найквиста для систем, имеющих *первый* и *второй* порядок астатизма, показаны, соответственно, на рис. 4.2 и рис. 4.3.



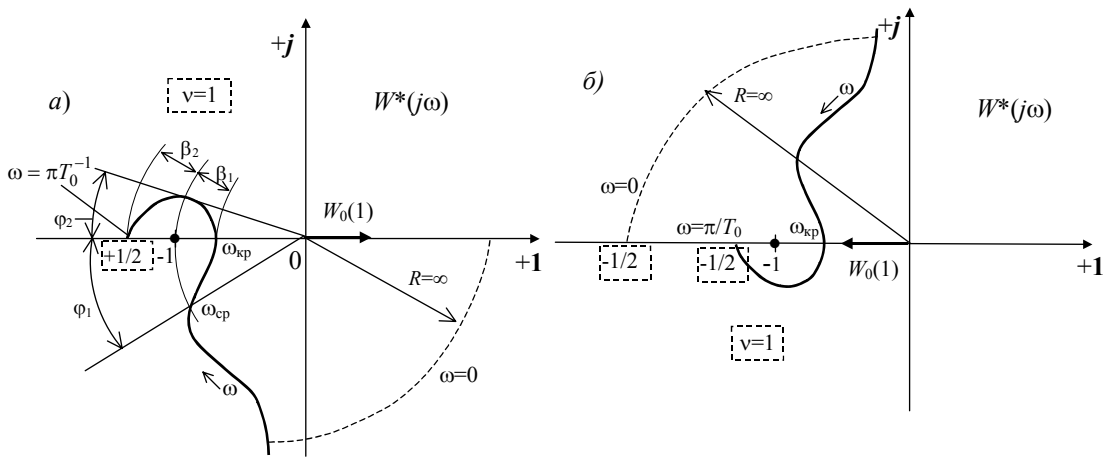


Рис. 4.2. Дополнение годографа на бесконечности при  $v=1$

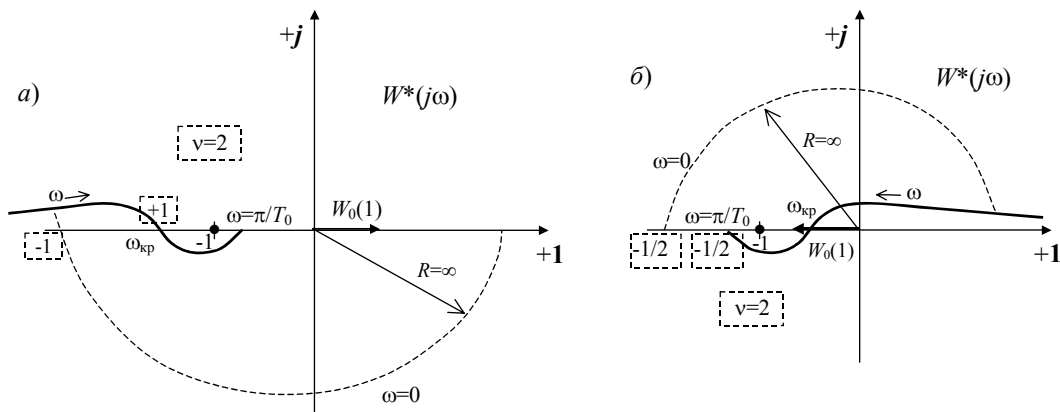


Рис. 4.3. Дополнение годографа на бесконечности при  $v=2$

После нанесения дополнения (пунктирная линия), критерий устойчивости применяется обычным образом. В тех случаях, когда годограф Найквиста имеет сложную форму, для определения числа охватов им «критической точки» (с учетом дополнения!) удобно пользоваться правилом переходов Цыпкина. Для этого размечаются общие точки годографа и луча, исходящего из точки  $(-1, j0)$  влево. Правило разметки этих точек показано на рис. 4.5.

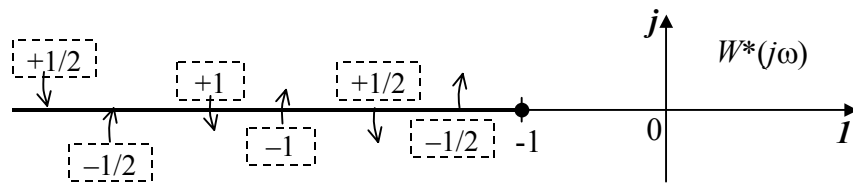


Рис. 4.4. Правило переходов Цыпкина для годографа Найквиста

С учетом этого правила, количество охватов  $N_{\text{охв}}$  годографом «критической» точки будет равно разности числа положительных  $N^+$  и числа отрицательных  $N^-$  переходов:  $N_{\text{охв}} = N^+ - N^-$ . Результаты подсчета переходов и охватов для годографов, изображенных на рис. 4.2 и 4.3 приведены в табл. 4.2.

Далее, сравнивая число охватов  $N_{\text{охв}}$  с половиной числа неустойчивых полюсов разомкнутой системы  $r/2$ , применяют критерий Найквиста для определения устойчивости замкнутой ДСУ. Так, например, годограф Найквиста, приведенный на рис. 4.2, а) соответствует устойчивой замкнутой ДСУ только в том случае, когда  $r=1$ , а годограф, изображенный на рис. 4.3, а) соответствует устойчивой ДСУ только при  $r=0$ .

Подсчет переходов и охватов для годографа Найквиста

Номер рисунка	Число положительных переходов $N^+$	Число отрицательных переходов $N^-$	Количество охватов точки $(-1, j0)$ $N_{\text{охв}}$
4.2, а	1/2	0	1/2
4.2, б	0	1	-1
4.3, а	1	1	0
4.3, б	0	1	-1

*Замечание 1.* Если предварительно получена преобразованная с помощью дробно-линейной подстановки передаточная функция *разомкнутой* системы  $W(u)$ , то для исследования устойчивости можно формально применять критерий Найквиста точно так же, как для непрерывных систем. При этом обычно используют логарифмические псевдочастотные характеристики  $L_w(\lambda)$  и  $\varphi_w(\lambda)$ , относительно которых критерий Найквиста формулируется следующим образом. Для того чтобы *замкнутая* ДСУ, неустойчивая в *разомкнутом* состоянии и имеющая  $r$  полюсов  $W(u)$  в правой полуплоскости, была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы в *диапазонах положительности* псевдочастотной ЛАХ разность между числом положительных  $N^+$  и отрицательных  $N^-$  переходов графиком фазовой характеристики  $\varphi_w(\lambda)$  «критических» уровней  $-\pi \pm 2k\pi$  равнялась  $r/2$ . Правило переходов Цыпкина для фазовой характеристики иллюстрируется на рис. 4.5.

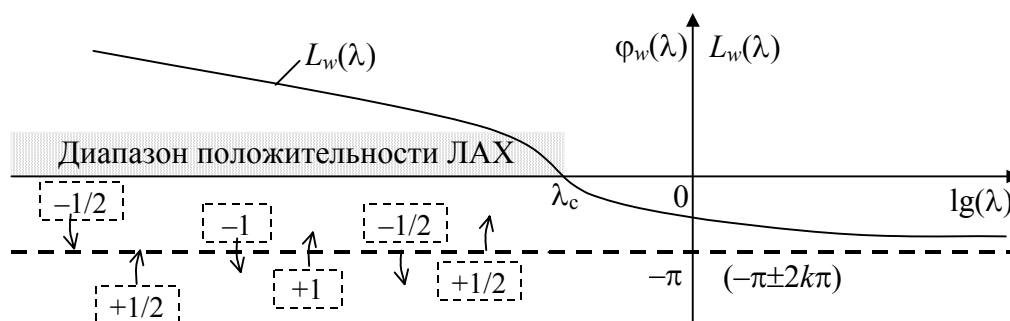


Рис. 4.5. Правило переходов Цыпкина для фазовой характеристики

Особенностью логарифмических псевдочастотных характеристик является их асимптотическое поведение при  $\lambda \rightarrow \infty$ : самая высокочастотная асимптота ЛАХ горизонтальна, а ФЧХ асимптотически стремится к уровню, кратному  $-\pi$ .

*Замечание 2.* Важнейшей особенностью частотного критерия Найквиста является его *конструктивность*. Он позволяет не только определить факт устойчивости ДСУ, но и оценить, насколько она близка к *границе устойчивости* и что следует предпринять (в терминах частотных характеристик), чтобы увеличить «расстояние» системы от этой границы или стабилизировать ее (сделать устойчивой). Поэтому без преувеличения можно сказать, этот критерий фактически является основой частотных методов синтеза ДСУ.

Поскольку критерий имеет геометрический смысл, то любая количественная мера удаленности годографа от «критической» точки может быть использована для характеристики (оценки) запаса устойчивости ДСУ. Наиболее удобной оказалась оценка запаса

устойчивости с помощью величин: а) углового и б) линейного расстояния (по вещественной оси) от годографа до точки  $(-1, j0)$ . При этом угловое расстояние  $\varphi_3$  называют запасом устойчивости по фазе, а линейное расстояние  $\beta$  – запасом устойчивости по коэффициенту усиления (по амплитуде). Для годографов сложной формы таких «расстояний» может быть больше двух.

На рис. 4.2, а) поясняется смысл этих величин в предположении, что  $r = 1$ . Тогда устойчивая ДСУ будет иметь запасы устойчивости, как на увеличение, так и на уменьшение: по коэффициенту усиления  $\beta_1, \beta_2$  и по фазе  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

По логарифмическим псевдочастотным характеристикам разомкнутой ДСУ  $L_w(\lambda)$  и  $\varphi_w(\lambda)$  запасы устойчивости определяются так же как и для непрерывных систем. Запас по фазе  $\varphi_{31}$  равен «избытку фазы» на псевдочастоте среза  $\lambda_{cp}$ , т.е.  $\varphi_{31} = \pi + \varphi_w(\lambda_{cp})$ . Запас на увеличение коэффициента усиления  $L_{31} = |L_w(\lambda_{кр})|$ , где  $\lambda_{кр}$  – «критическая» частота, на которой график фазовой характеристики достигает критического уровня  $-\pi$ . При этом  $L_{31} = -20\lg(1-\beta_1)$ . Запас устойчивости на уменьшение коэффициента определяется аналогично и тогда  $L_{32} = 20\lg(1+\beta_2)$ .

Задачу обеспечения устойчивости ДСУ часто называют *стабилизацией*. В некоторых случаях удается стабилизировать систему только изменением ее параметров в допустимых пределах, но чаще для этой цели в замкнутый контур системы включаются *дополнительные* динамические звенья, обеспечивающие ей не только устойчивость, но и необходимые значения запасов устойчивости. Эти звенья деформируют (корректируют) годограф Найквиста в окрестности точки "минус единица" таким образом, чтобы он проходил на достаточном удалении от нее при соблюдении условий частотного критерия устойчивости. Такие звенья принято называть корректирующими. При этом возможны варианты стабилизации как с помощью «фазопережающих», так и с помощью «фазоотстающих» корректирующих звеньев. Первые из них в требуемом диапазоне частот вносят положительные, а вторые – отрицательные фазовые сдвиги. В составе ДСУ такие звенья могут быть как дискретными, так и непрерывными. Дискретные звенья реализуются с помощью устройств дискретного действия (УДД), а непрерывные – традиционными непрерывными устройствами в составе непрерывной части системы.

При решении задачи стабилизации системы полезным является построение областей устойчивости в плоскости двух параметров, а в случае одного параметра – отыскание *интервалов* устойчивости и их граничных (критических) значений. Следует заметить, что получить аналитические выражения для границ областей (или интервалов) устойчивости дискретных систем удастся только в простейших случаях. Расчет границ устойчивости численным методом, основанным на идеях *D*-разбиения для ДСУ не нашел применения ввиду очень сложной зависимости коэффициентов характеристического уравнения от параметров.

Обычно эта задача решается «сеточным» методом, суть которого состоит в проверке выполнения условий устойчивости системы по любому критерию устойчивости в конечном, но достаточно большом, числе точек плоскости параметров (в узлах сетки). Множество узлов, для которых ДСУ оказалась устойчивой, дает представление о конфигурации области устойчивости в пределах исследуемого прямоугольника на плоскости варьируемых параметров.

Рассмотрим простой пример на построение области устойчивости в плоскости двух параметров с применением алгебраического коэффициентного критерия.

**Пример 4.1.** Получить область устойчивости в плоскости параметров «период дискретности  $T_0$  – коэффициент усиления  $K$ », если передаточная функция разомкнутой ДСУ имеет вид  $W(z) = \frac{KT_0}{z-1}$ .

**Решение.** Запишем характеристический полином замкнутой системы в следующем виде:  $A(z) = KT_0 - 1 + z = a_0 + a_1 z$ , где  $a_0 = KT_0 - 1$ ;  $a_1 = 1$ . Как было показано ранее, для системы первого порядка необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными и имеют вид неравенств (4.4):  $a_0 + a_1 > 0$  и  $a_0 - a_1 < 0$ . В данном примере они запишутся следующим образом: а)  $(KT_0 - 1) + 1 > 0$  и б)  $(KT_0 - 1) - 1 < 0$ , т.е.  $KT_0 > 0$  и  $KT_0 < 2$ . Поскольку период дискретности  $T_0$  по физическому смыслу не может принимать отрицательных значений, то областью устойчивости будет часть первого квадранта плоскости  $(T_0, K)$ , ограниченная сверху гиперболой с уравнением  $KT_0 = 2$ .

Тот же результат можно получить алгебраическим методом с помощью преобразованного характеристического полинома  $A_1(u)$ . Для этого сначала запишем преобразованную передаточную функцию  $W(u)$ , получаемую из  $W(z)$  заменой переменной  $z = \frac{2 + uT_0}{2 - uT_0}$

(см. пример 3.3): 
$$W(u) = \frac{KT_0(2 - uT_0)}{2uT_0}.$$

Тогда преобразованный характеристический полином запишется в виде  $A_1(u) = KT_0(2 - uT_0) + 2uT_0 = 2KT_0 + T_0(2 - KT_0)u$ , а условие устойчивости для системы первого порядка будет совпадать с требованием положительности его коэффициентов: а)  $2KT_0 > 0$  и б)  $T_0(2 - KT_0) > 0$ .

Одновременное выполнение этих неравенств при условии положительности значений  $T_0$  возможно только в том случае, когда  $0 < KT_0 < 2$ . Вид области устойчивости для рассматриваемого примера приведен на рис. 4.6. Необходимо заметить, что дробно-линейная подстановка рассматриваемого вида может быть использована только в предположении положительности периода дискретности по времени  $T_0$ . Это условие не является существенным ограничением, так как отрицательные значения  $T_0$  не имеют физического смысла.

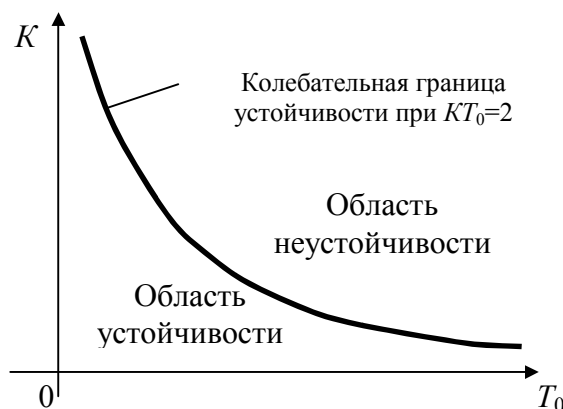


Рис. 4.6. Область устойчивости к примеру 4.1

**Пример 4.2.** Получить условия устойчивости для цифровой ДСУ, если передаточные функции ДЗ ПНЧ и последовательного цифрового корректирующего устройства имеют вид:  $W_0(z) = \frac{K_и T_0}{z-1}$ ;  $W_{цкц}(z) = \frac{K_1}{2} \frac{z(T_0 + 2\tau) + T_0 - 2\tau}{z-1}$ .

*Решение.* Переходя к  $D_u$ -преобразованиям, получим *преобразованные* передаточные функции дискретных звеньев  $W_0(u)$ ,  $W_{цкц}(u)$  и характеристический полином замкнутой системы  $A_1(u)$ :

$$W_0(u) = \frac{K_{и}(1 - uT_0/2)}{u}; \quad W_{цкц}(u) = \frac{K_1(1 + u\tau)}{u};$$

$$A_1(u) = K_1K_{и} + K_1K_{и}(\tau - T_0/2)u + (1 - K_1K_{и}\frac{\tau T_0}{2})u^2.$$

Из требования положительности коэффициентов  $A_1(u)$  следуют необходимые и достаточные условия устойчивости цифровой ДСУ *второго* порядка при  $T_0 > 0$ :

$$a) K_1K_{и} > 0; \quad b) (\tau - T_0/2) > 0; \quad c) (1 - K_1K_{и}\frac{\tau T_0}{2}) > 0.$$

## 5. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДСУ

В линейных ДСУ реакция на внешнее воздействие по любой координате всегда имеет *две* составляющих: а) переходную и б) вынужденную. При этом процесс управления в системе длится во времени и не может быть произвольным. Прежде всего, он должен быть устойчивым, когда его переходная составляющая затухает. В противном случае ДСУ *в принципе* не сможет обеспечить выполнение поставленной цели управления – изменение управляемой переменной во времени в соответствии с предписанным законом. Но и в случае устойчивой ДСУ условия конкретного применения всегда предъявляют ряд требований (ограничений) как к переходной, так и к установившейся компоненте процесса управления. Совокупность таких требований составляет содержание понятия *качества* ДСУ. В общепринятом смысле, качество – это свойство соответствовать какому-либо образцу, эталону, идеальному варианту. Для систем автоматического управления (регулирования) таким эталоном является *идеальная система*, которая точно воспроизводит требуемый закон изменения управляемой переменной, несмотря на наличие возмущений и других нежелательных факторов. Оценки качества процесса управления является одной из главных задач анализа в ТАУ. Она одинаково важна как для непрерывных, так и для дискретных систем управления [2, 6, 7].

### 5.1. Оценки качества процессов управления в линейных ДСУ

В том случае, когда ДСУ реально существует, то дать объективную характеристику качества ее функционирования на *некотором* интервале времени можно по результатам наблюдения (измерения) сигнала ошибки. По графику ошибки можно определить некоторые числовые характеристики (функционалы, *показатели качества*), например, наибольшее значение модуля ошибки, среднее или среднеквадратическое ее значение и т.д. Величины этих показателей позволяют оценить степень успешности процесса управления, а значит и качество ДСУ.

Для других интервалов наблюдения за процессом функционирования *реальной*, т.е. физически существующей ДСУ внешние воздействия будут, вообще говоря, другими и значения показателей качества изменятся. Тогда можно найти их усредненные (по интервалам) значения, и уже по ним оценивать качество функционирования ДСУ.

На этапе *проектирования* ДСУ конкретный вид внешних воздействий, а значит и график изменения ошибки, заранее (априорно) точно неизвестен. Поэтому для *сравнения* различных вариантов проектируемой системы принято характеризовать качество процес-

са управления по её реакциям на некоторые определенные виды воздействий. Но в этом случае качество установившихся (стационарных) и переходных (нестационарных) процессов в линейных системах приходится оценивать отдельно, рассматривая, соответственно, типовые, и наиболее неблагоприятные виды внешних воздействий. Для этой цели вводятся в рассмотрение *показатели качества переходных процессов* (ПК ПП) и *показатели качества установившихся процессов* (ПК УП).

## 5.2. Качество переходных процессов в ДСУ

Для *сравнительной* оценки качества работы ДСУ в переходных режимах рассматривают её реакцию *при нулевых начальных условиях* на внезапное (ступенчатое) изменение *задающего* сигнала. Величину ступеньки для линейных систем можно принять *равной единице* и тогда эта реакция будет являться *переходной функцией* системы. Такой задающий сигнал является *наиболее неблагоприятным*, т.к. при этом ошибка регулирования (рассогласование) в начальный момент времени будет наибольшей, и все свойства и особенности системы по её устранению проявляются с необходимой полнотой.

В современных ДСУ период дискретности  $T_0$  обычно выбирается достаточно малым исходя из требований запасов устойчивости и точности. Тогда становится возможным (за исключением специальных случаев, когда в состав объекта управления входят колебательные слабо демпфированные звенья) ограничиться рассмотрением выхода системы только в дискретные равноотстоящие на  $T_0$  моменты времени. Параметры графика этой реакции, т.е. переходной функции  $h[k]$ , называют *прямыми* показателями качества переходного процесса (ПК ПП) [6, 7]. Основными из них, как и для непрерывных систем, являются а) *перерегулирование*  $\sigma(\%)$  и б) *время регулирования* (время переходного процесса)  $t_p$ .

Перерегулирование  $\sigma$  определяется как *относительная* величина превышения первого максимума переходной функции над уровнем её установившегося значения  $h[\infty]$  и характеризует склонность системы к колебаниям в переходном процессе (т.е. запас устойчивости системы относительно колебательной границы).

Время регулирования  $t_p$  определяется как минимальный промежуток времени, за который переходная функция полностью входит в *пятипроцентную* зону от уровня установившегося значения. Этот показатель характеризует свойство системы реагировать на быстрые изменения входа, т.е. её быстродействие.

Прямые показатели качества переходных процессов имеют простой и наглядный физический смысл, но зависимость их от параметров системы является очень сложной и плохо формализуемой. Причем для ДСУ эта зависимость будет существенно сложнее, чем для непрерывных систем. Поэтому при анализе и синтезе ДСУ чаще применяют другие, *косвенные* показатели, которые характеризуют аналогичные свойства системы, но более просты в определении и использовании. К таким показателям качества относятся следующие [6, 7]:

А. Параметры частотных (псевдочастотных) характеристик замкнутой или разомкнутой системы (частотные показатели). Более строго – это функционалы точечного вида для соответствующих функций частоты  $\omega$  или псевдочастоты  $\lambda$ .

Б. Параметры области расположения (локализации) характеристических корней системы (корневые показатели).

В. Функционалы «суммарного» вида от переходной составляющей ошибки при ступенчатом единичном входном сигнале (дискретные аналоги интегральных показателей).

А. *Частотные* ПК ПП формально не отличаются от таких же показателей для непрерывных систем, так как физический смысл и вид частотных характеристик для дискретных и непрерывных систем один и тот же. Отличие состоит лишь в диапазоне изменения частоты  $\omega$ . Среди них чаще других используют а) параметры графика АЧХ замкнутой системы и б) параметры графиков амплитудной и фазовой частотных характеристик *разомкнутого* контура системы в структуре с единичной отрицательной обратной связью. Рассмотрим их более подробно:

а) параметры графика амплитудно-частотной характеристики (АЧХ)  $M^*(\omega)$  для *замкнутой* системы:

- *показатель колебательности*  $M$ , равный отношению величины резонансного пика АЧХ к ее начальному значению на частоте  $\omega=0$ . Он характеризует запас устойчивости системы относительно колебательной границы. Чем больше  $M$ , тем меньше запас устойчивости. Рекомендуемые значения для *верхней* границы показателя  $M$  принадлежат интервалу  $1,3 \div 1,6$ .
- *частота резонансного пика*  $\omega_p$  и *граничная частота* полосы пропускания  $\omega_{пр}$  для АЧХ. При этом полоса пропускания определяется на уровне  $0,707M^*(0)$ . Обе эти частоты характеризуют свойство быстродействия системы.

б) *параметры графиков частотных характеристик разомкнутой системы*. В соответствии с формулой замыкания для структуры с единичной обратной связью, вид  $M^*(\omega)$  определяется только частотными свойствами разомкнутого контура (в основном, в окрестности частоты среза). Поэтому для сравнительной оценки качества переходных процессов в ДСУ можно использовать следующие параметры графиков ЧХ *разомкнутой* системы:

- запасы устойчивости по коэффициенту усиления (по амплитуде)  $\beta_1, \beta_2$ ;
- запас устойчивости по фазе  $\varphi_3$ ;
- частота среза  $\omega_{ср}$ .

При этом частота  $\omega_{ср}$  характеризует быстродействие, а  $\varphi_3, \beta_1$  и  $\beta_2$  – склонность системы к колебаниям в переходном процессе. Если используются логарифмические псевдо-частотные характеристики, то вместо частоты среза  $\omega_{ср}$  должна рассматриваться псевдо-частота среза  $\lambda_{ср}$ , а вместо  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – запасы по амплитуде  $L_{31}$  и  $L_{32}$ . Рекомендуемые значения для запасов устойчивости должны быть *не менее*  $30^\circ$  по фазе и  $10$  дБ по амплитуде.

Б. *Корневые* ПК ПП для ДСУ можно формально определить так же, как для непрерывных систем, если рассматривать расположение характеристических корней системы не на плоскости  $z$ -переменной, а на плоскости комплексной переменной  $p$ . Сначала отметим некоторые особенности такого перехода.

Пусть известно характеристическое уравнение дискретной системы  $n$ -го порядка  $A(z)=0$  и его корни  $z_i$ . Тогда переходную (свободную) составляющую ошибки в предположении *некратных* характеристических корней  $z_i$  можно записать в следующем виде:

$$e_n[k] = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k. \quad (5.1)$$

С учетом того, что  $z = e^{pT_0}$ , запишем характеристическое уравнение системы в виде  $A(e^{pT_0}) = A^*(p) = 0$ . Поскольку  $z = e^{pT_0}$  – это периодическая функция переменной  $p$  с периодом  $j\omega_0 = j2\pi/T_0$  в направлении мнимой оси, то «квазиполином»  $A^*(p)$  также будет периодической функцией с тем же периодом. Поэтому корни для  $A^*(p)$  будут распола-

гаться периодически в *горизонтальных* полосах шириной  $\omega_0$ . Полоса, содержащая начало координат называется *главной*, а остальные полосы – *дополнительные*. Корню  $z_i$  соответствует не только корень  $p_i$  в основной полосе, но и корень  $p_{ir}$  в каждой дополнительной полосе с номером  $r$ :

$$p_{ir} = p_i + jr\omega_0; \quad r=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2)$$

Вещественные части всех этих корней одинаковы, а мнимые отличаются на величины, кратные  $\omega_0$ . Для исследования свойств ДСУ достаточно рассматривать только *главный* период и соответствующую ему *главную* полосу с номером  $r=0$ , для которой  $|\operatorname{Im} p| \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T_0}$ .

Пусть  $p_i = \alpha_i + j\beta_i$  – характеристический корень в главной полосе, соответствующий корню  $z_i = \exp(p_i T_0)$ . Найдем выражения, связывающие  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  с модулем и аргументом корня  $z_i$ . Для этого запишем следующие очевидные соотношения:

$$z_i = |z_i| e^{j\varphi_i} = e^{(\alpha_i + j\beta_i)T_0} = e^{\alpha_i T_0} e^{j\beta_i T_0} \quad (5.3)$$

Тогда  $|z_i| = e^{\alpha_i T_0}$ ;  $\varphi_i = \beta_i T_0$ , откуда  $\alpha_i = \frac{\ln |z_i|}{T_0}$ ;  $\beta_i = \frac{\varphi_i}{T_0}$ .

Из этих формул следует, что корень  $z_i$  может быть различного типа:

- 1)  $\alpha_i < 0$ , если  $|z_i| < 1$  – устойчивый корень;
- 2)  $p_i = \alpha_i$ , если  $\varphi_i = 0$  – вещественный положительный корень,  $\varphi_i = 0$ ;
- 3)  $p_i = 0$ , если  $z_i = 1$  – положительный единичный корень;
- 4)  $p_i = \pm j\pi/T_0$ , если  $z_i = -1$  – отрицательный единичный корень;
- 5)  $p_i = \alpha_i \pm j\pi/T_0$ , если  $z_i = -a$  – вещественный отрицательный корень,  $\varphi_i = \pm\pi$ ;
- 6)  $p_i = -\infty$ , если  $z_i = 0$ , – корень в начале координат;
- 7)  $p_i = j\beta_i$ , если  $|z_i| = 1$  – корень на единичной окружности,  $\varphi_i \neq 0$ .

Основными корневыми ПК ПП, как и для непрерывных систем, являются следующие параметры области локализации (расположения) характеристических корней ДСУ в *левой* части главной полосы в плоскости  $p$ :

а)  $\eta$  – наименьшее *расстояние* от корней  $p_i$  до мнимой оси;

б)  $\mu = \operatorname{tg} \psi$ , где  $2\psi$  – наименьший угол при вершине углового сектора, содержащего все характеристические корни  $p_i$ .

Параметр  $\eta$  характеризует время затухания составляющей переходного процесса, соответствующей *самому близкому* к мнимой оси устойчивому корню  $p_i$ . Этому корню в  $z$ -плоскости соответствует устойчивый корень  $z_i = \exp(p_i T_0)$  с *наибольшим* значением модуля, а сама эта парциальная составляющая в (5.1) имеет следующий вид:  $e_{\text{ни}}[k] = C_i e^{p_i T_0 k} = e^{(-\eta + j\beta_i)T_0 k} = e^{-\eta T_0 k} e^{j\beta_i T_0 k} = C_i z_i^k$ . Отсюда очевидно, что от параметра  $\eta$  зависит лишь время затухания процесса. Поэтому он является показателем *быстродействия*, хотя часто его называют *степенью устойчивости*. Зная величину *коэффициента быстродействия*  $\eta$  можно *приближенно* оценить время затухания до *пятипроцентного* уровня от начального значения переходной составляющей процесса, используя известную из теории непрерывных систем приближенную оценочную формулу. Для ДСУ она будет иметь следующий вид:  $t_p \approx \frac{3}{\eta} = \frac{3T_0}{\min_i |\ln |z_i||} = \max_i \frac{3T_0}{|\ln |z_i||}$ .



Параметр  $\mu = \operatorname{tg}(\psi) = \max_i \left| \frac{\varphi_i}{\ln |z_i|} \right|$  называют *коэффициентом колебательности* (не путать с показателем колебательности  $M$ ). Он характеризует запас устойчивости ДСУ относительно колебательной границы. Если все корни  $p_i$  вещественные (запас устойчивости максимальный), то  $\mu = 0$ , а если среди  $p_i$  есть пара *мнимых* корней, то  $\mu = \infty$  и ДСУ находится на границе устойчивости. Для грубой оценки величины перерегулирования по коэффициенту колебательности  $\mu$  можно воспользоваться приближенной формулой

$\sigma(\%) \approx 100e^{-\frac{\pi}{\mu}}$ . Тогда при  $\mu=0$  перерегулирование  $\sigma=0$ , а для  $\mu=\infty$  величина  $\sigma=100\%$ .

С. *Дискретные аналоги интегральных ПК ПП для ДСУ*. Использование нескольких показателей качества переходных процессов (ПК ПП), часть из которых характеризует свойство быстродействия, а другие – запас устойчивости, неудобно для сравнительного анализа при выборе вариантов параметров регулятора в составе ДСУ. С этой точки зрения предпочтительнее использовать скалярный показатель (функционал качества), который бы одним числом позволял оценить свойства ДСУ в переходном процессе. В роли таких ПК ПП могут применяться суммы ординат некоторой функции от переходной составляющей ошибки  $e_n[k]$  при ступенчатом входном сигнале.

В том случае, когда все ординаты  $e_n[k] = h[\infty] - h[k]$  *положительны*, то для этой цели вполне пригодна *линейная* оценка  $J_1$ . Но если переходная составляющая ошибки  $e_n[k]$  является знакопеременно функцией, то более объективной является *квадратичная* оценка  $J_2$ . Обе эти оценки являются дискретными аналогами интегральных оценок качества переходных процессов в непрерывных системах и определяются по следующим формулам [7]:

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e_n[k]; \quad J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} e_n^2[k]. \quad (5.4)$$

Иногда применяют обобщенную (улучшенную) квадратичную оценку  $J_3$ , учитывающую не только значения ошибки  $e_n[k]$ , но и значения ординат первой разности от нее:

$$J_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \{e_n^2[k] + (\tau \Delta e_n[k-1])^2\}. \quad (5.5)$$

Обычно параметры регулятора выбирают таким образом, чтобы обеспечить *минимальные* значения таких оценок. Для нахождения аналитических зависимостей этих оценок от параметров системы с передаточной функцией  $\Phi(z)$  удобно воспользоваться  $Z$ -изображением для  $e_n[k]$ :

$$E_n(z) = Z\{e_n[k]\} = Z\{h[\infty] - h[k]\} = \{\Phi(1) - \Phi(z)\} / (1 - z^{-1}). \quad (5.6)$$

Это всегда будет дробно рациональное выражение от  $z$  в виде отношения полиномов  $C(z) = c_0 + c_1 z^1 + \dots + c_{n-1} z^{n-1}$  и  $D(z) = d_0 + d_1 z^1 + \dots + d_n z^n$ . Тогда можно применить следующие формулы для  $J_1$  и  $J_2$ :

$$J_1 = E_n(1); \quad n=1: J_2 = \frac{c_0^2}{d_1^2 - d_0^2}; \quad (5.7)$$

$$n=2: J_2 = \frac{(c_0^2 + c_1^2)d_2(d_0 + d_2) - 2c_0c_1d_2d_1}{[(d_2^2 - d_0^2)(d_0 + d_2) - (d_1d_2 - d_0d_1)d_1]d_2}. \quad (5.8)$$

Формула для  $J_1$  справедлива при любом  $n$  и следует непосредственно из выражения, определяющего  $Z$ -преобразование (в форме ряда!) для  $e_n[k]$  при подстановке в него значения  $z=1$ , а выражения для  $J_2$  при *конкретных* значениях  $n=1$  и  $n=2$  получены с помощью формулы Парсеваля и «стандартного» табличного интеграла. При  $n>2$  выражения для  $J_2$  будут иметь существенно более сложный вид.

Значение  $J_2$  можно также определять по формулам табличного интеграла, применяемого для аналогичных целей в теории непрерывных систем управления при вычислении интегральных квадратичных оценок. Для этого следует воспользоваться  $D_w$ -изображением переходной составляющей ошибки  $E_n(w)$ , используя дробно-линейную подстановку  $z = \frac{1+w}{1-w}$  в выражении для  $E_n(z)$ . В общем случае формула для квадратичной суммарной оценки запишется следующим образом

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} e_n^2[k] = \frac{1}{j\pi} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{E(w)E(-w)}{(1+w)(1-w)} dw.$$

Если записать выражение  $\frac{E_n(w)}{1+w} = \frac{c_0 + c_1w + \dots + c_mw^m}{d_0 + d_1w + \dots + d_nw^n}$ , то для *заданной* величины  $n$  зависимость значения интеграла от коэффициентов числителя и знаменателя можно определить из справочной таблицы. Например, при  $n=3$  эта зависимость имеет вид

$$J_2 = \frac{c_2^2 d_0 d_3 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}.$$

При вычислении  $J_3$  дополнительно требуется еще знать  $Z$ -изображение для первой разности  $\Delta e_n[k-1] = \nabla e_n[k]$ , которое затем используется, как и в предыдущем случае, в формуле Парсеваля. Это изображение определяется формулой

$$Z\{\Delta e_n[k-1]\} = Z\{\nabla e_n[k]\} = \{\Phi(1) - \Phi(z)\}. \quad (5.9)$$

### 5.3. Качество установившихся процессов в ДСУ

Для сравнительной оценки качества работы различных вариантов ДСУ в установившемся режиме рассматривают *вынужденную* составляющую ошибки (или функционал от нее) при воздействии на вход системы *типовых* дискретных сигналов. Такими сигналами могут быть [6, 7]:

- А. Полиномиальный или степенной.
- Б. Гармонический или полигармонический.
- В. Медленно меняющийся (с ограниченными значениями первых двух производных или разностей).
- Г. Стационарный случайный процесс с типовым видом статистических характеристик (корреляционная функция, спектральная плотность и др.).

А. *Оценка точности ДСУ при полиномиальных воздействиях.* Рассматривается ДСУ с передаточной функцией по ошибке  $\Phi_e(z)$ . Типовое входное воздействие  $X[k]$  изменяется по закону  $X[k] = \sum_{i=0}^l a_i (kT_0)^i$ , где  $l$  – порядок сигнала. Для оценки точности воспроизведения такого сигнала может использоваться *ряд ошибок*, представляющий собой разло-

жение *вынужденной* составляющей ошибки  $e_b[k]$  в ряд по прямым разностям входного сигнала:

$$e_b[k] = C_0 X[k] + C_1 \Delta X[k] + C_2 \Delta^2 X[k] + \dots \quad (5.10)$$

Возможны также и другие формы записи ряда ошибок. Особенностью полиномиального воздействия является то, что разность  $l$ -го порядка является величиной *постоянной*, а все разности более высоких порядков будут тождественно равны нулю. Поэтому ряд ошибок будет конечным и содержит не более  $l+1$  слагаемых. Коэффициенты этого ряда  $C_i$  называются *коэффициентами ошибок*. Они равны коэффициентам разложения  $\Phi_e(z)$  в ряд по степеням  $(z-1)$  и вычисляются через производные различных порядков от  $\Phi_e(z)$

при  $z=1$ :  $C_i = \frac{\partial \Phi_e^i(1)}{\partial z} \frac{1}{i!}$ . Чем меньше значения  $C_i$ , тем выше точность ДСУ. Если  $C_0=0$ , то

ДСУ называется *статической*, а в противном случае – *астатической*. Порядок астатизма  $\nu$  равен *индексу* первого *не равного нулю* коэффициента ошибок. Так, например, если  $\nu=2$ , то  $C_0=C_1=0$ , а  $C_2 \neq 0$ . Закон изменения во времени *вынужденной* составляющей ошибки зависит от соотношения порядка сигнала  $l$  и порядка астатизма  $\nu$ :

$$e_b[k] = \begin{cases} 0, & \text{если } l < \nu; \\ \text{const}, & \text{если } l = \nu; \\ \text{полином порядка } l - \nu & \text{при } l > \nu. \end{cases} \quad (5.11)$$

Для структуры с единичной отрицательной обратной связью порядок астатизма  $\nu$  относительно задающего сигнала равен количеству множителей вида  $(z-1)$  в *знаменателе* передаточной функции разомкнутой системы, а первый *не равный нулю* коэффициент ошибки  $C_\nu$  равен обратной величине коэффициента усиления (добротности) разомкнутой системы. Это необходимо учитывать при синтезе ДСУ на этапе выбора коэффициента усиления и построения желаемой ЛАХ.

Обсуждая вопрос точности в установившихся режимах, полезно отметить следующий очевидный, но малоизвестный результат [7]. Вынужденная ошибка будет тождественно равна нулю, если знаменатель  $D(z)$  изображения входного сигнала  $X(z)=R(z)/D(z)$  будет являться сомножителем в составе числителя передаточной функции системы по ошибке. При этом среди полюсов ошибки  $E(z)$  не будет полюсов входного воздействия, а значит, не будет и вынужденной составляющей ошибки во временной области. Структурная схема системы при этом может быть произвольной. Фактически, такое свойство является обобщением понятия астатизма. В частности, оно справедливо для входного сигнала полиномиального вида, когда порядок сигнала  $l = \nu - 1$ . В этом случае  $z$ -изображение входного сигнала системы  $X(z) = R(z)/(z-1)^\nu$ . Тогда  $D(z) = (z-1)^\nu$  и согласно выражению (5.11) вынужденная составляющая ошибки  $e_b[k]=0$ .

Для дискретных систем управления ряд ошибок в форме (5.10) не является единственным. Возможно также разложение вынужденной составляющей ошибки в ряд по обратным разностям входного дискретного сигнала:

$$e_b[k] = C_0^\circ X[k] + C_1^\circ \nabla X[k] + C_2^\circ \nabla^2 X[k] + \dots,$$

где  $C_i^\circ$  определяются как коэффициенты разложения передаточной функции  $\Phi_e(z)$  в ряд по степеням выражения  $(1-z^{-1})$ . Из свойств  $Z$ -преобразования известно, что умножение

на такой множитель изображения  $X(z)$  соответствует применению оператора обратной разности  $\nabla$  во временной области к решетчатой функции времени  $X[k]$ . Для определения этих коэффициентов удобно в выражении для  $\Phi_e(z)$  перейти к переменной  $s = 1 - z^{-1}$ , а затем к функции  $\Phi_e(s)$  применить формулу  $C_i^* = \frac{\partial \Phi_e^i(0)}{\partial s} \frac{1}{i!}$ . Если сигнал  $X[k]$  получен из  $X(t)$  дискретизацией по времени при  $t = kT_0$ , то ряд ошибок для  $e_b[k]$  целесообразно записывать относительно *производных* этого непрерывного сигнала в следующей форме:

$$e_b[k] = C_0^* X[k] + C_1^* \dot{X}[k] + C_2^* \ddot{X}[k] + \dots,$$

где коэффициенты ошибок  $C_i^*$  определяются по формуле  $C_i^* = \frac{\partial \Phi_e^*(p)}{\partial p} \frac{1}{i!} \Big|_{p=0}$ .

Здесь  $\Phi_e^*(p) = \Phi_e(e^{pT_0})$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке, полученная из  $\Phi_e(z)$  подстановкой  $z = e^{pT_0}$ .

*А. Оценка точности ДСУ при моно- и полигармонических воздействиях.*

Предположим, что задающее воздействие изменяется во времени по закону

$$X[k] = A_x \sin(\omega_x k T_0) \text{ или } X[k] = \sum_i A_{xi} \sin(\omega_{xi} k T_0 + \varphi_{xi}). \quad (5.12)$$

Для оценки точности воспроизведения гармонического сигнала с частотой  $\omega_x$  могут применяться следующие показатели:

а) относительная величина амплитуды ошибки:

$$e_{\text{отн}} = \frac{A_e}{A_x} = |\Phi_e^*(j\omega_x)|; \quad (5.13)$$

б) коэффициенты амплитудных и фазовых искажений:

$$\delta_a = \left| \frac{A_x - A_y}{A_x} \right| = \left| 1 - \frac{A_y}{A_x} \right| = \left| 1 - |\Phi^*(j\omega_x)| \right|; \quad \delta_\varphi = |\arg \{ \Phi^*(j\omega_x) \}|. \quad (5.14)$$

В случае полигармонического сигнала такие же показатели точности можно рассматривать на заданном наборе частот  $\omega_{xi}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ .

Для структуры с единичной отрицательной обратной связью значения показателей точности  $e_{\text{отн}}$ ,  $\delta_a$  и  $\delta_\varphi$  будут определяться только частотными свойствами разомкнутой системы. Поэтому для синтеза ДСУ требования по точности целесообразно пересчитать в ограничения на частотные характеристики разомкнутой системы. Основой такого пересчета являются формулы замыкания

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{W^*(j\omega)}{1 + W^*(j\omega)} \text{ и } \Phi_e^*(j\omega) = \frac{1}{1 + W^*(j\omega)}. \quad (5.15)$$

При этом можно использовать следующие приближенные соотношения, справедливые при достаточно малых допустимых значениях  $e_{\text{отн}}$ ,  $\delta_a$  и  $\delta_\varphi$ :

$$|W(j\omega_x)| > \frac{1}{e_{\text{отн}}} \text{ и } |W(j\omega_x)| > \frac{1}{\rho_x}, \text{ где } \rho_x = \min \left( \sin(\delta_\varphi); \frac{\delta_a}{1 + \delta_a} \right). \quad (5.16)$$

Из этих неравенств следует, что требования к точности ДСУ при гармонических и полигармонических сигналах ограничивают снизу значения ординат АЧХ (или псевдо-частотных ЛАХ) *разомкнутой* системы на соответствующих частотах (или псевдо-частото-

тах). Это обстоятельство должно учитываться при синтезе ДСУ частотными методами при построении *желаемой* ПЧ ЛАХ в диапазоне частот, расположенном *левее* псевдочастоты среза  $\lambda_c$ .

*С. Оценка точности ДСУ при медленно меняющихся типовых воздействиях.*

Предполагается, что задающий сигнал  $X[k]$  получен из непрерывного сигнала  $X(t)$ , имеющего ограниченные значения скорости  $\dot{X}_{\max}$  и ускорения  $\ddot{X}_{\max}$ , выборкой дискретных по времени значений при  $t=kT_0$ . При этом будем также считать, что граничная частота спектра этого сигнала  $\omega_{\text{гр}}$  меньше частоты среза  $\omega_c$ , т.е.  $\omega_{\text{гр}} < \omega_c < 2/T_0$ . Тогда в диапазоне рабочих частот системы  $\lambda \approx \omega$ , а  $W^*(j\omega) \approx W(j\lambda)$ . Это позволяет для оценки точности воспроизведения такого сигнала и формирования ограничений на частотные свойства разомкнутой ДСУ формально воспользоваться методом *эквивалентного гармонического сигнала* в том же виде, как и для непрерывных систем.

Показателем точности в этом случае является относительная ошибка  $e_{\text{отн}} = e_{\max}/A_3$ , где  $A_3$  – амплитуда «эквивалентного» гармонического сигнала  $X_3[k] = A_3 \sin(\omega_3 k T_0)$ . Параметры  $A_3$  и  $\omega_3$  этого сигнала определяются из условия равенства амплитуд скорости и ускорения гармонического сигнала и максимальных величин скорости  $\dot{X}_{\max}$  и ускорения  $\ddot{X}_{\max}$  для непрерывного задающего сигнала:

$$A_3 = \frac{\dot{X}_{\max}^2}{\ddot{X}_{\max}}; \quad \omega_3 = \frac{\ddot{X}_{\max}}{\dot{X}_{\max}}. \quad (5.17)$$

Для обеспечения заданной относительной ошибки  $e_{\text{отн}}$  в системе с единичной отрицательной обратной связью необходимо, чтобы псевдочастотная ЛАХ разомкнутой ДСУ проходила *выше* контрольной точки  $\mathbf{B}\{\lg(\lambda_3); 20\lg(1/e_{\text{отн}})\}$  и двух лучей, исходящих из нее с наклонами  $-20$  (влево) и  $-40$  (вправо). Тем самым гарантируется воспроизведение с такой же  $e_{\text{отн}}$  множества гармонических сигналов из рабочей полосы частот, для которых амплитуды скоростей и ускорений *не превосходят* величин  $\dot{X}_{\max}$  и  $\ddot{X}_{\max}$ . При синтезе ДСУ с астатизмом первого порядка частотными методами выбор минимального допустимого значения для коэффициента передачи (добротности по скорости) должен выполняться с учетом этих ограничений на расположение ПЧ ЛАХ разомкнутой системы.

*Г. Оценка точности при стационарном случайном воздействии.* В качестве критериев точности при таком типовом задающем воздействии обычно принимают математическое ожидание  $m_e$  и дисперсию  $d_e$  сигнала ошибки управления. Если для *стационарного* дискретного случайного задающего сигнала  $X[k]$  известны статистические характеристики в виде математического ожидания  $m_x$  и спектральной плотности  $S_x^*(\omega)$ , то определить искомые показатели качества  $m_e$  и  $d_e$  можно по следующим формулам [6]:

$$m_e = \Phi_e(1)m_x; \quad d_e = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\pi/T_0}^{\pi/T_0} S_e^*(\omega) d\omega, \quad (5.18)$$

где  $S_e^*(\omega) = S_x^*(\omega) |\Phi_e^*(j\omega)|^2 = N_e(e^{j\omega T_0}) N_e(e^{-j\omega T_0})$  – *спектральная плотность* сигнала ошибки управления.

При вычислении дисперсии  $d_e$  по формуле (5.18) могут быть использованы таблицы интегралов от спектральной плотности непрерывного процесса. Для этого необходимо предварительно выполнить  $D_u$ -преобразование в выражении спектральной плотности  $S_e^*(\omega) = N_e(e^{j\omega T_0}) N_e(e^{-j\omega T_0})$ , переходя в нем от частоты  $\omega$  к псевдочастоте  $\lambda$  с помощью

формулы  $e^{j\omega T_0} = \frac{2 + j\lambda T_0}{2 - j\lambda T_0}$ . Тогда выражение (5.18) для дисперсии ошибки преобразуется к следующему виду:

$$d_e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_e(\lambda)}{\left|1 + j\lambda \frac{T_0}{2}\right|^2} d\lambda = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{N_e(u)N_e(-u)}{(1 + 0,5uT_0)(1 - 0,5uT_0)} du = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(u)C(-u)}{D(u)D(-u)} du,$$

где  $C(u) = c_0 + c_1u + \dots + c_mu^m$  и  $D(u) = d_0 + d_1u + \dots + d_nu^n$  – полиномы с вещественными коэффициентами, а  $m < n$ .

Этот интеграл является *табличным* и зависимость его величины от коэффициентов полиномов  $C(u)$  и  $D(u)$  при конкретных  $n$  можно найти в книгах по теории управления. Полученные зависимости целесообразно использовать далее при выборе параметров ДСУ, например, из условия минимума дисперсии ошибки  $d_e$ . В этом случае ДСУ будет *оптимальной* (наилучшей) по этому критерию.

## 6. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ДСУ

Задача динамического синтеза ДСУ заключается в выборе структуры и параметров системы, обеспечивающих выполнение заданных требований и ограничений на качество процесса управления, как в переходных, так и в установившихся режимах. Кроме того, при этом должны учитываться ряд инженерных требований и рекомендаций, связанных со сложностью и возможностью последующей технической реализации ДСУ (полоса пропускания; помехоустойчивость; сложность алгоритма управления; величины периода дискретности и коэффициента усиления и др.) [1].

### 6.1. Варианты постановки задач динамического синтеза ДСУ

Возможны несколько вариантов постановки задачи динамического синтеза [7]:

- Синтез ДСУ с произвольной структурой (синтез *оптимальной* системы).
- Синтез ДСУ с фиксированной структурой (*параметрический* синтез).
- Синтез ДСУ с *частично заданной* структурой (синтез корректирующих устройств).

В *первом* случае структурная схема системы не задана, и задача синтеза состоит в отыскании оператора преобразования (математической модели) системы, являющейся «наилучшей» в рассматриваемом классе. Например, таким классом может быть множество всех возможных линейных стационарных ДСУ, для которых выполняется условие физической реализуемости. При этом заданными считаются критерий выбора (функционал, показатель качества), характеристики внешних воздействий, а также набор ограничений. Для решения такой задачи в случае линейной ДСУ обычно используют вариационные методы, позволяющие получить *функциональные уравнения* относительно *весовой* функции или *передаточной* функции ДСУ, которые обеспечивают *экстремум* показателя качества.

При этом найденное *оптимальное* (наилучшее в указанном смысле) решение может оказаться слишком сложным для технической реализации и поэтому далее обычно ставится задача о *приближенной* его реализации и получении *квазиоптимальной* системы. Методологическая значимость такого подхода к синтезу ДСУ состоит в том, что опреде-

ляется *теоретический предел* возможностей по совершенствованию свойств и характеристик систем рассматриваемого класса. Это должно учитываться при назначении требований к показателям качества ДСУ на этапе составления технического задания на проектирование.

Во *втором* случае структура системы *полностью задана*, но соответствующая математическая модель ДСУ известна с точностью до значений *некоторых* параметров. Их необходимо определить так, чтобы показатель качества (критерий) принимал экстремальное значение, либо его величина была в допустимых пределах. Для нахождения решения соответствующей этому случаю экстремальной задачи используются методы *нелинейного программирования*. В частности, такая задача возникает при определении *оптимальных* значений параметров промышленных регуляторов с типовыми законами регулирования, когда за критерий качества принята, например, квадратичная суммарная оценка (5.4) или (5.5).

Примером параметрического, но *неоптимального* синтеза является задача выбора параметров обратной связи по вектору состояния управляемого объекта, обеспечивающей желаемое расположение характеристических корней системы (задача синтеза модального регулятора состояния).

В *третьем*, наиболее часто встречающемся на практике варианте задачи динамического синтеза, задана *первоначальная* схема ДСУ, обычно составленная только из функционально необходимых элементов и устройств. При этом, как правило, требования к качеству работы ДСУ заведомо не удовлетворяются. В таких случаях в состав системы *необходимо* включать специальные *корректирующие* звенья (устройства), обеспечивающих выполнение всех заданных требований и ограничений на качество процесса управления.

Выбор места и способа подключения таких звеньев, а также определение вида и параметров их передаточных функций составляют смысл и содержание задачи синтеза корректирующих устройств. Учитывая сказанное выше, под динамическим синтезом ДСУ далее будем понимать *только* задачу определения корректирующих устройств и рассмотрение основных методов ее решения.

## 6.2. Методы синтеза корректирующих звеньев в составе ДСУ

Особенностью ДСУ является то, что корректирующие звенья могут быть как непрерывными (в составе непрерывной части системы) так и дискретными (например, цифровыми). При этом способы включения корректирующих звеньев в состав дискретной или непрерывной части также могут быть различными (последовательный, параллельный, встречно-параллельный или их комбинации). Соответственно будут меняться и методы их расчета [6,7].

Следующей важной особенностью динамического синтеза ДСУ в указанном выше смысле является необходимость *предварительного определения* величины шага дискретизации по времени  $T_0$ . Это весьма специфичный параметр дискретных систем управления, от которого сложным, трансцендентным образом зависят большинство коэффициентов математической модели дискретных звеньев приведенных непрерывных частей (ДЗ ПНЧ) в составе расчетной схемы ДСУ. Для простоты и большей определенности, ограничимся рассмотрением только *последовательных дискретных* корректирующих звеньев, включаемых в цепь ошибки в структуре ДСУ с единичной отрицательной обратной связью. Расчетная схема такой системы представлена на рис.6.1.

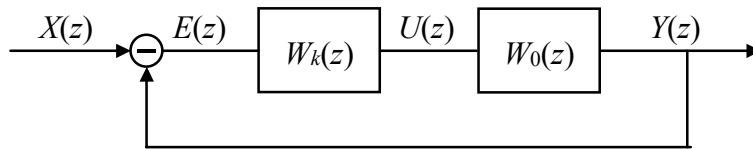


Рис. 6.1. Расчетная схема линейной ДСУ

Здесь  $W_0(z)$  – дискретная передаточная функция неизменяемой части ДСУ, а  $W_k(z)$  – передаточная функция *дискретного корректирующего звена*.

Множество методов синтеза дискретных корректирующих звеньев можно подразделить на следующие группы:

- Прямые методы.
- Аналитические методы.
- Графоаналитические (частотные) методы.

*Прямые методы* основаны на использовании компьютерного моделирования процессов в ДСУ при различных вариантах передаточной функции корректирующего звена  $W_k(z)$  и ее коэффициентов. Современные вычислительные средства и проблемно-ориентированные пакеты программ предоставляют для исследования (анализа) *конкретных* вариантов большие удобства и возможности. По сути дела, это современный вид старого метода «проб и ошибок», в котором основная проблема состоит в организации направленного перебора вариантов. Использование прямых методов наиболее эффективно при синтезе сложных и нелинейных ДСУ в сочетании с другими методами, которые позволяют получить *первоначальные* варианты структуры и параметров управляющей части ДСУ.

*Аналитические методы* позволяют получить уравнения (или формулы) относительно передаточных функций корректирующих устройств  $W_k(z)$  или их параметров. Решение этих уравнений в общем виде не всегда возможно, и на этом этапе синтеза могут быть использованы вычислительные алгоритмы и средства.

Аналитические методы можно подразделить на две группы [2,7]:

1. Методы оптимального синтеза.
2. Методы неоптимального (обычного) синтеза.

В *аналитических методах оптимального синтеза* отыскивается решение, доставляющее экстремум (обычно минимум) *заданному* показателю качества. При этом уравнения для *оптимальной* передаточной функции  $W_k(z)$  (или ее параметров) обычно получают из *необходимых условий* экстремума критерия качества. В общем случае вид  $W_k(z)$  заранее неизвестен и единственным требованием для него является условие физической возможности (порядок числителя не выше порядка знаменателя). Возможен и другой, более простой случай, когда неизвестными являются только некоторые из коэффициентов в выражении для  $W_k(z)$ .

В *аналитических методах неоптимального синтеза* передаточная функция корректирующего устройства  $W_k(z)$  определяется из уравнений, составленных из условий обеспечения замкнутой системе заданных (желаемых) свойств. В общем случае эти свойства не могут быть произвольными и должны быть определенным образом согласованы с особенностями и возможностями заданной части ДСУ. Получаемое решение должно быть физически осуществимым и должно обеспечивать системе свойство «грубости» к малым изменениям параметров корректирующего устройства.



*Графоаналитические* методы базируются на использовании частотных (псевдочастотных) характеристик разомкнутых и замкнутых ДСУ и связи их с показателями качества переходных и установившихся процессов. Кроме того, в частотной области легко формулируются условия и рекомендации, выполнение которых приводит к более простой технической реализации корректирующих устройств и ДСУ в целом. Эти методы отличаются простотой, наглядностью и понятным физическим смыслом. Благодаря применению *логарифмических* и типовых частотных характеристик, они получили преимущественное распространение в инженерной практике при решении задачи синтеза корректирующих устройств [1, 6].

### 6.3. Аналитические методы синтеза корректирующих звеньев

#### 6.3.1. Аналитический метод неоптимального синтеза

Рассмотрим кратко только один из методов этой группы, в котором передаточная функция последовательного корректирующего звена  $W_k(z)$  определяется по результатам решения специально составленных *полиномиальных уравнений*. В литературе он известен как *метод порядковых отображений* [7].

Запишем передаточную функцию замкнутой ДСУ, расчетная схема которой показана на рис.6.1:

$$\Phi(z) = \frac{W_k(z)W_0(z)}{1 + W_k(z)W_0(z)}. \quad (6.1)$$

Здесь  $W_0(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  – передаточная функция *неизменяемой* части системы,  $W_k(z)$  – передаточная функция дискретного корректирующего устройства, определяющая закон управления.

Предположим, что задана *желаемая* передаточная функция  $\Phi(z) = \Phi_{ж}(z)$ . Найдем из (6.1) соответствующую ей передаточную функцию  $W_k(z)$ :

$$W_k(z) = \frac{1}{W_0(z)} \frac{\Phi_{ж}(z)}{1 - \Phi_{ж}(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} \frac{\Phi_{ж}(z)}{1 - \Phi_{ж}(z)}. \quad (6.2)$$

Анализ этой формулы позволяет сделать следующие важные выводы:

1. *Разность порядков* знаменателя и числителя  $r_{ж} = n - m$  для  $\Phi_{ж}(z)$  *должна* быть *не меньше* такой же разности  $r_0 = n_Q - m_P$  для  $W_0(z)$ , т.е.  $r_{ж} \geq r_0$ . Иначе в  $W_k(z)$  порядок числителя окажется больше порядка знаменателя.

2. Функция  $\Phi_{ж}(z)$  *должна* среди своих *нулей* обязательно содержать все те корни полинома  $P(z)$ , которые расположены вне единичного круга, иначе они окажутся полюсами  $W_k(z)$  и при неточной их реализации нарушится условие устойчивости замкнутой системы. Кроме того, неустойчивым будет и само корректирующее устройство.

3. Функция  $1 - \Phi_{ж}(z)$  *должна* среди *нулей* обязательно содержать все те корни полинома  $Q(z)$ , которые по модулю больше единицы, иначе они окажутся нулями  $W_k(z)$  и при неточной их реализации замкнутая ДСУ окажется неустойчивой.

Перечисленные выше требования являются основными. *Первое* из них представляет собой условие осуществимости  $W_k(z)$ , а *второе* и *третье* – это условие «грубости» системы к малым вариациям параметров корректирующего устройства. Оно требует, чтобы передаточная функция  $W_k(z)$  *не содержала* нулей и полюсов, близких к тем полюсам и

нулям передаточной функции неизменяемой части  $W_0(z)$ , которые по модулю *больше* единицы. Любые другие условия и ограничения будут дополнительными. В частности, это могут быть, например, требования заданного порядка астатизма, конечной длительности переходного процесса и др.

Сначала рассмотрим случай, когда числитель и знаменатель передаточной функции неизменной части  $W_0(z)$  содержат любые, в том числе и неминимально-фазовые множители, т.е. не все их корни принадлежат единичному кругу. Кроме того, для замкнутой системы не будем требовать выполнения каких-либо специальных свойств (порядок астатизма, конечная длительность переходного процесса и пр.), кроме физической осуществимости.

Запишем передаточную функцию замкнутой системы  $\Phi_{ж}(z)$  в виде  $\Phi_{ж}(z)=B(z)/A(z)$ , где порядок числителя, по меньшей мере, на единицу *меньше* порядка знаменателя. Тогда передаточная функция системы по ошибке имеет вид

$$\Phi_e^*(z) = 1 - \Phi_{ж}(z) = \frac{A(z) - B(z)}{A(z)} = \frac{C(z)}{A(z)}. \quad (6.3)$$

При этом передаточная функция разомкнутой системы  $W(z)$  будет равна

$$W(z) = \frac{\Phi_{ж}(z)}{1 - \Phi_{ж}(z)} = \frac{B(z)}{C(z)}. \quad (6.4)$$

Если передаточная функция неизменяемой (заданной) части системы  $W_0(z)=P(z)/Q(z)$ , то передаточная функция *последовательного* корректирующего устройства определится выражением

$$W_k(z) = \frac{W(z)}{W_0(z)} = \frac{B(z) Q(z)}{C(z) P(z)}. \quad (6.5)$$

Потребуем сначала, чтобы числитель  $B(z)$  для  $\Phi_{ж}(z)$  содержал все нули, а числитель  $C(z)$  для  $\Phi_e^*(z)$  содержал все полюсы  $W_0(z)$ . Тогда корректирующее устройство с передаточной функцией  $W_k(z)=M(z)/N(z)$  не будет компенсировать (отсутствуют алгебраические сокращения) ни одного сомножителя в составе  $W_0(z)$  и при этом

$$B(z)=P(z)M(z); \quad C(z)=Q(z)N(z). \quad (6.6)$$

Пусть порядок характеристического полинома системы (знаменатель  $A(z)$  в выражении для  $\Phi_{ж}(z)$ ) равен  $n$ . Тогда условие физической осуществимости для передаточной функции  $\Phi_{ж}(z)$  запишется в следующем виде:

$$n_B = n_P + n_M \leq n - 1. \quad (6.7)$$

Но так как для  $\Phi_e^*(z)$  порядок числителя равен порядку знаменателя, то

$$n_C = n_Q + n_N = n. \quad (6.8)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае, когда  $W_k(z)$  не компенсирует ни одного множителя в передаточной функции  $W_0(z)$ , порядок замкнутой системы  $n \geq n_Q$ . Заметим также, что в соответствии с условием физической осуществимости для  $W_k(z)=M(z)/N(z)$ , разность порядков знаменателя и числителя для передаточной функции  $\Phi_{ж}(z)$  должна быть не меньше разности порядков знаменателя и числителя для  $W_0(z)$ , т.е.

$$n - n_B \geq n_Q - n_P. \quad (6.9)$$

Характеристический полином  $A(z)$  для замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью может быть получен как сумма полиномов числителя и знаменателя передаточной функции  $W(z)$ :

$$A(z) = P(z)M(z) + Q(z)N(z). \quad (6.10)$$

Полагая характеристический полином  $A(z)$  известным (*заданным*), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z$  в левой и правой частях равенства (6.10). В результате этого получим  $n+1$  уравнение относительно  $n_M+n_N+2$  неизвестных коэффициентов полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$ . Для математической разрешимости задачи, количество неизвестных коэффициентов в полученной системе уравнений должно быть *не меньше* количества коэффициентов в характеристическом полиноме  $A(z)$ , т.е. должно выполняться условие

$$n_M + n_N + 2 \geq n + 1 \quad \text{или} \quad n_M + n_N + 1 \geq n. \quad (6.11)$$

Подставляя сюда  $n$  из (6.7) и (6.8), получим соотношения для выбора порядков полиномов  $M(z)$  и  $N(z)$ :

$$n_M \geq n_Q - 1; \quad n_N \geq n_P. \quad (6.12)$$

При известных порядках  $n_P$  и  $n_Q$ , значения  $n_M$  и  $n_N$  выбираются из неравенств (6.12), например, по их нижним границам, а порядок  $n$  характеристического полинома  $A(z)$  определяется далее по формуле (6.8) как  $n = n_Q + n_N$ .

Так, например, если  $n_Q=2$ ,  $n_P=1$ , то принимая  $n_M=1$  и  $n_N=1$ , получим  $n=3$ , а полиномы  $N(z)$  и  $M(z)$  отыскиваем в виде  $N(z) = n_0 + n_1z$ ;  $M(z) = m_0 + m_1z$ . После определения коэффициентов этих полиномов из полиномиального уравнения (6.10), получим искомую передаточную функцию корректирующего звена

$$W_k(z) = \frac{m_0 + m_1z}{n_0 + n_1z}. \quad (6.13)$$

Полученное решение обеспечивает системе свойство грубости и оставляет неизменными все нули не скорректированной системы и порядок ее астатизма, т.к.  $W_k(z)$  *не компенсирует* каких либо сомножителей в составе передаточной функции неизменяемой части системы. Порядок скорректированной системы при этом будет равен *сумме* порядков передаточных функций  $W_k(z)$  и  $W_0(z)$ . Свойства ДСУ в переходном режиме обеспечиваются выбором коэффициентов характеристического полинома  $A(z)$ , исходя, например, из желаемого расположения его корней или в соответствии с рекомендациями метода *стандартных коэффициентов*.

Обычно к системе, кроме условий физической реализуемости и грубости предъявляются еще и ряд других, дополнительных требований. Например, это может быть астатизм заданного порядка или конечная (минимальная) длительность переходного процесса. При этом должны учитываться специфические особенности динамических свойств неизменяемой части системы. Рассмотрим особенности процедуры динамического синтеза в этом случае.

Представим полиномы числителя и знаменателя  $P(z)$  и  $Q(z)$  в форме произведения *двух* множителей каждый:

$$P(z) = P_-(z)P_+(z); \quad Q(z) = Q_-(z)Q_+(z). \quad (6.14)$$

Множители, *отмеченные* знаком «-» учитывают те характерные особенности неизменяемой части, которые нельзя (или нежелательно) компенсировать корректирующим звеном. Они обязательно должны входить в состав полиномов  $B(z)$  и  $C(z)$  в числителях передаточных функций  $\Phi_{ж}(z)$  и  $1 - \Phi_{ж}(z)$ , аналогично тому, как это было сделано в предыдущем случае (см. (6.6)). Знаком «+» отмечены оставшиеся части выражений для  $P(z)$  и  $Q(z)$ . Эти множители подлежат компенсации и войдут соответствующим образом в чис-

литель и знаменатель выражения для  $W_k(z)$ . Порядки каждого из множителей в (6.14) обозначим как  $n_{P-}$ ,  $n_{P+}$ ,  $n_{Q-}$ ,  $n_{Q+}$ .

Тогда формулы, аналогичные (6.6)–(6.12) запишутся в следующем виде

$$B(z)=P_-(z)M_1(z); \quad C(z)=Q_-(z)N_1(z). \quad (6.15)$$

$$n_B = n_{P-} + n_{M_1} \leq n - 1. \quad (6.16)$$

$$n_C = n_{Q-} + n_{N_1} = n. \quad (6.17)$$

$$A(z) = P_-(z)M_1(z) + Q_-(z)N_1(z). \quad (6.18)$$

$$n_{M_1} + n_{N_1} + 1 \geq n. \quad (6.19)$$

$$n_{M_1} \geq n_{Q-} - 1; \quad n_{N_1} \geq n_{P-}. \quad (6.20)$$

Определим передаточную функцию корректирующего звена для этого случая:

$$W_k(z) = \frac{B(z) Q(z)}{C(z) P(z)} = \frac{P_-(z)M_1(z) Q_-(z)Q_+(z)}{Q_-(z)N_1(z) P_-(z)P_+(z)} = \frac{Q_+(z)M_1(z)}{P_+(z)N_1(z)}. \quad (6.21)$$

Если необходимо обеспечить переходный процесс *конечной длительности*, то характеристический полином в (6.18) выбирается в виде  $A(z)=z^n$ . При этом ДСУ будет иметь бесконечную степень устойчивости.

Если не скорректированная система уже имеет порядок астатизма  $\nu_1$ , то полином  $Q^-(z)$  следует записать в виде  $Q^-(z) = Q_{1-}(z)(z-1)^{\nu_1}$ .

Если скорректированная систем должна иметь порядок астатизма  $\nu_0 > \nu_1$ , то необходимо принять  $N_1(z) = (z-1)^{\nu_0 - \nu_1} N_2(z)$ . Тогда передаточная функция корректирующего звена в соответствии с (6.21) примет вид:

$$W_k(z) = \frac{Q_+(z) M_1(z)}{P_+(z) N_1(z)} = \frac{Q_+(z)}{P_+(z)} \frac{M_1(z)}{(z-1)^{\nu_0 - \nu_1} N_2(z)}. \quad (6.22)$$

Эта формула остается справедливой и в том случае, когда исходная система была статической ( $\nu_1=0$ ).

**Пример 6.1.** Рассмотрим ДСУ, для которой передаточная функция неизменяемой части  $W_0(z)$  (см. рис. 6.1) имеет вид:

$$W_0(z) = \frac{1,84(z + 0,718)}{(z - 1)(z - 0,368)}.$$

Здесь  $P(z) = 1,84(z + 0,718)$ ;  $Q(z) = (z - 1)(z - 0,368)$ .

Требуется определить передаточную функцию корректирующего устройства таким образом, чтобы ДСУ имела порядок астатизма  $\nu_0=1$  и конечную длительность переходного процесса.

*Решение.* В соответствии с описанным выше методом порядковых отображений, назовем

$$P_-(z) = P(z) = 1,84(z + 0,718); \quad P_+(z) = 1; \quad Q_-(z) = (z - 1); \quad Q_+(z) = z - 0,368.$$

Тогда  $n_{P-} = 1$ ;  $n_{Q-} = 1$ ;  $n_{M_1} = 0$ ;  $n_{N_1} = 1$ ;  $n = n_{Q-} + n_{N_1} = 2$ .

Неизвестные полиномы  $M_1(z)$  и  $N_1(z)$  будем искать в следующем виде  $M_1(z)=m_0$ ;  $N_1(z)=n_0 + n_1z$ . Подставим их в уравнение (6.18), в котором полагаем  $A(z)=z^2$ .

В этом случае уравнение  $A(z) = P_-(z)M_1(z) + Q_-(z)N_1(z)$  запишется так:

$$z^2 = 1,84(z + 0,718)m_0 + (z-1)(n_0+n_1z).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $z$  в левой и правой частях этого равенства, получим следующие три уравнения относительно неизвестных коэффициентов  $m_0, n_0, n_1$ :

$$\text{а) } 1,84 \cdot 0,718 m_0 - n_1 + n_0 = 0; \quad \text{б) } 1,32 m_0 - n_0 = 0; \quad \text{в) } n_1 = 1.$$

Отсюда находим значения  $m_0 = 0,316; n_0 = 0,418; n_1 = 1$ . Следовательно

$$W_k(z) = \frac{Q_+(z) M_1(z)}{P_+(z) N_1(z)} = \frac{0,316(z - 0,368)}{z + 0,418}.$$

При этом передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi_{ж}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{P_-(z)M_1(z)}{A(z)} = \frac{0,582(z + 0,718)}{z^2} = 0,582z^{-1} + 0,418z^{-2}.$$

Соответствующая ей весовая функция скорректированной системы будет равна нулю при  $k > 2$ , что свидетельствует о конечной длительности процесса.

### 6.3.2. Аналитический метод оптимального синтеза

Наиболее просто задача определения оптимального корректирующего устройства в структуре системы, показанной на рис. 6.1 аналитически решается в случае квадратичного суммарного критерия (показателя) оптимальности. Например, это может быть суммарное квадратическое отклонение:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} e_{п}^2[k], \quad (6.23)$$

где  $e_{п}[k] = e[k] - e_{в}[k]$  – отклонение ошибки от вынужденной составляющей.

Если вид  $W_k(z)$  задан, то показатель оптимальности  $J$  будет являться функцией параметров  $\mathbf{c} = \{c_i\}$  корректирующего устройства, т.е.  $J = J(c_1, c_2, \dots, c_N)$ . Оптимальные параметры соответствуют таким значениям  $\{c_i^*\}$ , при которых функция  $J(\mathbf{c})$  достигает минимума. Если он существует и единственный, то условие минимума получают приравниванием нулю всех частных производных показателя  $J$  по параметрам  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Решая получаемые при этом уравнения, находят оптимальные значения параметров корректирующего устройства.

В более общей постановке задачи оптимального синтеза требуется определить оптимальную передаточную функцию  $W_k(z)$ , при которой достигается минимум показателя качества следующего вида [7]:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [e_{п}^2[k] + \lambda^2 u_{п}^2[k]], \quad (6.24)$$

где  $u_{п}[k]$  – отклонение управления от вынужденного. Далее, для простоты, будем считать, что вынужденные составляющие процессов по ошибке и управлению равны нулю (о возможности этого будет сказано позднее).

Тогда, считая систему устойчивой, применим к (6.24) формулу Парсеваля:

$$J = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left\{ |E^*(j\omega)|^2 + \lambda^2 |U^*(j\omega)|^2 \right\} d\omega, \quad (6.25)$$

где  $E^*(j\omega)$  и  $U^*(j\omega)$  – комплексные спектры для сигналов ошибки и управляющего воздействия.

Учитывая то, что для рассматриваемой системы

$$E^*(j\omega) = [1 - \Phi^*(j\omega)]X^*(j\omega); \quad U^*(j\omega) = \frac{Y^*(j\omega)}{W_0^*(j\omega)} = \Phi^*(j\omega) \frac{X^*(j\omega)}{W_0^*(j\omega)},$$

формулу (6.25) можно представить в виде

$$J = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left\{ |1 - \Phi^*(j\omega)|^2 S_x^*(\omega) + |\Phi^*(j\omega)|^2 S_u^*(\omega) \right\} d\omega, \quad (6.26)$$

где  $S_x^*(\omega) = |X^*(j\omega)|^2$  и  $S_u^*(\omega) = \lambda^2 \left| \frac{X^*(j\omega)}{W_0^*(j\omega)} \right|^2$  – энергетические спектры внешнего и *приведенного* управляющего воздействия [7].

Чтобы удовлетворить сделанному ранее предположению о равенстве нулю вынужденных процессов по ошибке и по управляющему воздействию, предположим, что знаменатель  $Q(z)$  передаточной функции  $W_0(z)$  содержит в качестве сомножителя знаменатель  $D(z)$  изображения  $X(z) = \frac{R(z)}{D(z)}$ , т.е.  $Q(z) = D(z)Q_1(z)$ . Сомножитель  $D(z)$  обобщает требование астатизма  $\nu$ -го порядка для замкнутой ДСУ.

Тогда допустимые передаточные функции замкнутой системы по выходу и по ошибке будут иметь вид

$$\Phi(z) = \frac{P(z)M_k(z)}{A(z)}; \quad \Phi_e(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{B(z)N_k(z)}{A(z)}, \quad (6.27)$$

где  $P(z)$  – числитель передаточной функции неизменяемой части  $W_0(z)$ ;  $A(z)$  – характеристический полином замкнутой системы;  $M_k(z)$  и  $N_k(z)$  – неизвестные полиномы, удовлетворяющие полиномиальному уравнению

$$P(z)M_k(z) + D(z)N_k(z) = A(z). \quad (6.28)$$

Определение оптимальной частотной характеристики и соответствующей передаточной функции замкнутой системы  $\Phi_{\text{опт}}(z)$  сводится к решению вариационной задачи – минимизировать  $J$  при учете работоспособности замкнутой системы. Для этой цели нужно в выражении (6.26) вместо  $\Phi^*(j\omega)$  подставить  $\Phi_{\text{опт}}^*(j\omega) + \eta \delta W^*(j\omega)$ , где  $\eta$  – произвольная постоянная, а  $\delta W^*(j\omega)$  – *вариация* частотной передаточной функции, соответствующая (6.27) при  $z = e^{j\omega T_0}$ . Тогда показатель  $J$  будет функцией параметра  $\eta$ . Эта функция достигает минимума при  $\eta = 0$ , когда  $\Phi^*(j\omega) = \Phi_{\text{опт}}^*(j\omega)$ . Следовательно, при  $\eta = 0$

$$\delta J = \left[ \frac{\partial J}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0. \quad (6.29)$$

Подставляя сюда выражение для  $J$  из (6.26) можно получить условие минимума в виде уравнения относительно  $\Phi^*(j\omega)$ . Решением этого уравнения будет оптимальная частотная передаточная функция  $\Phi_{\text{опт}}^*(j\omega) = \Phi_{\text{опт}}(e^{j\omega T_0})$ . Соответствующая передаточная функция  $\Phi_{\text{опт}}(z)$  находится из следующего выражения

$$\Phi_{\text{опт}}(z) = \frac{P(z)M_k(z)}{A(z)}, \quad (6.30)$$

где  $A(z)$  и  $M_k(z)$  определяются как решения полиномиальных уравнений

$$A(z)A(z^{-1}) = P(z)P(z^{-1}) + \lambda^2 Q(z)Q(z^{-1}), \quad (6.31)$$

$$P(z)M_k(z) + D(z)N_k(z) = A(z). \quad (6.32)$$

Оптимальная передаточная функция корректирующего устройства определится обычным образом

$$W_k(z) = \frac{\Phi_{\text{опт}}(z)}{1 - \Phi_{\text{опт}}(z)W_0(z)} = \frac{P(z)M_k(z)}{D(z)N_k(z)} \frac{D(z)Q_1(z)}{P(z)} = \frac{M_k(z)Q_1(z)}{N_k(z)}. \quad (6.32)$$

Минимальное значение функционала качества при этом можно найти по следующему выражению:

$$J_{\min} = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \left| \frac{R^*(j\omega)}{A^*(j\omega)} \right|^2 \left( \left| N_k^*(j\omega) \right|^2 + \lambda^2 \left| M_k^*(j\omega)Q_1^*(j\omega) \right|^2 \right) d\omega. \quad (6.33)$$

Заметим, что полученная система является оптимальной по отношению к тем задающим воздействиям, у которых знаменатель изображения равен  $D(z)$ . Все эти воздействия в установившемся режиме будут воспроизводиться системой без ошибки, а сумма квадратов ординат переходной составляющей процесса управления в системе будет минимальной в смысле критерия (6.24).

Как следует из изложенного, задача синтеза цифрового регулятора по тому или иному критерию аналитическим методом может быть решена, если задан (известен) шаг дискретности по времени  $T_0$ . Отсюда возникает естественный вопрос: «Каким образом задавать величину  $T_0$ ?». Этот вопрос является особенно важным при расчете цифровых (микропроцессорных) систем управления, так как параметр  $T_0$  в основном определяет требование к быстродействию ЦВУ. Сложность задачи заключается в том, что максимальная величина  $T_0$  будет зависеть от  $W_0(z)$ , коэффициенты которой зависят сложным образом от  $T_0$ . Таким образом, для строгого обоснования минимально необходимой частоты дискретизации  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  возникает логически замкнутый круг. Поэтому назначение величины  $T_0$  обычно должно предшествовать решению задачи синтеза алгоритма управления.

Один из возможных и наиболее простых подходов к решению этой задачи состоит в выборе величины  $\omega_0$  на основе приближенного выполнения условия информационной эквивалентности Котельникова – Шеннона в виде  $\omega_0 \geq 2\omega_m$ , где максимальная частота  $\omega_m \approx 3\omega_s$  спектра циркулирующих в системе сигналов. Здесь  $\omega_s$  – граничная частота для АЧХ непрерывной части системы, назначаемая из условия  $|W_{\text{нч}}(j\omega)| \leq 0,1$  при  $\omega > \omega_s$ . Но такой выбор часто приводит к завышенным требованиям к величине  $\omega_0$ . Известны и другие, но гораздо более сложные методики предварительного назначения величины шага дискретизации  $T_0$  [3, 4, 5].

#### 6.4. Частотные методы синтеза корректирующих звеньев

Среди различных методов синтеза корректирующих звеньев, частотные методы отличаются идейной простотой и наглядностью, как для непрерывных, так и для дискретных систем управления. В этих методах характеристики корректирующих звеньев в средне-

частотном диапазоне (окрестность частоты среза) выбираются так, чтобы годограф Найквиста *устойчивой* системы не заходил в некоторую запрещенную (по требованиям запасов устойчивости) область, окружающую «особую» точку  $(-1, j0)$ . Вид такой области может быть различным и часто ее принимают в форме круга радиуса  $R=M/(M^2 - 1)$  с центром в точке  $(-MR, j0)$ , где  $M$  – это требуемое значение показателя колебательности [1, 2]. Иногда, для простоты, эту область принимают в виде круга радиуса  $R_1$  с центром в точке  $(-1, j0)$  [3]. Но как показывает сравнительное исследование, такой вариант запрещенной области менее удачен, чем первый, т.к. приводит к более жестким требованиям к годографу Найквиста на частотах больших частоты среза и, как результат, к более сложному корректирующему устройству.

Требования по точности в частотных методах обеспечиваются видом и расположением *низкочастотной* части годографа Найквиста. При выбранном порядке астатизма, удаленность точек годографа (расстояние) от начала координат в низкочастотном (рабочем) диапазоне должна быть достаточно большой.

*Высокочастотная* часть частотного годографа разомкнутой системы практически не оказывает заметного влияния на запасы устойчивости, и тем более на показатели точности системы управления, но определяет усиление помех, сложность и физическую осуществимость корректирующих звеньев.

#### 6.4.1. О синтезе ДСУ методом логарифмических характеристик

Наиболее просто задача синтеза корректирующих звеньев решается для непрерывных *минимально фазовых* систем с использованием логарифмических частотных характеристик. При этом с помощью приближенных формул и графиков, удастся сформировать *типовую «желаемую» асимптотическую* ЛАХ разомкнутой системы, обеспечивающую выполнение всех требований к качеству замкнутой системы с учетом инженерных рекомендаций по ее реализации. Такой желаемой ЛАХ будет соответствовать и типовая передаточная функция разомкнутой системы, зная которую можно определить передаточную функцию корректирующего звена при любом способе его подключения. При синтезе ДСУ обычно рассматривают вариант *последовательного дискретного* корректирующего звена.

Переход от круговой частоты  $\omega$  к абсолютной псевдочастоте  $\lambda$  и использование *псевдочастотных* логарифмических характеристик (ПЧЛХ) позволяет, с некоторыми особенностями и ограничениями, распространить аналогичный подход и на дискретные линейные системы управления. При этом существенной особенностью ДСУ является то, что в числителе преобразованной передаточной функции  $W_0(u)$  для *заданной* части разомкнутой системы *всегда* будут присутствовать (не менее одного) *неминимально-фазовые* множители. Они оказывают существенное влияние на фазовую ПЧЛХ в районе псевдочастоты среза  $\lambda_c$  и правее ее, уменьшая запас устойчивости по фазе.

Для обеспечения свойства *грубости* ДСУ *недопустима* компенсация таких множителей корректирующим звеном, и поэтому они *обязательно* должны входить в числитель передаточной функции скорректированной системы. Соответствующие им *слагаемые* должны включаться в состав желаемых ЛПЧХ. Проблема заключается в том, что *наличие* или отсутствие таких множителей, кроме одного, всегда имеющего вид  $(1 - 0,5uT_0)$ , зависит от соотношения величины периода дискретности  $T_0$  и суммы «малых» постоянных времени в выражении для передаточной функции непрерывной части системы  $W_0(p)$ . При *заданном* значении  $T_0$  эти множители всегда можно определить и учесть при



формировании желаемых ПЧЛХ разомкнутой ДСУ, хотя для  $W_0(p)$  высокого порядка это сделать не просто.

Чтобы исключить возможность непреднамеренной компенсации указанных выше сомножителей в тех случаях, когда величина  $T_0$  заранее неизвестна, а подлежит выбору или оптимизации в процессе синтеза, достаточно того, чтобы получаемая передаточная функция корректирующего звена  $W_k(u)$  не содержала правых полюсов и соответствовала устойчивому звену. Тогда, если заданная часть системы была устойчивой, выполнение условия грубости будет обеспечено.

### 6.4.2. Особенности формирования желаемых ПЧЛХ ДСУ

Построение желаемых псевдочастотных логарифмических характеристик (ПЧЛХ) для разомкнутой ДСУ, как и для непрерывной системы, осуществляется по частотным диапазонам. Их вид и расположение в низкочастотной области НЧ (диапазон спектра задающего воздействия) определяется, в основном, требованиями к точности воспроизведения сигналов системой в установившемся режиме. Вид фазовой характеристики здесь не имеет существенного значения, и требования предъявляются только к ЛАХ [1, 3, 6].

Но так как в НЧ диапазоне  $\lambda \ll \lambda_c < 2/T_0$  и  $\lambda \approx \omega$ , то желаемая ЛАХ здесь (и далее до псевдочастоты  $\lambda_c$ ), строится точно так же, как для непрерывной системы. Порядок астатизма  $\nu$ , определяющий наклон НЧ асимптоты ЛАХ, должен быть *не меньше* числа интегрирующих звеньев в выражении для передаточной функции  $W_0(p)$  *непрерывной* части ДСУ, а график псевдочастотной ЛАХ здесь должен располагаться *выше* границы запрещенной (по точности) области. Вид этой области определяется характером требований к качеству установившихся режимов при типовых воздействиях на входе ДСУ. На рис. 6.1 изображен вид таких областей для системы с астатизмом первого порядка в случаях, когда типовой сигнал является а) полиномиальным; б) с ограниченными значениями первой и второй производных и в) полигармоническим. Особенности построения этих границ отмечались ранее в *пятой* главе при рассмотрении вопроса оценки качества ДСУ в установившемся режиме работы.

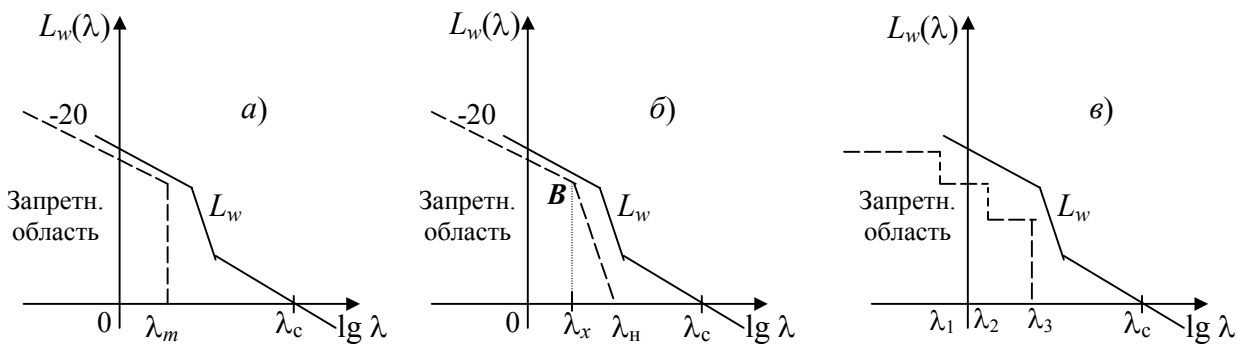


Рис. 6.1. Запрещенные области для ЛАХ по требованиям точности

Диапазон *средних* частот – это окрестность псевдочастоты среза  $\lambda_c$  для ЛАХ. Величина  $\lambda_c$  определяет *быстродействие* ДСУ, а взаимное расположение амплитудных и фазовых характеристик в этом диапазоне определяет устойчивость и запасы устойчивости системы. При этом шаг дискретизации по времени  $T_0$  не может быть произвольно большим и, как правило, для устойчивости ДСУ оказывается *необходимо* выполнение условия  $\lambda_c < 2/T_0 < \pi/T_0$ .

Известно, что амплитудные и фазовые частотные характеристики минимально фазовых систем связаны между собой преобразованием Гильберта. Поэтому для них, в

принципе, можно ограничиться построением *только* желаемых ЛАХ, обеспечивающих все требования к качеству управления, а по ним получать выражения соответствующих им желаемых передаточных функций. Для дискретных систем *располагаемая*  $W_0(u)$  и *желаемая*  $W_{ж}(u)$  преобразованные передаточные функции разомкнутой системы всегда содержат в числителях неминимально-фазовые множители, и поэтому такое упрощение в общем случае невозможно.

Поскольку эти множители начинают существенно проявляться только в средне- и высокочастотных диапазонах при  $\lambda > \lambda_c$ , то построение желаемых ЛПЧХ там, где  $\lambda \leq \lambda_c$  можно выполнять *без учета их влияния* по методикам теории непрерывных систем, ограничиваясь при этом только построением желаемой ЛАХ.

Но для диапазонов, где  $\lambda > \lambda_c$  неминимально-фазовые сомножители в составе  $W_{ж}(u)$  и вносимые ими отрицательные фазовые сдвиги должны быть учтены при построении желаемых ПЧЛХ. При этом формулы и рекомендации методов непрерывной теории должны быть (при заданном  $T_0$ ) соответствующим образом модифицированы [1, 2, 6].

### 6.4.3. Построение желаемых ПЧЛХ при заданном значении $T_0$

Рассмотрим подробнее особенности построения желаемых ПЧЛХ разомкнутой ДСУ для случая, когда требования к запасам устойчивости системы заданы в виде ограничения на величину показателя колебательности  $M$ , а значения шага дискретности по времени  $T_0$  и коэффициентов  $W_0(u)$  полностью известны. Тогда числитель передаточной функции  $W_0(u)$  дискретного звена приведенной непрерывной части (ДЗ ПНЧ) *обязательно* будет содержать сомножитель  $(1 - 0,5uT_0)$  и, возможно, сомножители вида  $(1 - u\tau_i)$ , коэффициенты которых  $\tau_i$  зависят некоторым образом от заданного значения  $T_0$ .

Пусть при этом  $\lambda_c < 2/T_0$ , а все  $\tau_i < 1/\lambda_c$ , т.е. являются «малыми» [1, 2]. Тогда при  $v=1$  (первый порядок астатизма) можно записать следующий *типовой* вид передаточной функции для разомкнутой скорректированной системы:

$$W(u) = \frac{K(1 + uT_2)(1 - u\frac{T_0}{2})\prod_{i=1}^m(1 - u\tau_i)\prod_{j=1}^r(1 + u\tau_j)}{u(1 + uT_1)(1 + uT_3)(1 + uT_4)\cdots(1 + uT_s)}. \quad (6.34)$$

Особенностью типовой  $W(u)$  является *одинаковый* порядок числителя и знаменателя, а также то, что она в обязательном порядке содержит в числителе неминимально-фазовые сомножители, «унаследованные» от  $W_0(u)$ . Остальные сомножители числителя и знаменателя относятся либо к корректирующему устройству, либо к  $W_0(u)$ . Если при этом  $T_1 > T_2 > 1/\lambda_c > T_3$ , а все *остальные* постоянные времени  $T_i, i > 3$ , а также  $T_0/2, \tau_i, \tau_j$  *меньше*  $T_3$ , то выражению (6.34) будет соответствовать «симметричная» асимптотическая ПЧ ЛАХ, имеющая при  $\lambda = \lambda_c$  «единичный» наклон  $-20$  дБ/дек. Схематичное изображение такой ЛАХ показано на рис.6.2.

В этом случае относительно *суммы* постоянных времени в (6.34), показателя колебательности  $M$  и псевдочастоты среза  $\lambda_c$  справедливы следующие неравенства, известные как *достаточные* условия В.А. Бесекерского:

$$a) T_2 \geq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M-1}; \quad б) \frac{T_0}{2} + \sum_{i=3}^s T_i + \sum_{i=1}^m \tau_i - \sum_{j=1}^r \tau_j \leq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M+1}. \quad (6.35)$$

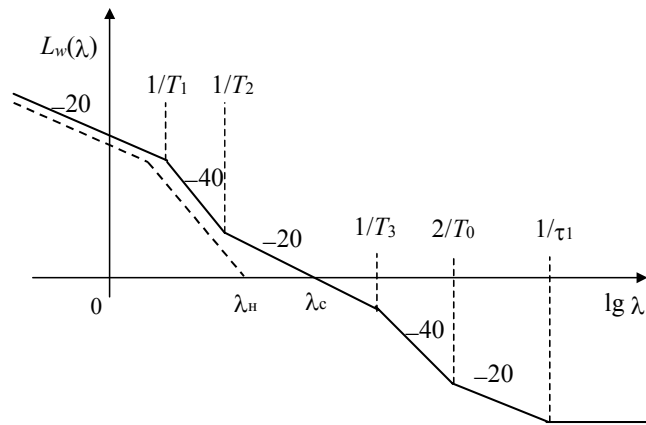


Рис. 6.2. Типовая «симметричная» псевдочастотная ЛАХ

Формулы (6.35) удобно использовать при выборе конкретных числовых значений постоянных времени в выражении для типовой передаточной функции  $W(u)$ , обеспечивающих ей желаемые свойства. Очевидно, что этот выбор неоднозначен и среди множества *допустимых* вариантов следует выбирать тот, который более предпочтителен по другим, например инженерным, критериям. Следует обратить внимание на достаточный характер этих условий. Это значит, что при необходимости условия (6.35) можно несколько нарушить, но тогда требуемое ограничение на величину  $M$  не гарантируется. Правомочность такого «нарушения» выясняется в результате расчета значения показателя  $M$  для системы с выбранными параметрами.

С другой стороны, условие (6.35, б) может оказаться слишком строгим, и удовлетворить ему при положительных (или разумных) значениях постоянных времени невозможно. Тогда следует изменить условия задачи, например, уменьшить значения шага дискретизации  $T_0$  или псевдочастоты среза  $\lambda_c$ . Возможны ситуации, когда требования на качество управления являются завышенными и не соответствуют свойствам заданной неизменяемой части ДСУ. Поэтому согласование и уточнение требований задания на динамический синтез также является одним из необходимых этапов проектирования ДСУ.

Следует помнить, что в общем случае, для других видов типовой передаточной функции  $W(u)$  построение желаемых ПЧ ЛХ во многом носит эмпирический характер и является творческим, плохо формализуемым процессом.

При выборе параметров желаемой передаточной функции (6.34) остаются в силе и следующие общие рекомендации:

1) Значения  $K$ ,  $T_1$  выбирают так, чтобы НЧ часть ЛАХ располагалась возможно ближе к границе запрещенной (по точности) области, *но не заходила* в нее.

2) Величина  $\lambda_c$  должна быть достаточно большой, чтобы существовала возможность расположить желаемую ЛАХ вне запрещенной области. Но увеличивать  $\lambda_c$  сверх необходимой величины нецелесообразно.

3) Постоянные времени  $T_i$  назначают так, чтобы в пределах ограничения на их общую сумму, возможно большее их количество совпадали (по значениям) с постоянными времени в составе  $W_0(u)$ . Это позволит получить более простую передаточную функцию корректирующего звена  $W_k(u)$  с наименьшими порядками полиномов числителя и знаменателя.

4) Расстояние между параллельно расположенными ВЧ асимптотами желаемой и располагаемой ПЧ ЛАХ следует, по возможности, минимизировать. Это приведет к ослаблению помех и уменьшит влияние нелинейностей типа «насыщение» при последующей реализации ДСУ.

#### 6.4.4. Синтез корректирующих звеньев при неизвестном $T_0$

Как указывалось ранее, правильный выбор шага дискретизации по времени  $T_0$  в ДСУ является важной и специфической проблемой, которая решается аналитическим методом только в простейших, не имеющих практического значения, случаях. Для цифровых ДСУ *желательно*, чтобы  $T_0$  принимало возможно большее из допустимых значений – при этом требования к быстродействию ЦВУ будут минимальны [1, 3, 5]. Но для нахождения этого значения необходимо знать передаточную функцию заданной части  $W_0(u)$ , коэффициенты которой сложным нелинейным образом зависят от неизвестного  $T_0$ .

Обычно в частотных методах синтеза ДСУ величину  $T_0$  считают заданной. Иначе невозможно построить графики для располагаемой и желаемой ПЧЛХ разомкнутой системы и, следовательно, нельзя рассчитать оптимальное значение  $T_0$ . Поэтому эта задача может быть решена только итерационным методом, в котором на очередном шаге расчета определяется промежуточный вариант значения  $T_0$  и вариант передаточной функции  $W_{цкц}(u)$ . Ниже предлагается один из таких методов, основанный на постепенном усложнении выражения для  $W_{цкц}(u)$  и увеличении  $T_0$  на каждой итерации. Количество шагов обычно невелико и зависит от порядка заданной части и от значений малых постоянных времени в составе  $W_0(p)$ . Метод является приближенным и основывается на следующих предположениях:

1) псевдочастота среза скорректированной разомкнутой системы  $\lambda_c < 2/T_0$ . Это условие в подавляющем большинстве ДСУ случаев является *необходимым* для обеспечения устойчивости и требуемого запаса устойчивости;

2) непрерывная часть системы с передаточной функцией  $W_0(p)$  не имеет колебательных и форсирующих звеньев, у которых частоты сопряжения  $\omega_i$  (величины, обратные постоянным времени  $T_i$ ) расположены в окрестности частоты (псевдочастоты) среза или правее ее;

3) передаточная функция непрерывной части  $W_0(p)$  не содержит неминимально-фазовых или неустойчивых сомножителей.

Особенностью метода является то, что для ВЧ диапазона желаемые ЛПЧХ системы *не строятся*, а вместо этого на каждом шаге расчета изменяются передаточная функция последовательного корректирующего устройства и значение  $T_0$  таким образом, чтобы обеспечить требуемую величину показателя колебательности  $M$ . Необходимые для этого проверки на очередном шаге расчета осуществляются с помощью *приближенного* неравенства В.А. Бесекерского относительно «малых» постоянных времени непрерывной части  $T_i^H$ , которые меньше чем  $T_0/2$ .

Важно отметить также, что такой метод не требует предварительного определения аналитических выражений для передаточной функции ДЗ ПНЧ и это делает задачу синтеза *последовательного* дискретного (цифрового) корректирующего устройства не более сложной, чем аналогичная задача для непрерывной системы.

Определение  $W_{цкц}(u)$  и расчет значения  $T_0$  при этом проводится в следующей последовательности:

1. Строится асимптотическая ЛАХ  $L_0(\omega)$  для *непрерывной части* разомкнутой не скорректированной системы, имеющей передаточную функцию  $W_0(p)$ .

2. По требованиям точности и запаса устойчивости (как в случае непрерывной системы) строится *низкочастотная* часть «симметричной» желаемой ЛАХ и *начальная* часть ее среднечастотной асимптоты с наклоном  $-20$  дБ/дек до граничной псевдочастоты  $\lambda_g \geq \lambda_c(1 + M^{-1})$ . Эта частота задает *нижний* предел величины  $2/T_0$ , которой соответст-

вует  $\max(T_0) = 2/\lambda_g$ . Окончательное значение шага дискретности  $T_0$  будет всегда ниже этой границы.

3. Для этого же частотного диапазона  $(0; \lambda_g)$  строится *частичная* асимптотическая ПЧ ЛАХ ЦКУ и определяется соответствующее ей выражение функции  $W_1(u)$ , в котором порядок числителя оказывается *больше* порядка знаменателя.

4. Ориентируясь на ЦКУ простейшего вида, его передаточную функцию  $W_{\text{цку}}(u)$  сначала выбирают в виде  $W_{\text{цку}}(u) = W_1(u) \cdot W_2(u)$ , где *дополнительный* множитель  $W_2(u) = \prod_i \frac{1}{(1 + uT_i^D)}$  вводится для выравнивания порядков числителя и знаменателя передаточной функции  $W_{\text{цку}}(u)$ .

5. Постоянные времени  $T_i^D$ , а также «малые» постоянные времени  $T_i^H$  в составе  $W_0(p)$  непрерывной части включают в левую часть условия В.А. Бесекерского

$$\frac{T_0}{2} + \sum_i T_i^H + \sum_i T_i^D \leq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M+1}. \quad (6.36)$$

Значения всех  $T_i^D$  и  $T_0/2$  здесь выбирают так, чтобы это неравенство выполнялось для всех  $T_i^H < T_0/2$ . Если это удастся сделать и значение  $T_0$  не слишком мало, то расчет ЦКУ и выбор можно считать законченным. В противном случае, получившееся выражение для  $W_{\text{цку}}(u)$  усложняют еще одним дополнительным сомножителем вида  $W_i(u) = \frac{1 + uT_{i\max}^H}{1 + uT_{i\max}^D}$ . Он *приблизительно* компенсирует влияние на запас устойчивости по

фазе наибольшей из числа "малых" постоянных времени непрерывной части  $T_{i\max}^H$ , а  $T_{i\max}^D$  "подменяет" ее в неравенстве Бесекерского. Далее, значения  $T_0/2$ ,  $T_i^D$  и  $T_{i\max}^D$  снова выбирают из условия (6.36). Разумеется, что «скомпенсированная» таким образом постоянная времени  $T_{i\max}^H$  из дальнейших проверок исключается. Если при этом удастся назначить  $T_0/2 > T_i^H$ , то расчет ЦКУ можно считать законченным. В противном случае эта же процедура применяется для следующей по величине "малости" постоянной времени среди  $T_i^H$ . При этом выражение для  $W_{\text{цку}}(u)$  усложнится еще одним множителем и т.д. Необходимо отметить, что значения постоянных времени  $T_i^D$  и  $T_{i\max}^D$  в выражениях для *дополнительно вводимых сомножителей* в составе передаточной функции  $W_{\text{цку}}(u)$  можно изменять в нужную сторону на любом шаге расчета.

Нами были рассмотрены три частотных метода решения задачи динамического синтеза ДСУ, содержащей последовательное корректирующее звено в цепи ошибки: а) метод желаемых частотных характеристик; б) метод последовательного усложнения корректирующего звена (итерационный метод); в) метод аналогового прототипа. Они отличаются уровнем сложности процедуры синтеза и приводят, вообще говоря, к различным передаточным функциям корректирующего звена и значениям шага дискретности  $T_0$ . Для сравнительного анализа и для более детального ознакомления с каждым из них, рассмотрим единый методический пример, на котором демонстрируются порядок применения, особенности и возможности названных методов.

**Пример 6.2.** Требуется выполнить динамический расчет (синтез) ДСУ, предназначенной для воспроизведения задающего сигнала  $X(t)$  по следующим данным:

1) Передаточная функция непрерывной части

$$W_0(p) = \frac{K}{p(1 + pT_a)(1 + pT_b)}, \quad (6.37)$$

где  $T_a=0,11c$ ;  $T_b=0,009 c$ ;  $K$  – коэффициент, обеспечивающий необходимую точность воспроизведения задающего сигнала.

2) Максимальная скорость изменения задающего сигнала  $\dot{X}_{\max} = 1,7B/c$ .

3) Максимальное ускорение задающего сигнала  $\ddot{X}_{\max} = 2,9B/c^2$ .

4) Максимальная относительная динамическая ошибка  $e_{\text{отн}}=0,58\%$ .

5) Рекомендованное значение показателя колебательности  $M = 1,3$ .

*Решение.* При расчете ДСУ частотными методами будем ориентироваться на типовую асимптотическую ЛАХ «симметричного вида» для системы с астатизмом первого порядка, которая имеет коэффициенты кратности наклонов асимптот: 1–2–1–2.

Желаемая ЛАХ в НЧ и СЧ диапазонах, т.е. там, где  $\omega \approx \lambda$ , строится так же, как и для непрерывной системы. Она не должна заходить в запрещенную (по точности) область, которая строится по параметрам эквивалентного гармонического сигнала и заданной величине относительной динамической ошибки  $e_{\text{отн}}$ .

Определим частоту  $\omega_x$  эквивалентного гармонического сигнала и значение ординаты  $L_x$  контрольной точки **В** (угловая точка запретной области):

$$\omega_x = \frac{\ddot{X}_{\max}}{\dot{X}_{\max}} = 1,7 c^{-1}; L_x = -20 \lg(e_{\text{отн}}) = 44,6 \text{ дБ}. \quad (6.38)$$

Вид запретной области и другие построения для рассматриваемого примера показаны на рис. 6.2. Нижнюю границу для коэффициента усиления разомкнутого контура системы рассчитываем по формуле

$$K_{\min} = \frac{\ddot{X}_{\max}}{\dot{X}_{\max} e_{\text{отн}}} = 291. \quad (6.39)$$

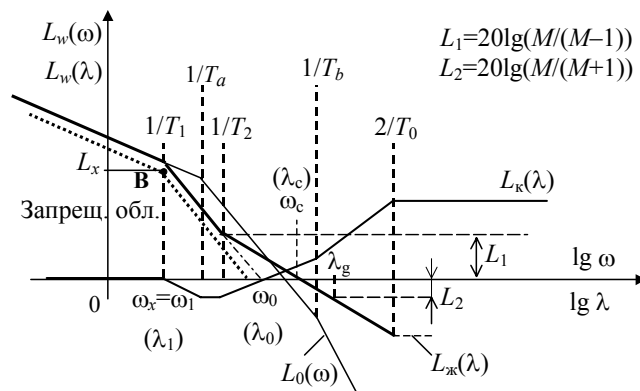


Рис. 6.2. Схематическое изображение ЛАХ для примера 6.2

Ориентируясь на минимальную частоту среза  $\omega_c \approx \lambda_c$  и возможно меньшее значение коэффициента усиления разомкнутой системы  $K$ , назначим частоту сопряжения первой и второй асимптот с наклонами  $-20$  и  $-40$  дБ/дек:  $\lambda_1 \approx \omega_1 = \omega_x = 1,7c^{-1}$ . Ей будет соответствовать постоянная времени  $T_1=0,588 c$ .

Для того, чтобы при  $\omega = \omega_1$  точная ЛАХ располагалась *не ниже* контрольной точки **В**, выберем  $K = \sqrt{2} K_{\min} = 410$ . Это соответствует смещению вверх на 3 дБ желаемой асимптотической ЛАХ относительно границы запрещенной области.

ЛАХ непрерывной части системы  $L_0(\omega)$  с *выбранным* коэффициентом усиления схематично (без соблюдения масштаба) изображена на рис.6.2. Определим «базовую» частоту для желаемой ЛАХ  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = 26,41 \text{ с}^{-1}$ . Эта часть процедуры синтеза последова-

тельного корректирующего звена является общей для рассматриваемых частотных методов. Но дальнейшие действия в них различаются.

♦ *Применение итерационного метода.* Этот метод является приближенным, поэтому для получения более надежного результата относительно запасов устойчивости, зададим значение показателя колебательности  $M = 1,265 < 1,3$ . Тогда минимальная частота среза для разомкнутой системы определится по формуле  $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 58 \text{ с}^{-1}$ . Частоту сопряжения  $\omega_2$  второй асимптоты с наклоном  $-40$  дБ/дек с третьей (среднечастотной) асимптотой, имеющей наклон  $-20$  дБ/дек определяем в соответствии с границей неравенства Бесекерского (6.35, а). При этом получим  $\omega_2 = \omega_c(1 - M^{-1}) = 12,048 \text{ с}^{-1}$ . Ей соответствует  $T_2 = 0,083 \text{ с}$ .

Определим *граничную* псевдо частоту  $\lambda_g = \lambda_c(1 + M^{-1}) = 104 \text{ с}^{-1}$ . Вычитая графики  $L_{ж}(\lambda)$  и  $L_0(\lambda) \approx L_0(\omega)$  в диапазоне  $(0; \lambda_g)$ , определим *частичную* ЛАХ корректирующего звена и соответствующую ей функцию:

$$W_1(u) = \frac{(1 + uT_a)(1 + uT_2)}{1 + uT_1}.$$

Поскольку порядок числителя для этой функции получился больше порядка знаменателя, то передаточную функцию последовательного корректирующего звена усложним дополнительным сомножителем:

$$W_k(u) = \frac{(1 + uT_a)(1 + uT_2)}{1 + uT_1} \frac{1}{1 + uT_1^{\Delta}}.$$

Здесь  $T_1^{\Delta}$ , а также  $T_0/2$  выбираются из условия Бесекерского (6.36), которое в данном случае имеет вид  $T_0/2 + T_b + T_1^{\Delta} \leq 1/\lambda_g = 0,00962$ .

Отсюда следует, что  $T_0/2 + T_1^{\Delta} \leq 0,00962 - 0,009 = 0,00062$ . В данном случае, при любом выборе  $T_1^{\Delta}$ , условие «малости» для  $T_b$  выполняться не будет и ее необходимо компенсировать, усложняя передаточную функцию корректирующего звена дополнительным сомножителем  $W_2(u) = \frac{1 + uT_b}{1 + uT_2^{\Delta}}$ . Тогда выражение для  $W_k(u)$  примет следующий вид

$$W_k(u) = \frac{(1 + uT_a)(1 + uT_2)}{1 + uT_1} \frac{1}{1 + uT_1^{\Delta}} \frac{1 + uT_b}{1 + uT_2^{\Delta}}.$$

Значения  $T_1^{\Delta}$ ,  $T_2^{\Delta}$  и  $T_0/2$  должны удовлетворять условию В.А. Бесекерского, т.е.  $T_0/2 + T_1^{\Delta} + T_2^{\Delta} \leq 1/\lambda_g = 0,00962$ . Выбираем  $T_0/2 = T_1^{\Delta} = T_2^{\Delta} = 0,0032 \text{ с}$ . Тогда величина шага дискретности по времени  $T_0 = 0,0064 \text{ с}$ .

Окончательное выражение для передаточной функции последовательного корректирующего звена принимаем в следующем виде:

$$W_k(u) = \frac{(1 + 0,11u)(1 + 0,083u)}{1 + 0,588u} \frac{1 + 0,009u}{(1 + 0,0032u)^2}. \quad (6.40)$$

Соответствующая этому выражению *асимптотическая* псевдочастотная ЛАХ схематично показана на рис. 6.2. Компьютерное моделирование синтезированной ДСУ в программных пакетах VisSim и Mathcad показало, что для нее перерегулирование  $\sigma=25\%$ ; время регулирования  $t_p=0,107$ с; значение показателя колебательности  $M = 1,23$ ; запас по фазе  $\varphi_3= 0,9$ ; запас по амплитуде  $L_3= 11,4$  дБ.

♦ *Применение метода аналогового прототипа.* Основные положения метода были рассмотрены ранее в *третьей* главе. В соответствии с его рекомендациями, сначала выполняется динамический синтез непрерывной системы-прототипа, обеспечивающей выполнение всех требований задания на проектирование. Для исходных данных рассматриваемого примера наиболее удобен расчет в частотной области с использованием понятий эквивалентного гармонического сигнала, типовой ЛАХ *симметричного* типа и методики В.А. Бесекерского. Все построения при этом будут аналогичны тем, которые показаны на рис. 6.2. Поскольку переход от непрерывной системы к цифровой ДСУ всегда связан с уменьшением запасов устойчивости, то при расчете прототипа повысим требования к запасу устойчивости, полагая, например,  $M = 1,265$ .

Тогда передаточную функцию последовательного *непрерывного* корректирующего звена можно принять в виде

$$W_k(p) = \frac{(1 + 0,11p)(1 + 0,083p)}{1 + 0,588p} \frac{1 + 0,009p}{(1 + 0,006p)(1 + 0,0032p)}. \quad (6.41)$$

Исследование скорректированной *непрерывной* системы-прототипа в среде программного пакета VisSim получены следующие показатели качества: частота среза  $\omega_c=58$  с<sup>-1</sup>; запас устойчивости по фазе  $\varphi_3= 0,8$ ; показатель колебательности  $M = 1,22$ ; перерегулирование  $\sigma = 22\%$ ; время регулирования  $t_p= 0,11$  с.

Определим величину шага дискретности  $T_0$ , задаваясь ухудшением запаса по фазе ДСУ по сравнению с прототипом примерно на 10%:  $T_0 \leq \frac{0,2\varphi_3}{\omega_c} \approx 0,003$  с.

При использовании *метода трапеций* для аппроксимации оператора интегрирования, передаточная функция дискретного (цифрового) корректирующего звена  $W_k(u)$  может быть получена из передаточной функции непрерывного аналога  $W_k(p)$  формальной заменой  $p=u$ .

Моделирование ДСУ с таким корректирующим звеном в среде VisSim показало, что перерегулирование  $\sigma=28\%$ ; время регулирования  $t_p= 0,09$  с;  $M=1,28$ ; запас по фазе  $\varphi_3=0,84$ ; запас по амплитуде  $L_3=12$  дБ.

♦ *Применение метода типовых желаемых ЛАХ.* Шаг дискретности по времени в этом методе считается заданным. Пусть, например  $T_0 = 0,004$  с. Передаточную функцию ДЗ ПНЧ  $W_0(u)$  определим с помощью *обособленного*  $D_u$ -преобразования, рассмотренного в *третьей* главе, назначив границей НЧ и ВЧ диапазонов частоту  $\omega_{гр} = 2/T_0=500$  с<sup>-1</sup>.

Так как при значении  $T_b=0,009$  на частоте  $\omega_{гр}$  единственная высокочастотная асимптота ЛАХ для  $W_0(p)$  имеет наклон  $-60$  дБ/дек, то для построения псевдочастотных логарифмических характеристик для  $W_0(u)$  в ВЧ диапазоне, где  $\lambda > 2/T_0$ , можно воспользоваться следующим *приближенным* выражением



$$W_0(u) \approx W_{вч}(u) = \tilde{D}_u \left( \frac{K_x}{p^3} \right) = \frac{K_x \left( 1 - u \frac{T_0}{2} \right) \left( 1 + u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right) \left( 1 - u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right)}{u^3}. \quad (6.42)$$

В НЧ диапазоне, где  $\lambda < 2/T_0$  для той же цели используют другое выражение  $W_0(u) \approx W_{нч}(u) = W_0(p)|_{p=u}$ . Но так как в НЧ диапазоне сомножитель  $(1 - uT_0/2)$  проявляется незначительно, а в ВЧ диапазоне  $W_{нч}(u)$  проявляется как  $K_x/u^3$ , то для построения ПЧ ЛАХ для дискретного звена приведенной непрерывной части во всем диапазоне удобно использовать объединенное приближенное выражение

$$W_0(u) \approx \frac{K \left( 1 - u \frac{T_0}{2} \right) \left( 1 + u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right) \left( 1 - u \frac{T_0}{2\sqrt{3}} \right)}{u(1 + uT_a)(1 + uT_b)}. \quad (6.43)$$

Величину коэффициента усиления  $K=410$ , обеспечивающего требуемую точность воспроизведения задающего воздействия с ограниченными значениями первой и второй производной, выберем так же, как и ранее в других методах.

Подставляя в (6.43) численные значения параметров, получим дискретную передаточную функцию «неизменяемой» части ДСУ:

$$W_0(u) = \frac{410(1 - 0,002u)(1 + 0,00115u)(1 - 0,00115u)}{u(1 + 0,11u)(1 + 0,009u)}. \quad (6.44)$$

Далее, ориентируясь на «симметричную» ПЧ ЛАХ разомкнутой ДСУ и на выражения (6.34), (6.44), запишем, с учетом условий грубости, передаточную функцию разомкнутой скорректированной системы в следующем виде:

$$W(u) = \frac{410(1 + uT_2)(1 - 0,002u)(1 + 0,00115u)(1 - 0,00115u)}{u(1 + uT_1)(1 + uT_3)(1 + uT_4)}. \quad (6.45)$$

Неизвестные постоянные времени, а также характерные параметры типовой ЛАХ назначаются из условий (6.35) с учетом инженерных рекомендаций к величине псевдочастоты среза и помехоустойчивости ДСУ при  $M = 1,3$ :

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \text{ где } \lambda_1 \approx \omega_x - \text{частота «эквивалентного» гармонического сигнала;}$$

$$\lambda_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{T_1}} = 26,41 \text{ с}^{-1} - \text{базовая частота для типовой «симметричной» ЛАХ;}$$

$$\lambda_c = \lambda_0 \sqrt{\frac{M}{M-1}} = 55 \text{ с}^{-1}; \lambda_g = \lambda_c(1 + M^{-1}) = 98 \text{ с}^{-1}; \lambda_2 \leq \lambda_c \left( 1 - \frac{1}{M} \right) = 12,7 \text{ с}^{-1};$$

$$T_2 \geq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M-1} = 0,08 \text{ с;}$$

$$\frac{T_0}{2} + T_3 + T_4 + \tau_1 = 0,002 + T_3 + T_4 + 0,00115 \leq \frac{1}{\lambda_c} \frac{M}{M+1} = 0,0103 \text{ с;}$$

$$T_3 + T_4 \leq 0,00714 \text{ с. Выберем } T_3 = T_4 = 0,0037 \text{ с.}$$

Передаточную функцию последовательного корректирующего звена найдем как частное от деления желаемой передаточную функцию (6.45) на передаточную функцию неизменяемой части ДСУ:

$$W_k(u) = \frac{W(u)}{W_0(u)} = \frac{(1 + 0,08u)(1 + 0,11u)(1 + 0,009u)}{(1 + 0,588u)(1 + 0,0037u)^2}. \quad (6.46)$$

При исследовании синтезированной этим методом ДСУ средствами программных пакетов VisSim и Mathcad были получены следующие показатели качества:

- а) перерегулирование  $\sigma=24\%$ ; б) время переходного процесса  $t_p=0,114$  с;
- в) показатель колебательности  $M=1,23$ ; г) запас по фазе  $\varphi_3=0,9$ ;
- д) запас по амплитуде  $L_3=11$  дБ.

Графики псевдочастотных характеристик разомкнутой и замкнутой скорректированной ДСУ, а также реакция на единичный ступенчатый сигнал (переходная функция) показаны на рис. 6.3 – рис. 6.6.

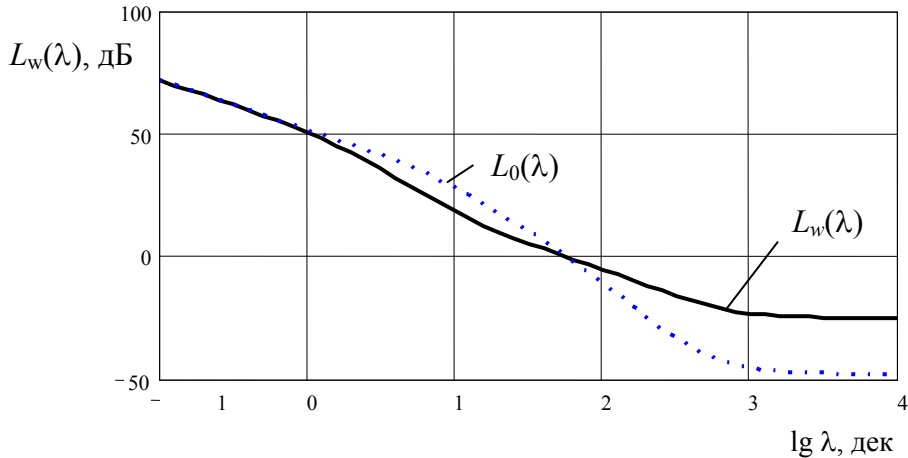


Рис. 6.3. ПЧ ЛАХ дискретной системы

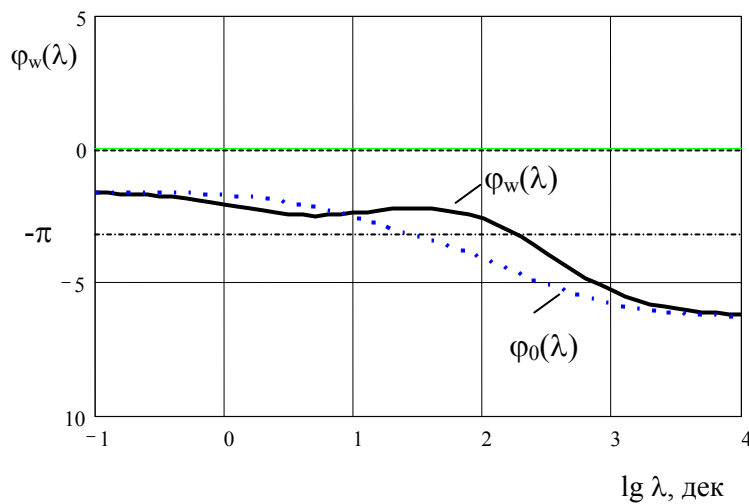


Рис. 6.4. ПЧ ЛФХ дискретной системы

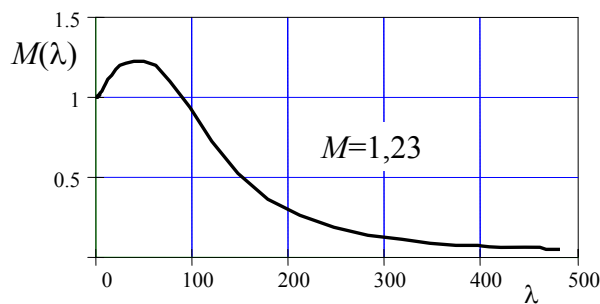


Рис. 6.5. Амплитудная ПЧХ замкнутой ДСУ

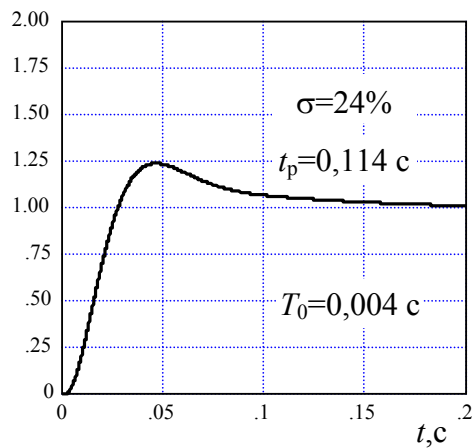


Рис. 6.6. Переходная функция ДСУ

Сравнивая результаты синтеза ДСУ по этим трем методам, можно сделать следующие выводы:

- 1) сложность передаточных функций (порядки полиномов числителей и знаменателей передаточных функций) получаемых последовательных корректирующих звеньев одинакова;
- 2) шаг дискретности  $T_0$  при использовании метода аналогового прототипа получается примерно в два раза меньше, а перерегулирование больше;
- 3) метод аналогового прототипа существенно проще в применении, чем другие, и во многих случаях позволяет быстро получать вполне приемлемые для практических целей результаты.
- 4) итерационный метод позволяет получить большее значение шага дискретности по времени  $T_0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современной тенденцией развития и совершенствования технических средств управления является широкое применение устройств *дискретного действия* взамен традиционных непрерывных. Особенно это касается цифровых вычислительных устройств разных типов и производительности, которые сейчас повсеместно используются не только на верхних, но и на нижних, исполнительных, уровнях управления, где обычно решаются задачи *регулирования* текущих значений управляемых переменных. Прерывистый характер сигналов в таких технических устройствах и сопутствующая этому дискретизация по времени информационных параметров вносят ряд существенных особенностей в динамику процессов управления, а также в методы их математического описания и исследования. Непосредственное применение методов непрерывной теории для решения возникающих при этом задач оказалось невозможным даже в простейших случаях, и поэтому возникла объективная необходимость в разработке специальных методов теории дискретных систем управления.

В настоящее время уровень развития этой теории не ниже, чем для непрерывных систем управления, а в методологическом плане, фактически, во многом повторяет ее. Практически все методы и понятия непрерывной теории, за редким исключением, были распространены (обобщены с учетом особенностей) на дискретные системы управления. Это касается и многомерных, и нелинейных, и стохастических, и нестационарных ДСУ. Такая ситуация сложилась исторически, хотя в принципиальном плане, наверное, воз-

можно было бы разрабатывать и создавать только теорию дискретных систем управления, а непрерывные системы рассматривать как их предельный частный случай при стремлении шага дискретизации по времени  $T_0$  к нулю.

В нашем учебном пособии мы сознательно ограничились рассмотрением только *основ* классического подхода в теории одномерных, стационарных, линейных ДСУ. Усвоение приведенных в пособии базовых понятий и методов позволит, при необходимости, облегчить изучение других, более сложных разделов теории дискретных систем управления, а также, возможно, по-новому взглянуть на некоторые результаты теории непрерывных систем.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука, 1976.
2. Бесекерский В.А., Ефимов Н.Б., Зиатдинов С.И. Микропроцессорные системы автоматического управления. – Л.: Машиностроение, 1988.
3. Шамриков Б.М. Основы теории цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1985.
4. Остром К., Виттенберг Б. Системы управления с ЭВМ. – М.: Мир, 1980.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984.
6. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем управления. – М.: Наука, 1983.
7. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977.
8. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Частотный критерий устойчивости ДСУ с произвольной структурой

Рассматривается частотный метод исследования устойчивости цифровых и импульсных ДСУ с произвольной структурой взаимных соединений линейных непрерывных и дискретных динамических звеньев. Метод ориентирован на использование матричных вычислений с помощью современных математических пакетов для ПЭВМ.

*Вводные замечания.* Многосвязные и многоконтурные цифровые системы управления являются современным этапом совершенствования средств автоматизации сложных технических объектов. Это обусловлено повышением требований к качеству их функционирования, применением новых, более сложных способов управления, необходимостью одновременного регулирования нескольких переменных и тенденцией повсеместного применения микропроцессорных компьютерных средств для реализации управляющих алгоритмов.

Исходная структурная схема таких систем содержит, в общем случае, несколько (или много) замкнутых контуров передачи воздействий и различные (простые и перекрещивающиеся) взаимные связи. При этом в некоторых контурах или связях могут располагаться цифровые вычислительные устройства, а также импульсные элементы с амплитудной модуляцией.

Одной из важнейших задач при проектировании таких систем является исследование и обеспечение их устойчивости. Но даже для непрерывных многоконтурных систем это не простая задача, а дискретизация по времени при получении цифровых и импульсных сигналов намного усложняет ее.

Применение частотных критериев устойчивости в их традиционном виде к подобным системам проблематично, поскольку известные критерии ориентированы на некоторое общепринятое (каноническое) представление математических моделей и соответствующих им структурных схем. Обычно это одноконтурные структуры с единичной отрицательной обратной связью.

Приведение исходных структурных схем к каноническому виду для сложных систем "ручными" методами затруднено, а для цифровых систем с произвольной структурой взаимодействий невозможно ввиду необходимости выполнения сложных аналитических преобразований. Применение компьютерных средств для автоматизации расчетов при таком подходе малоэффективно и не решает проблемы. Поэтому актуальна разработка таких методов анализа устойчивости сложных цифровых систем, которые бы использовали наиболее общие структурные представления и формы математического описания и были бы изначально ориентированы на применение компьютерных средств и современных программных пакетов. В частности, такой формой является описание системы в виде совокупности уравнений "вход-выход" (или соответствующих передаточных функций) для отдельных ее элементов и описание способов их взаимодействия в виде линейных алгебраических выражений.

Такое *унифицированное* представление математических моделей позволяет эффективно исследовать устойчивость как непрерывных, так и дискретных (цифровых и импульсных) многоконтурных и многосвязных систем управления частотными методами. А применение современных программных пакетов для ПЭВМ в сочетании с матричными методами вычислений позволяет избежать громоздких структурных преобразований и тем самым упростить процедуру анализа устойчивости для этого класса динамических систем.

*Описание метода.* Рассматривается задача исследования устойчивости цифровой (или импульсной) системы управления, эквивалентная структурная схема которой представлена в виде некоторого соединения  $n_d$  дискретных (ДДЗ) и  $n_n$  непрерывных (НДЗ) линейных динамических звеньев. Предполагается, что выходы ДДЗ поступают на входы НДЗ в экстраполированном виде через фиксаторы  $\Phi_0$ , а выходы НДЗ поступают на входы ДДЗ в виде выборочных (с шагом дискретизации по времени  $T_0$ ) последовательностей значений. Передаточные функции  $W_i(z)$  или  $W_k(p)$  для всех ДДЗ и НДЗ считаются известными, а зависимости входов звеньев от выходов (взаимосвязи) – *линейными и безынерционными*.

Такая система будет устойчивой, если характеристические корни  $z_i$  ее *дискретной модели* принадлежат единичному кругу. Однако проверить это непосредственно или с помощью известных критериев устойчивости в их традиционных формах практически невозможно из-за сложности структуры системы. Ниже рассматривается матричный частотный метод решения поставленной задачи, использующий данные о структурной схеме системы и ориентированный на компьютерные вычисления. Для решения вопроса об устойчивости используется математическая модель автономной системы (при отсутствии внешних воздействий) в виде совокупности уравнений относительно операционных изображений переменных (преобразования Лапласа и  $Z$ -преобразования).

В векторно-матричных обозначениях структурную схему рассматриваемой автономной системы можно представить в виде *взаимодействующих* между собой многомерной дискретной подсистемы (ДПС) и *эквивалентного многомерного дискретного звена* (ЭМДЗ), которое формально представляет собой многомерную непрерывную подсистему

(НПС) с фиксаторами  $\Phi_0$  на входах и устройствами выборки (ключами) на выходах. Передаточная матрица ЭМДЗ может быть записана в виде

$$\mathbf{W}_3(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{\mathbf{W}_{\text{нн}}(p)}{p} \right\},$$

где  $\mathbf{W}_{\text{нн}}(p) = (\mathbf{E} - \mathbf{W}_{\text{н}}^*(p) \mathbf{R}_{\text{н}})^{-1} \mathbf{W}_{\text{н}}^*(p)$  - передаточная матрица непрерывной подсистемы;  $\mathbf{W}_{\text{н}}^*(p) = \text{diag}\{W_i(p)\}$  - диагональная матрица;  $\mathbf{R}_{\text{н}}$  - матрица коэффициентов линейных зависимостей входов НДЗ от их выходов (матрица взаимосвязей НДЗ между собой).

Полюсы передаточных матриц  $\mathbf{W}_3(z)$  и  $\mathbf{W}_{\text{нн}}(p)$  связаны между собой известным соотношением вида  $z_j = \exp(p_j T_0)$ , а поэтому число “неустойчивых” полюсов  $N_{1+}$  для них будет одним и тем же.

Запишем уравнения дискретной модели автономной системы в виде

$$\mathbf{y}_{\text{д}}^*(z) = \mathbf{W}_{\text{д}}^*(z) \mathbf{u}_{\text{д}}^*(z); \quad \mathbf{y}_{\text{н}}^*(z) = \mathbf{W}_3(z) \mathbf{u}_{\text{ф}}^*(z);$$

$$\mathbf{u}_{\text{д}}^*(z) = \mathbf{R}_{\text{д}} \mathbf{y}_{\text{д}}^*(z) + \mathbf{R}_{\text{дн}} \mathbf{y}_{\text{н}}^*(z); \quad \mathbf{u}_{\text{ф}}^*(z) = \mathbf{R}_{\text{нд}} \mathbf{y}_{\text{д}}^*(z),$$

где  $\mathbf{W}_{\text{д}}^*(z) = \text{diag}\{W_i(z)\}$ ;  $\mathbf{R}_{\text{д}}$  - матрица взаимосвязей ДДЗ между собой;  $\mathbf{u}_{\text{ф}}^*(z)$  - вектор входов фиксаторов, являющийся линейным преобразованием с матрицей  $\mathbf{R}_{\text{нд}}$  вектора выходов ДДЗ  $\mathbf{y}_{\text{д}}^*(z)$ ;  $\mathbf{R}_{\text{дн}}$  - матрица коэффициентов линейных зависимостей входов ДДЗ от выходов НДЗ.

Перепишем эти уравнения в специальном виде:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{W}^*(z) \mathbf{u}(z); \quad \mathbf{u}(z) = \mathbf{R}_y \mathbf{y}(z), \quad \text{где } \mathbf{y} = (\mathbf{y}_{\text{д}}^*, \mathbf{y}_{\text{н}}^*); \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\text{д}}^*, \mathbf{u}_{\text{ф}}^*); \quad (\text{П.1})$$

$$\mathbf{W}^*(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\text{д}}^*(z) & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_3(z) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{д}} & \mathbf{R}_{\text{дн}} \\ \mathbf{R}_{\text{нд}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Выражение (П.1) для  $\mathbf{y}(z)$  описывает систему при полном отсутствии взаимодействий между звеньями посредством дискретных сигналов, а формула (П.1) для  $\mathbf{u}(z)$  отдельно описывает эти взаимодействия. Тогда уравнение автономной системы запишутся в виде:

$$\mathbf{y}(z) = -\mathbf{W}(z) \mathbf{y}(z); \quad \mathbf{W}(z) = -\mathbf{W}^*(z) \mathbf{R}_y.$$

Формально будем считать, что это уравнение автономного движения для некоторой замкнутой многомерной дискретной САР с единичной ООС, у которой в прямой цепи расположено многомерное дискретное динамическое звено с передаточной матрицей  $\mathbf{W}(z)$ . Можно показать, что характеристический определитель такой замкнутой дискретной системы  $Q(z) = \det(\mathbf{E} + \mathbf{W}(z))$  представляет собой отношение характеристических полиномов для замкнутой и для разомкнутой (по всем дискретным сигналам) системы, т.е.  $Q(z) = d(z)/d_1(z)$ .

Поэтому для исследования устойчивости рассматриваемой системы можно применить обобщенный критерий Найквиста. Согласно этому критерию система будет устойчивой только тогда, когда частотный годограф для функции  $Q^*(j\omega) = Q(e^{j\omega T_0})$  при изменении частоты  $\omega$  на интервале  $[0, \pi/T_0]$  охватывает начало координат комплексной плоскости в положительном направлении  $r/2$  раз.

Здесь  $r = N_{\text{д}} + N_{1+}$  - это количество “неустойчивых” характеристических корней для разомкнутой (по всем дискретным сигналам!) системы. В данном случае, такие неустойчивые корни будут совпадать с теми полюсами передаточных функций ДДЗ  $W_i(z)$  и полюсами передаточной матрицы  $\mathbf{W}_3(z)$ , которые не принадлежат единичному кругу комплексной  $z$ -плоскости.

Определение числа  $N_d$  “неустойчивых” (с учетом кратности!) полюсов для передаточных функций ДДЗ  $W_i(z)$  не вызывает затруднений, а число неустойчивых полюсов  $N_{1+}$  для передаточной матрицы  $W_3(z)$  совпадает (см. замечание выше) с числом неустойчивых полюсов  $N_{1+}$  для передаточной матрицы непрерывной подсистемы  $W_{hh}(p)$ . Значение  $N_{1+}$  можно определить по изменению аргумента характеристического определителя непрерывной подсистемы

$$Q_h(j\omega) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{W}_h^*(j\omega)\mathbf{R}_h).$$

Для этого сначала строится его частотный годограф при  $\omega \in [0, \infty)$ , а затем используется формула  $N_{1+} = N_h - \Delta \text{Arg } Q_h(j\omega)/\pi$ , где  $N_h$  – количество “правых” полюсов (с учетом кратности) для всех непрерывных звеньев с передаточными функциями  $W_i(p)$ .

С учетом равенства для  $N_{1+}$ , необходимое и достаточное условие устойчивости дискретно-непрерывной (цифровой) системы можно записать в виде:

$$\Delta \text{Arg } Q^*(j\omega) + \Delta \text{Arg } Q_h(j\omega) = \pi(N_d + N_h). \quad (\text{П.2})$$

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{T} \qquad 0 \leq \omega < \infty$$

Учитывая, что изменение аргумента комплекснозначной функции на  $2\pi$  соответствует одному полному охвату годографом функции начала координат, условию (П.2) (критерию) можно придать наглядную геометрическую формулировку. Цифровая система будет устойчивой, если сумма числа охватов годографом функции  $Q^*(j\omega)$  в *положительном* направлении и числа охватов (с учетом направления!) начала координат годографом функции  $Q_h(j\omega)$  равна половине суммарного количества *неустойчивых* полюсов для дискретных и непрерывных звеньев с учетом их кратности.

При расчетах годографа функции  $Q^*(j\omega)$  удобно использовать следующую приближенную формулу для частотной передаточной матрицы  $W_3^*(j\omega)$ :

$$W_3^*(j\omega) = W_3(e^{j\omega T_0}) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-m}^m W_h(j(\omega - k \frac{2\pi}{T_0})),$$

где  $W_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_0}}{j\omega} W_{hh}(j\omega)$ , а  $m$  – достаточно большое, например, равное *десяти*, целое число.

**Заключение.** Рассмотренный метод позволяет исследовать устойчивость дискретно-непрерывных (цифровых) систем управления на основе исходных данных о структуре взаимодействия линейных дискретных и непрерывных динамических звеньев в виде матриц связи и о их передаточных функциях. Он представляет собой обобщение частотного критерия устойчивости Найквиста на случай дискретно-непрерывных систем с произвольной структурой и *не требует* предварительных сложных структурных преобразований в составе непрерывной или дискретной подсистем. При этом также нет ограничений и на структуру взаимодействия этих подсистем, что выгодно отличает его от других известных методов. Все матричные преобразования и графические построения легко выполнимы средствами современных математических пакетов, например, типа Mathcad.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	2
1. РАСЧЕТНЫЕ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. 3	
1.1. Эквивалентные схемы замещения для УДД.....	3
1.2. Расчетные математические модели и схемы ДСУ .....	7
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ.....	9
2.1. Операторы преобразования ДЗ. Виды и способы задания.....	9
2.2. Линейные ДДЗ. Математические модели, свойства и временные характеристики .....	13
3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ .....	17
3.1. Дискретные операционные преобразования. Виды и свойства.....	17
3.2. Передаточные функции ЛДДЗ .....	22
3.3. Частотные спектры дискретных и непрерывных сигналов. Условия их информационной эквивалентности .....	26
3.4. «Эквивалентные» и «предельные» непрерывные системы для дискретных САУ. Метод аналогового прототипа .....	30
3.4. Частотные характеристики дискретных звеньев, их виды и свойства .....	34
3.5. Математические модели дискретного звена ПНЧ .....	38
3.6. Частотные характеристики ДЗ ПНЧ.....	43
4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	46
4.1. Условия устойчивости линейных ДСУ и методы ее исследования.....	47
А. Алгебраические критерии устойчивости .....	48
Б. Частотные критерии устойчивости .....	51
5. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДСУ.....	61
5.1. Оценки качества процессов управления в линейных ДСУ .....	61
5.2. Качество переходных процессов в ДСУ .....	62
5.3. Качество установившихся процессов в ДСУ .....	66
6. ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ДСУ.....	70
6.1. Варианты постановки задач динамического синтеза ДСУ .....	70
6.2. Методы синтеза корректирующих звеньев в составе ДСУ .....	71
6.3. Аналитические методы синтеза корректирующих звеньев .....	73
6.3.1. Аналитический метод неоптимального синтеза .....	73
6.3.2. Аналитический метод оптимального синтеза .....	77
6.4. Частотные методы синтеза корректирующих звеньев .....	79
6.4.1. О синтезе ДСУ методом логарифмических характеристик.....	80
6.4.2. Особенности формирования желаемых ПЧЛХ ДСУ .....	81
6.4.3. Построение желаемых ПЧЛХ при заданном значении $T_0$ .....	82
6.4.4. Синтез корректирующих звеньев при неизвестном $T_0$ .....	84
Заключение .....	91
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	92
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	92